

E 1130/2

**BULETINUL
INSTITUTULUI
POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ”
BUCUREȘTI**

SERIA ELECTROTEHNICĂ

**TOMUL XXXIX NUMĂRUL 1 ANUL 1977,
IANUARIE—MARTIE**

COMITETUL DE REDACȚIE

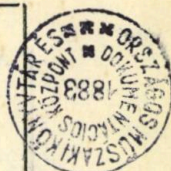
REDACTOR RESPONSABIL : Academician *Radu Voinea*

MEMBRII : Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Academician *Ecaterina Ciorănescu Nenițescu*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Călin Sergiu* (secretar științific); Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. docent ing. *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor : Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București,
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10, România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ILEXIM
import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011226, Bucharest
ROMÂNIA

Sumar



MATEMATICA

Gh. Mocică, C. Udriște

Asupra 3-structurilor Sasaki pe varietăți cu trei dimensiuni 3

V. Mihăilescu

Conexiune asociată grupului cuaternionle 9

FIZICA

D. Anghelescu, V. Datcu

O modalitate de calcul a probabilității de formare a stelelor cu urme necorelate în emulsiile nucleare 17

E. Sofron, Cornelia Moțoc, P. Sterian

Asupra unor dispozitive optoelectronice cu cristale lichide nematice : Proprietăți, caracteristici și aplicații 23

Luminița Daniello

Metode de stabilire a ecuației Boltzmann 31

I.M. Popescu

Cutremurele de pământ 41

ELECTROTEHNICA

M. Preda, N. Nicoară, I. Dorobanțu

Ecuațiile de stare ale circuitelor active cu elemente în exces 43

M. Iordache, Vl. Socaciu

A. Method of Computing the Derivative of Some Functions Describing Nonlinear Electric Phenomena 51

ELECTRONICA

Tatiana Rădulescu

Sinteza funcțiilor de transfer de tensiune având în vedere minimizarea sensibilității 59

AUTOMATICA

I. Dumitrache, D. Popescu

Metoda căutării planelor principale pentru optimizarea sistemelor multivariabile 67

Maria Ana Necula, A. Nădejde, Ligia Maior

Metoda numerică de calcul al valorilor unei funcții de timp dată prin transformata Z 79

V. Cristea

Algoritm de sincronizare a proceselor sistemului Sisif 1 87

I. Catană

Metode de analiză a sistemului hidraulic pompă-motor rotativ 93

ENERGETICA

N. Dănilă, C. Ionescu

Analiza statistică a fiabilității grupurilor energetice de mare putere 101

D. Gh. Ionescu

Observații asupra metodei lui Rayleigh a analizei dimensionale și asupra relației integrale a stratului limită 107

MATEMATICĂ

C.Z.: 517

**ASUPRA 3-STRUCTURILOR SASAKI PE VARIETĂȚI
CU TREI DIMENSIUNI***

GH. MOCICĂ, C. UDRIȘTE

În această lucrare se dă o condiție necesară și suficientă pentru ca o varietate diferențiabilă cu trei dimensiuni să admită o 3-structură Sasaki și se găsește soluția unui sistem de ecuații cu derivate parțiale.

1. Varietățile ca și aplicațiile folosite în raționamente sînt presupuse C^∞ .

Fie M o varietate diferențiabilă cu $(4n + 3)$ dimensiuni. O structură metrică aproape cocuaternionică pe M este definită prin trei structuri metrice aproape cocomplexe (Φ, ξ, η, g) , $a = 1, 2, 3$, care satisfac condițiile

$$\Phi_a \circ \Phi_b - \xi_a \otimes \eta_b = -\Phi_b \circ \Phi_a + \xi_b \otimes \eta_a = \Phi_c,$$

$$\Phi_a \xi_b = -\Phi_b \xi_a = \xi_c,$$

$$\eta_a \circ \Phi_b = -\eta_b \circ \Phi_a = \eta_c,$$

$$\eta_a(\xi_b) = \eta_b(\xi_a) = 0$$

pentru orice permutare ciclică $\{a, b, c\}$ a lui $\{1, 2, 3\}$.

O structură metrică aproape cocuaternionică poate fi descrisă cu ajutorul 1-formelor η_a și a 2-formelor $\Theta(X, Y) = g(\Phi_a X, Y)$, [5], [7].

O structură metrică aproape cocuaternionică care satisface

$$\Theta_a = d\eta_a,$$

$$\nabla_X(\nabla_a \xi)Y = \eta_a(Y)X - g(X, Y)\xi_a \text{ sau } -R(X, \xi_a)Y = \eta_a(Y)X - g(X, Y)\xi_a, \quad (1)$$

*Manuscris predat redacției data de 5 aprilie 1974

unde ∇ este conexiunea riemanniană atașată lui g și R este tensorul lui Riemann $R(X, Y) = \nabla_{[X, Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$, se numește *3-structură Sasaki*. Pentru o 3-structură Sasaki, $\xi_a, a = 1, 2, 3$, sînt cîmpuri Killing în raport cu g și avem $\Phi = \nabla_a \xi_a$, [4].

2. Fie M o varietate cu trei dimensiuni. În acest caz existența unei structuri metrice aproape cocuaternionice (Φ, ξ_a, η_a, g) , $a = 1, 2, 3$, pe M este echivalentă cu existența cîmpurilor vectoriale ξ_a sau a 1-formelor η_a [5].

Să presupunem acum că varietatea M posedă o 3-structură Sasaki (Φ, ξ_a, η_a, g) . Evident $\xi_a, a = 1, 2, 3$, determină (local) un grup de mișcări simplu tranzitiv pe M . Mai mult, avem

$$(\nabla_a \xi_a)(X) = \Theta_a(\xi_a, X) = 0, \quad a = 1, 2, 3, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M)$$

și deci traiectoriile cîmpurilor vectoriale ξ_a sînt geodezice ale lui M . Deoarece cîmpurile ξ_a și 1-formele η_a sînt legate prin

$$\eta_a(\xi_b) = \delta_{ab}, \quad \sum_a \eta_a \otimes \xi_a = \text{id.},$$

înmulțind pe (1.3) cu $\eta_a(Z)$ și sumînd după a găsim

$$R(X, Y)Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$$

și deci M este o varietate cu curbura constantă 1.

Să presupunem acum că varietatea M este completă. În acest caz $M = S^3/\Gamma$ (formă spațială sferică), unde Γ este un subgrup finit al grupului $O(4)$ care acționează fără puncte fixe pe S^3 [1, vol. I].

S. Sasaki [3] a determinat toate formele spațiale sferice care admit o 3-structură sasakiană.

Propoziția 1. O condiție necesară și suficientă pentru ca o varietate M cu trei dimensiuni să admită o 3-structură Sasaki este ca să posedă trei 1-forme independente $\eta_a, a = 1, 2, 3$, care satisfac

$$d\eta_a = 2\eta_b \wedge \eta_c, \quad (2)$$

unde $\{a, b, c\}$ este o permutare ciclică a lui $\{1, 2, 3\}$

Demonstrație. Presupunem că M posedă o 3-structură Sasaki (Φ, ξ_a, η_a, g) , $a = 1, 2, 3$.

Deoarece

$$d\eta(\xi, Y) = (\nabla_{\xi} \eta)(Y) = 0,$$

$$d\eta(\xi, Y) = (\nabla_{\xi} \eta)(Y) = \eta(Y) = -d\eta(\xi, Y),$$

rezultă că

$$d\eta = \eta \otimes \eta - \eta \otimes \eta = 2\eta \wedge \eta.$$

Reciproc, să presupunem că M posedă trei 1-forme independente η care satisfac pe (2). Dacă notăm cu ξ cimpurile duale ale acestor 1-forme, atunci avem

$$d\eta(\xi, X) = 0, \quad d\eta(\xi, X) = -d\eta(\xi, X) = \eta(X).$$

Considerăm metrica

$$g = \sum_a \eta_a \otimes \eta_a, \quad g^{-1} = \sum_a \xi_a \otimes \xi_a$$

și definim

$$\Phi = g^{-1} \circ d\eta = \eta \otimes \xi - \eta \otimes \xi.$$

Prin calcul direct se verifică că (Φ, ξ, η, g) este o structură metrică aproape cocuaternionică.

De asemenea, din (2) rezultă

$$[\xi, \xi] = -2\xi \quad (L_{\xi} \xi = -2\xi)$$

și deci ξ determină (local) un grup Lie semisimplu și unitar. Pe de altă parte din $\eta(\xi) = \delta_{ab}$ găsim

$$L_{\xi} \eta_a = 0, \quad L_{\xi} \eta_b = -2\eta_c$$

și deci

$$L_{\xi} g = 0 \text{ sau } (\nabla_X \eta)(Y) + (\nabla_Y \eta)(X) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

adică ξ sînt vectori Killing. Din cele precedente și din

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2} [(\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)]$$

rezultă

$$d\eta_a(X, Y) = (\nabla_X \eta_a)(Y) = \eta_b(X) \eta_c(Y) - \eta_c(X) \eta_b(Y),$$

sau

$$\Phi X = \nabla_X \xi_a = \eta_b(X) \xi_c - \eta_c(X) \xi_b.$$

Acestea verifică relațiile (1) și deci M posedă o 3-structură Sasaki determinată de 1-formele η_a ,

Fie R^4 spațiul euclidian cu patru dimensiuni,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

structura (aproape) cuaternionică naturală a lui R^4 și M o hipersuprafață orientabilă scufundată în R^4 prin $i: M \rightarrow R^4$.

Fie TM fibrarea tangentă a lui M și $T_r R^4$ restricția fibrării tangente a lui R^4 la M . Notăm prin i_* diferențiala aplicației i , adică $i_*: TM \rightarrow T_r R^4$.

Fie ζ câmpul normal unitar definit pe M și ω 1-forma asociată acestui câmp în raport cu metrica euclidiană. Avem

$$\omega(\zeta) = 1, \quad \omega_0 i_* = 0, \quad \omega(J_a \zeta) = 0, \quad a = 1, 2, 3.$$

De asemenea există o aplicație $i_*^{-1}: T_r R^4 \rightarrow TM$ astfel încît

$$i_*^{-1} \circ i_* = id, \quad i_* \circ i_*^{-1} = Id - \zeta \otimes \omega, \quad i_*^{-1} \zeta = 0,$$

unde id este identitatea pe TM și Id este identitatea pe $T_r R^4$.

În [6] s-a demonstrat că M posedă următoarea structură metrică aproape cocuaternionică

$$\Phi = i_*^{-1} \circ J_a \circ i_*, \quad \xi_a = i_*^{-1} J_a \zeta, \quad \eta_a = \omega \circ J_a \circ i_*, \quad a = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$g = i_* \circ i_*.$$

Propoziția 2. Fie M o hipersuprafață orientabilă și completă a lui R^4 . Structura (3) este o 3-structură Sasaki dacă și numai dacă M este o sferă [3, [5], [7].

Demonstrație. Presupunem că structura metrică aproape cocuaternionică dată de (3) este o 3-structură Sasaki. Rezultă că M are curbura secțională 1. Pe de altă parte orice hipersuprafață completă a spațiului

euclidian care are curbura secțională constantă și pozitivă este o sferă [1, vol. II].

Reciproc, dacă M este o sferă S^3 în R^4 , atunci formulele (3) dau o 3-structură Sasaki [7].

Propoziția 3. Sistemul format din ecuațiile diferențiale

$$\rho(-F_{xx} - F_{yy} - F_y F_{zx} + F_x F_{zy}) + \rho_x(F_x + F_y F_z) + \rho_y(F_y - F_x F_z) = 2\rho^2,$$

$$\rho(F_{xz} - F_z F_{yz} + F_y F_{zz}) + \rho_y(1 + F_z^2) - \rho_z(F_x + F_y F_z) = -2\rho^2 F_y$$

$$\rho(F_{yz} - F_x F_{zz} + F_z F_{xz}) - \rho_z(F_y - F_x F_z) - \rho_x(1 + F_z^2) = 2\rho^2 F_x,$$

și din ecuațiile care se obțin permutând pe x, y, z , unde F este funcția necunoscută, $\rho = \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ și indicii x, y, z notează derivate parțiale, admite soluția unică $F = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ abstractie făcînd de o deplasare în R^4 .

Demonstrație : Hipersuprafața

$$M : t = F(x, y, z)$$

este orientabilă și completă. În raport cu baza naturală, avem

$$\omega = \frac{1}{\rho}(-F_x, -F_y, -F_z, 1), \quad \rho = \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \text{ și}$$

$$i_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

rezultă

$$\rho \eta_1 = (F_y - F_x F_z, -F_x - F_y F_z, -1 - F_z^2),$$

$$\rho \eta_2 = (F_z + F_y F_x, 1 + F_y^2, -F_x + F_y F_z),$$

$$\rho \eta_3 = (-1 - F_x^2, F_z - F_x F_y, -F_y - F_x F_z).$$

Sistemul din teoremă este echivalent cu $d\eta = 2\eta_a \wedge \eta_b \wedge \eta_c$, adică cu faptul că $\eta_a, a = 1, 2, 3$, determină pe M o 3-structură Sasaki. În baza propozi-

ției 2, deducem că acest sistem admite numai soluția $t = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, abstracție făcând de o deplasare în R^4 .

Catedra de matematici I

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. Kobayashi, S., Nomizu, K. Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, Vol. I. (1963, vol. II (1969).
2. Sasaki, S., Almost Contact Manifolds, Part I, Lecture note, Tôhoku University (1965).
3. Sasaki, S., On Spherical Space Forms with Normal Contact Metric 3-Structure, J. Diff. Geometry 6 (1972), pp. 307—315.
4. Tachibana S., Yu, W. N., On a Riemannian Space Admitting More than one Sasakian Structures, Tôhoku Math. J. 22 (1970), pp. 535—540.
5. Udriște, C., Structures presque coquaternioniennes, Bull. Math. Soc. Sci. Math. B.S.R.t. 13 (61), 4 (1969) pp. 487—507.
6. Udriște, C., Almost Coquaternion Hypersurfaces, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., t 15, 9 (1970), pp. 1545—1553.
7. Udriște, C., Structuri aproape coquaternionice, Teză de doctorat, Universitatea din Clu (1971).
8. Udriște, C., Almost Coquaternion Structures on 3-Dimensional Manifolds, Kôdai Math. Sem. Rep. 26 (1975), pp. 318—326.
9. Yano, K., Integral Formulas in Riemannian Geometry, Marcel Dekker, Ink., New-York (1970).

About Sasakian 3-structures on 3-dimensional Manifolds.

In this paper we give a condition that a 3-dimensional manifold admits a Sasakian 3-structure and we find the solution of a system of equations with partial derivatives.

C.Z. : 512.972
517.43

CONEXIUNE ASOCIATĂ GRUPULUI CUATERNIONIC

VIOREL MIHĂILESCU

Pornind de la o idee a Acad. Gh. Vranceanu de a atașa unei conexiuni afine Γ_{jk}^i alte conexiuni π_{jk}^i , V_{jk}^i , M_{jk}^i care față de grupul de transformări proiectiv, conform și symplectic constituie componentele unui tensor, în prima parte a lucrării se stabilesc ecuațiile cu derivate parțiale ce le verifică grupul cuaternionic iar în partea a doua se asociază într-un spațiu la o conexiune afină $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ o conexiune $Q_{\beta\gamma}^\alpha$ numită de autor — conexiune cuaternionică — care față de grupul proiectiv de transformări are un caracter tensorial iar conexiunea contractată $Q_\beta = Q_{\alpha\beta}^\alpha$ este nulă. În final se arată că o conexiune afină pe spațiul proiectiv cuaternionic poate fi descompusă într-un tensor și conexiunea contractată.

Pornind de la o idee a acad. Gh. Vranceanu [4] de a atașa unei conexiuni afine Γ_{jk}^i alte conexiuni π_{jk}^i , V_{jk}^i , M_{jk}^i care față de grupul de transformări proiectiv [1] conform și symplectic constituie respectiv componentele unui tensor, vom stabili ecuațiile cu derivate parțiale ce le verifică grupul cuaternionic apoi vom asocia într-un spațiu A_{4n} la o conexiune afină $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ o conexiune $Q_{\beta\gamma}^\alpha$ care față de grupul cuaternionic de transformări are un caracter tensorial iar conexiunea sa contractată $Q_\beta = Q_{\alpha\beta}^\alpha$ este nulă. În final vom pune în evidență proprietatea că o conexiune afină pe spațiul proiectiv cuaternionic poate fi descompusă într-un tensor și conexiunea contractată, proprietate găsită pe altă cale de T. Hangan [2].

1. În variabile cuaternionice, grupul cuaternionic [3] este compus din transformări afine :

$$z'^h = \alpha_l^h z^l \quad (h, l = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

unde cuaternionii α_l^h satisfac condițiile :

$$\alpha_l^h \alpha_f^{-h} = \delta_f^l$$

și din transformările :

$$z'^1 = (z^1)^{-1}; \quad z'^h = z^h (z^1)^{-1} \quad (h > 1) \quad (1')$$

Dacă punem :

$$\begin{aligned} z^h &= x^{4h-3} + ix^{4h-2} + jx^{4h-1} + kx^{4h} \\ z'^h &= x'^{4h-3} + ix'^{4h-2} + jx'^{4h-1} + kx'^{4h} \\ \alpha_l^h &= a_l^{4h-3} + ia_l^{4h-2} + ja_l^{4h-1} + ka_l^{4h} \end{aligned}$$

transformările (1) și (1') în variabile reale devine :

$$\begin{cases} x'^{4h-3} = a_l^{4h-3} x^{4l-3} - a_l^{4h-2} x^{4l-2} - a_l^{4h-1} x^{4l-1} - a_l^{4h} x^{4l} \\ x'^{4h-2} = a_l^{4h-2} x^{4l-3} + a_l^{4h-3} x^{4l-2} - a_l^{4h} x^{4l-1} + a_l^{4h-1} x^{4l} \\ x'^{4h-1} = a_l^{4h-1} x^{4l-3} + a_l^{4h} x^{4l-2} + a_l^{4h-3} x^{4l-1} - a_l^{4h-2} x^{4l} \\ x'^{4h} = a_l^{4h} x^{4l-3} - a_l^{4h-1} x^{4l-2} + a_l^{4h-2} x^{4l-1} + a_l^{4h-3} x^{4l} \end{cases}$$

și :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'^1 = \frac{x^1}{(x^1)^1 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}; \quad x'^{4h-3} = \frac{x^1 x^{4h-3} + x^2 x^{4h-2} + x^3 x^{4h-1} + x^4 x^{4h}}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} \\ x'^2 = \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}; \quad x'^{4h-2} = \frac{-x^2 x^{4h-3} + x^1 x^{4h-2} - x^4 x^{4h-1} + x^3 x^{4h}}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} \\ x'^3 = \frac{-x^3}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}; \quad x'^{4h-1} = \frac{-x^3 x^{4h-3} + x^4 x^{4h-2} + x^1 x^{4h-1} - x^2 x^{4h}}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} \\ x'^4 = \frac{-x^4}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}; \quad x'^{4h} = \frac{-x^4 x^{4h-3} - x^3 x^{4h-2} + x^2 x^{4h-1} + x^1 x^{4h}}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} \end{array} \right. \quad (2')$$

Vom considera pe parcursul întregii lucrări că literele latine : $h, l, s, f, \dots$ iau valorile de la 1 la n iar literele grecești $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \dots$ iau valori de la 1 la 4 n .

Definind cuaternionii :

$$\frac{\partial z'^h}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x'^{4h-3}}{\partial x^\alpha} + i \frac{\partial x'^{4h-2}}{\partial x^\alpha} + j \frac{\partial x'^{4h-1}}{\partial x^\alpha} + k \frac{\partial x'^{4h}}{\partial x^\alpha},$$

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^l} = \frac{\partial x'^{4l-3}}{\partial z^l} + i \frac{\partial x'^{4l-2}}{\partial z^l} + j \frac{\partial x'^{4l-1}}{\partial z^l} + k \frac{\partial x'^{4l}}{\partial z^l},$$

transformările (2) verifică relațiile :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z'^h}{\partial x'^{4l-3}} = -\frac{\partial z'^k}{\partial x'^{4l-2}} i = -\frac{\partial z'^h}{\partial x'^{4l-1}} j = -\frac{\partial z'^h}{\partial x'^{4l}} k \\ \frac{\partial x'^{4h-3}}{\partial z^l} = -\frac{\partial x'^{4h-2}}{\partial z^l} i = -\frac{\partial x'^{4h-1}}{\partial z^l} j = -\frac{\partial x'^{4h}}{\partial z^l} k \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x'^{4l-3}} = \frac{\partial \bar{x}'^{4h-3}}{\partial z^l} = i \frac{\partial \bar{x}'^{4h-2}}{\partial z^l} = j \frac{\partial \bar{x}'^{4h-1}}{\partial z^l} = k \frac{\partial \bar{x}'^{4h}}{\partial z^l} \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x'^{4l-2}} = \frac{\partial \bar{x}'^{4h-3}}{\partial z^l} i = i \frac{\partial \bar{x}'^{4h-2}}{\partial z^l} i = j \frac{\partial \bar{x}'^{4h-1}}{\partial z^l} i = k \frac{\partial \bar{x}'^{4h}}{\partial z^l} i \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x'^{4l-1}} = \frac{\partial \bar{x}'^{4h-3}}{\partial z^l} j = i \frac{\partial \bar{x}'^{4h-2}}{\partial z^l} j = j \frac{\partial \bar{x}'^{4h-1}}{\partial z^l} j = k \frac{\partial \bar{x}'^{4h}}{\partial z^l} j \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x'^{4l}} = \frac{\partial \bar{x}'^{4h-3}}{\partial z^l} k = i \frac{\partial \bar{x}'^{4h-2}}{\partial z^l} k = j \frac{\partial \bar{x}'^{4h-1}}{\partial z^l} k = k \frac{\partial \bar{x}'^{4h}}{\partial z^l} k \end{array} \right. \quad (3)$$

iar pentru transformările (2') avem :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4l-3}} = v_l^h \bar{z}^1; \quad \frac{\partial x'^{h-3}}{\partial z^l} = \bar{v}_l^h z^1 \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4l-2}} = v_l^h i \bar{z}^1; \quad \frac{\partial x'^{4h-2}}{\partial z^l} = \bar{v}_l^h i z^1 \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4l-1}} = v_l^h j \bar{z}^1; \quad \frac{\partial x'^{4h-1}}{\partial z^l} = \bar{v}_l^h j z^1 \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4l}} = v_l^h k \bar{z}^1; \quad \frac{\partial x'^{4h}}{\partial z^l} = \bar{v}_l^h k z^1 \end{array} \right. \quad (3')$$

$$\text{în care : } v_l^h = \frac{\delta_l^h}{||z^1||^2} - \frac{\delta_l^1}{||z^1||^4} z^h \bar{z}^{-1} - \frac{\delta_l^1 \delta_1^h}{||z^1||^4}$$

Avînd în vedere formulele (3) și (3'), constatăm că atît transformările 2) cît și transformările (2') verifică următoarea egalitate matricială :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-3}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-3}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-2}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-1}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-3}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l}} \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-3}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-2}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-1}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4l}} \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4l-3}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-2}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-1}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l}} \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-3}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-2}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l-1}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s}} & \frac{\partial z'^f}{\partial x^{4l}} \end{bmatrix} = \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-3}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s}} \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-3}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-3}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} \\ \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-1}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-2}} & \frac{\partial z'^h}{\partial x^{4s-3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-3}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-2}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-1}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l}} \\ \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-2}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-3}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-1}} \\ \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-1}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-3}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-2}} \\ \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-1}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-2}} & \frac{\partial x'^{4f-3}}{\partial x^{4l-3}} \end{bmatrix}$$

cît și cele care rezultă din aceasta cînd înlocuim pe $4f - 3$ respectiv cu $4f - 2$, $4f - 1$, $4f$ și simultan cu această înlocuire amplificăm respectiv cu $-i$, $-j$, $-k$ matricea din primul membru, aceștia plasîndu-i între factorii care compun elementele acesteia.

2. Se știe că conexiunea afină $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ față de o transformare de coordonate se transformă după legea :

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \Gamma_{\lambda\eta}^{\alpha'} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\nu \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \quad (5)$$

iar conexiunea sa contractată $\Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha$ se transformă după legea :

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^\alpha} = \Gamma_\nu^\alpha \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha \quad (6)$$

Definind cuaternionii :

$$\begin{cases} \Gamma_s = \Gamma_{4s-3} + i\Gamma_{4s-2} + j\Gamma_{4s-1} + k\Gamma_{4s} \\ \Gamma_{\beta s}^\alpha = \Gamma_{\beta 4s-3}^\alpha + i\Gamma_{\beta 4s-2}^\alpha + j\Gamma_{\beta 4s-1}^\alpha + k\Gamma_{\beta 4s}^\alpha \end{cases} \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial z^s} &= \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^{4s-3}} + i \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^{4s-2}} + j \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^{4s-1}} + k \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^{4s}} \\ \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^s} &= \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{4s-3}} + i \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{4s-2}} + j \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{4s-1}} + k \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^{4s}} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

formulele (5) și (6) se scriu :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial z^s} &= \Gamma_{\lambda\eta}^{\alpha'} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\eta}{\partial z^s} - \Gamma_{\beta s}^\nu \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \\ \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^l} &= \Gamma_\alpha^l \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^l} - \Gamma_l \end{aligned}$$

Calculînd determinantul funcțional al transformărilor (2') obținem :

$$\Delta = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2]^{-2(n+1)} = ||z^1||^{-4(n+1)}$$

Căutînd să obținem pentru grupul cuaternionic ecuații cu derivate parțiale analoage cu ecuațiile lui Bortolotti pentru grupul proiectiv sau cu ecuațiile obținute de Acad. Gh. Vranceanu [4] pentru grupul simplctic și conform, găsim următorul rezultat :

Grupul cuaternionic, adică transformările (2) și (2') cît și compusele acestora verifică ecuațiile cu derivate parțiale ce rezultă din formulele :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^{4l-3} \partial z^s} &= \frac{1}{4(n+1)} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^s} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^l} + \frac{1}{4(n+1)} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^s} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^l} \\ \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^{4l-2} \partial z^s} &= -\frac{1}{4(n+1)} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^s} i \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^l} - \frac{1}{4(n+1)} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^s} i \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^l} \\ \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^{4l-1} \partial z^s} &= -\frac{1}{4(n+1)} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^s} j \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^l} - \frac{1}{4(n+1)} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^s} j \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^l} \\ \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^{4l} \partial z^s} &= -\frac{1}{4(n+1)} \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^s} k \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^l} - \frac{1}{4(n+1)} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial z^s} k \frac{\partial \ln \Delta}{\partial z^l} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Egalind membrii dreپتي ai formelor (9) cu cei corespunzătorii din formulele (5') termenii accentuați la stînga ne conduc să considerăm următorii cuaternioni :

$$'Q_{4l-3s}^{4h-3} = ' \Gamma_{4l-3s}^{4h-3} - \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} ' \Gamma_l ; 'Q_{4l-3s}^{4h-1} = ' \Gamma_{4l-3s}^{4h-1} -$$

$$- \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s j - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} j ' \Gamma_l$$

$$'Q_{4l-2s}^{4h-3} = ' \Gamma_{4l-2s}^{4h-3} + \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s i + \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} i ' \Gamma_l ; 'Q_{4l-2s}^{4h-1} = ' \Gamma_{4l-2s}^{4h-1} +$$

$$+ \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s k - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} k ' \Gamma_l$$

$$'Q_{4l-1s}^{4h-3} = ' \Gamma_{4l-1s}^{4h-3} + \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s j + \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} j ' \Gamma_l ; 'Q_{4l-1s}^{4h-1} = ' \Gamma_{4l-1s}^{4h-1} -$$

$$- \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} ' \Gamma_l$$

$$'Q_{4ls}^{4h-3} = ' \Gamma_{4ls}^{4h-3} + \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s k + \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} k ' \Gamma_l ; 'Q_{4ls}^{4h-1} = ' \Gamma_{4ls}^{4h-1} -$$

$$- \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s i - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} i ' \Gamma_l$$

$$\begin{aligned}
'Q_{4l-3s}^{4h-2} &= ' \Gamma_{4l-3s}^{4h-2} - \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s i - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} i ' \Gamma_l; 'Q_{4l-3s}^{4h} = ' \Gamma_{4l-3s}^{4h} - \\
&\quad - \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s k - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} k ' \Gamma_l \\
'Q_{4l-2s}^{4h-2} &= ' \Gamma_{4l-2s}^{4h-2} - \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} ' \Gamma_l; 'Q_{4l-2s}^{4h} = ' \Gamma_{4l-2s}^{4h} - \\
&\quad - \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s j - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} j ' \Gamma_l \\
'Q_{4l-1s}^{4h-2} &= ' \Gamma_{4l-1s}^{4h-2} - \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s k - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} k ' \Gamma_l; 'Q_{4l-1s}^{4h} = ' \Gamma_{4l-1s}^{4h} + \\
&\quad + \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s i - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} i ' \Gamma_l \\
'Q_{4ls}^{4h-2} &= ' \Gamma_{4ls}^{4h-2} + \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s j - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} j ' \Gamma_l; 'Q_{4ls}^{4h} = ' \Gamma_{4ls}^{4h} - \\
&\quad - \frac{\delta_l^h}{4(n+1)} ' \Gamma_s - \frac{\delta_s^h}{4(n+1)} ' \Gamma_l
\end{aligned} \tag{10}$$

Trecind la componente reale $Q_{\beta\gamma}^\alpha$ punind :

$$'Q_{\beta s}^\alpha = Q_{\beta 4s-3}^\alpha + iQ_{\beta 4s-2}^\alpha + jQ_{\beta 4s-1}^\alpha + kQ_{\beta 4s}^\alpha$$

și folosindu-ne de cuaternionii (7) din formulele (10) obținem expresiile funcțiilor $Q_{\beta\gamma}^\alpha$ simetrice în indicii de jos ce se exprimă cu $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ și $\Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha$. Considerind cuaternionii analogi cuaternionilor $'Q_{\beta s}^\alpha$ dar accentuați și la dreapta, apoi punind :

$$'Q_{\beta s}^{\prime\alpha} = Q_{\beta 4s-3}^{\prime\alpha} + iQ_{\beta 4s-2}^{\prime\alpha} + jQ_{\beta 4s-1}^{\prime\alpha} + kQ_{\beta 4s}^{\prime\alpha}$$

obținem în mod asemănător funcțiile $Q_{\beta\gamma}^{\prime\alpha}$ simetrice în indicii de jos ce se exprimă cu $\Gamma_{\beta\gamma}^{\prime\alpha}$ și $\Gamma_\beta' = \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\alpha}$ analog funcțiilor $Q_{\beta\gamma}^\alpha$ cu $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ și $\Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha$. Ținind cont de formulele (4) verificăm egalitatea :

$$Q_{\lambda\eta}^{\prime\alpha} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial z^\beta} \frac{\partial x'^\eta}{\partial z^s} = 'Q_{\beta s}^\alpha \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}$$

care în componente reale devine :

$$Q_{\lambda\eta}^{\prime\alpha} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\gamma} = Q_{\beta\gamma}^{\prime\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}$$

Obținem deci teorema :

Funcțiile $Q_{\beta\gamma}^z$ ce sînt componente reale ale cuaternionilor definiți de formulele (10) formează un tensor, simetric în indicii de covarianță, față de transformările grupului cuaternionic.

Prin analogie cu conexiunile proiectivă π_{jk}^i conformă V_{jk}^i și symplectică M_{jk}^i care au deasemenea un caracter tensorial respectiv față de grupul proiectiv, conform și symplectic, vom numi funcțiile $Q_{\beta\gamma}^z$ componentele conexiunii asociate grupului cuaternionic sau mai simplu — *conexiune cuaternionică*.

Punînd în evidență expresiile funcțiilor $Q_{\beta\gamma}^z$ apoi calculînd conexiunea contractată $Q_\beta = Q_{\alpha\beta}^z$ obținem următoarea proprietate :

Conexiunea contractată a conexiunii cuaternionice este nulă. Se observă că această proprietate este comună și conexiunilor proiectivă, conformă și symplectică. [4]

Din formulele (10) se observă că avem următoarea proprietate :

O conexiune afină într-un spațiu A_{4n} se poate descompune într-un tensor în raport cu grupul proiectiv și conexiunea contractată, proprietate găsită pe altă cale de T. Hangan [2].

Catedra de matematici II

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. L. P. Eisenhart, Non — Riemannian — Geometry, American Mathematical Society, New-York, vol. VIII, 1927.
2. T. Hangan, Tenseurs associés aux connexions sur certains espaces homogènes, Bull. Math. de la Soc. Scient. Math. Phys. de la R.P.R, t 8(56) nr. 1—2 1964, p. 39—49.
3. B. A. Rozenfels, Neevklidovi gheometrii, Moscova, 1955.
4. Gh. Vrănceanu, Connexions associées aux groupes fondamentaux, Revue de Math. pures et appliquées, t. III, 1958, p. 59—50.

Connexion associée au groupe quaternionique

A partir d'une idée de l'Académicien Gh. Vrănceanu d'associer à une connexion affine Γ_{jk}^i d'autres connexions π_{jk}^i , V_{jk}^i , M_{jk}^i qui par rapport au groupe des transformations projectif, conforme et symplectique constitue les composantes d'un tenseur, dans la première partie de cette ouvrage on établit les équations avec des dérivées partielles qui vérifie le groupe quaternionique. Cependant dans la deuxième partie on associe à un espace avec une connexion affine Γ_{jk}^i une connexion $Q_{\beta\gamma}^z$ nommée par auteur — connexion quaternionique — lui par rapport au groupe projectif quaternionique des transformations a une caractéristique tensorielle et à la connexion contractée $Q_\beta = Q_{\alpha\beta}^z$ égal à zéro. On montre aussi qu'une connexion affine sur l'espace projectif quaternionique peut être décomposer en deux parties, la connexion contractée Q_β et la connexion projectif quaternionique $Q_{\beta\gamma}^z$, au $Q_{\beta\gamma}^z$ se comporte comme un tenseur par rapport au groupe projectif quaternionique

FIZICĂ

C.Z. : 539.155.2
519.2

O MODALITATE DE CALCUL A PROBABILITĂȚII DE FORMARE A STELELOR CU URME NECORELATE ÎN EMULSII NUCLEARE *

D. ANGHELESCU, V. DATCU

Formula calculată, conform distribuției fiecărui unghi în parte, este compatibilă cu datele experimentale și cu distribuții generate prin metoda Monte Carlo.

Distribuția unghiulară a urmelor dintr-o stea formată într-o emulsie nucleară constituie un criteriu curent utilizat de analiză a interacțiunilor. Totodată, în anumite situații, distribuțiile unghiulare sînt folosite ca instrument de studiu a proprietăților emulsiei, în special izotropia [1]. Pentru stele formate din urme necorelate o relație pentru distribuția diferențială a unghiurilor succesive (fig. 1) a fost stabilită de către G. Lovera [2]:

$$p(\varphi)d\varphi = (n - 1)(1 - \varphi)^{n-2}d\varphi \quad (1)$$

Mărima unghiului, exprimată în fracțiuni de 2π , este redată prin φ , iar n reprezintă numărul de urme din stea. Integrînd, pentru stelele cu trei brațe ($n = 3$) se obține:

$$P(\varphi) = 2\varphi - \varphi^2 \quad (2)$$

$P(\varphi)$ reprezintă probabilitatea ca un unghi oarecare din stea să aibă o valoare cuprinsă între 0 și φ .

În lucrări recente [3], [4] s-a arătat că unghiurile φ nu sînt echiva-

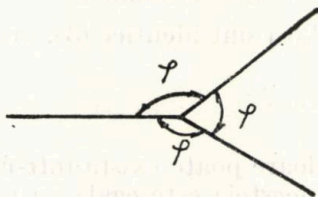


Fig. 1

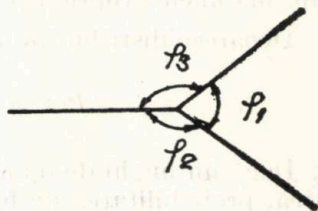


Fig. 2

* Manuscris predat redacției la data de 26 octombrie 1976

lente între ele (fig. 2), satisfăcînd legi de distribuție diferite. Legile integrale [4], în cazul stelelor cu 3 brațe, sînt :

$$P(\varphi_1) = P(\varphi_2) = 3\varphi - 2\varphi^2 + \varphi^3 \quad (3)$$

$$P(\varphi_3) = 3\varphi^2 - 2\varphi^3 \quad (4)$$

Presupunînd intervale unghiulare de 45° (octanți) valorile numerice corespunzătoare formulelor (3) și (4) sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Octant $P(\varphi)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(\varphi_1)$	0,330	0,248	0,178	0,119	0,0725	0,0371	0,0134	0,002
$P(\varphi_2)$	0,330	0,248	0,178	0,119	0,0725	0,0371	0,0134	0,002
$P(\varphi_3)$	0,043	0,113	0,160	0,184	0,184	0,160	0,113	0,043

Cunoașterea expresiilor anterioare nu epuizează problema deoarece la explorarea emulsiilor nucleare se detectează steaua ca atare, adică un ansamblu de unghiuri, nu fiecare unghi în parte. În lucrarea de față urmărim stabilirea unor relații care să permită calcularea probabilității de apariție a fiecărui tip de stea (pentru simplitatea calculelor ne rezumăm la stele cu 3 brațe). Vom adopta următoarea notație : $P(x,y,z)$ reprezintă probabilitatea ca într-o stea primul unghi (φ_1) să se găsească în octantul x , al doilea unghi (φ_2) în octantul y și al treilea unghi (φ_3) în octantul z . $P_i(x)$ exprimă probabilitatea ca unghiul i ($i = 1,2,3$) să fie plasat în octantul x .

Deoarece o stea de tipul (x,y,z) implică distribuții redată prin (3) pentru primele două unghiuri și prin (4) pentru ultimul unghi, se poate scrie :

$$P(x,y,z) = C \cdot P_1(x) \cdot P_2(y) \cdot P_3(z) \quad (5)$$

unde C reprezintă un factor de normare.

Forma funcțiilor integrale de distribuție (3), (4), precum și faptul că valorile x,y,z nu sînt independente (suma tuturor unghiurilor este 360°) imprimă unele proprietăți mărimei $P(x,y,z)$ și anume :

1°. Deoarece distribuțiile $P_1(x)$ și $P_2(y)$ sînt identice (3), urmează că

$$P(x, y, z) = P(y, x, z) \quad (6)$$

2°. Dacă un unghi de o anumită valoare poate exista într-un singur tip de stea, probabilitatea de formare a acesteia este egală cu probabilitatea apariției unghiului considerat. Astfel, dacă există un unghi plasat în octantul 8 (mai mare de 315°), în mod obligatoriu celelalte unghiuri se găsesc în octantul 1 (mai mici de 45°). Atunci, utilizînd datele din tabe-

lul 1, rezultă

$$P(1, 1, 8) = P_3(8) = 0,043$$

$$P(1, 8, 1) = P_2(8) = 0,002$$

$$P(8, 1, 1) = P_1(8) = 0,002$$

3°. Însușind, la un x dat, pentru toate valorile y și z posibile rezultă :

$$\sum_y \sum_z P(x, y, z) = P_1(x) \quad (7)$$

Relația (7), care prezintă forme analoage la însumarea pe celelalte unghiuri, permite determinarea factorului de normare din (5).

Considerentele anterioare sînt suficiente pentru calcularea teoretică a probabilității de formare a diferitelor tipuri de stele. Astfel, dacă primul unghi este plasat în octantul 8, celelalte două unghiuri se găsesc obligatoriu în octantul 1 și atunci

$$P(8, 1, 1) = P_1(8) = 0,002$$

Dacă primul unghi este plasat în octantul 7, tipurile posibile de stele sînt (7, 1, 2), (7, 1, 1), (7, 2, 1)*. Utilizînd datele din tabelul 1 precum și relația de normare (7) urmează

$$P(7, 1, 2) + P(7, 1, 1) + P(7, 2, 1) = P_1(7) = 0,0134$$

Mai departe, conform (5) și ținînd seama de (3) și (4), rezultă (vezi anexa) :

$$P(7, 1, 2) = 0,00804$$

$$P(7, 1, 1) = 0,00305$$

$$P(7, 2, 1) = 0,00232$$

Analog, luînd în considerație și (6), se calculează probabilitățile prezentate în tabelul 2 pentru toate tipurile posibile de stele cu 3 brațe.

În scopul verificării corectitudinii formulelor de calcul stabilite pentru tipurile de stele, s-au comparat rezultatele teoretice cu o distribuție experimentală și cu un set de date generate prin metoda Monte Carlo. Tabelul 3 prezintă probabilitățile de apariție a tipurilor de stele, în coloana 2 calculate teoretic, iar în coloana 3 generate prin metoda Monte Carlo. Coloanele 4 și 5 redau numărul de stele corespunzătoare, normate la 1832, întrucît acesta reprezintă numărul estimat de stele din setul măsurat experimental (coloana 6) la care s-a aplicat corecția pentru dubla explo-

* O discuție detaliată asupra tipurilor de stele care se pot forma în [4].

rare. Gruparea stelelor pe tipuri (coloana 1) s-a făcut independent de ordinea unghiurilor, aceasta fiind neesențială pentru observarea experimentală. În consecință, numărul de tipuri s-a redus de la 64 (tabelul 2) la numai 15.

Tabelul 2

Tip stea	$P(x, y, z)$	Tip stea	$P(x, y, z)$	Tip stea	$P(x, y, z)$	Tip stea	$P(x, y, z)$
8, 1, 1	0,00200	4, 1, 5	0,02601	3, 4, 2	0,00862	2, 7, 1	0,00232
7, 1, 2	0,00804	4, 1, 4	0,02601	3, 5, 2	0,00685	1, 1, 8	0,04300
7, 1, 1	0,00305	4, 2, 4	0,01953	3, 5, 1	0,00261	1, 1, 7	0,03234
7, 2, 1	0,00232	4, 2, 3	0,01698	3, 6, 1	0,00208	1, 2, 7	0,02672
6, 1, 3	0,01434	4, 3, 3	0,01220	2, 1, 7	0,02672	1, 2, 6	0,03784
6, 1, 2	0,01013	4, 3, 2	0,00862	2, 1, 6	0,03784	1, 3, 6	0,02887
6, 2, 2	0,00763	4, 4, 2	0,00573	2, 2, 6	0,02845	1, 3, 5	0,03324
6, 2, 1	0,00291	4, 4, 1	0,00218	2, 2, 5	0,03272	1, 4, 5	0,02601
6, 3, 1	0,00208	4, 5, 1	0,00173	2, 3, 5	0,02497	1, 4, 4	0,02601
5, 1, 4	0,02052	3, 1, 6	0,02887	2, 3, 4	0,02497	1, 5, 4	0,02052
5, 1, 3	0,01784	3, 1, 5	0,03324	2, 4, 4	0,01953	1, 5, 3	0,01784
5, 2, 3	0,01344	3, 2, 5	0,02497	2, 4, 3	0,01698	1, 6, 3	0,01434
5, 2, 2	0,00949	3, 2, 4	0,02497	2, 5, 3	0,01344	1, 6, 2	0,01013
5, 3, 2	0,00685	3, 3, 4	0,01795	2, 5, 2	0,00949	1, 7, 2	0,00804
5, 3, 1	0,00261	3, 3, 3	0,01561	2, 6, 2	0,00763	1, 7, 1	0,00305
5, 4, 1	0,00172	3, 4, 3	0,01220	2, 6, 1	0,00291	1, 8, 1	0,00200

Aplicându-se celor 15 tipuri de stele testul neparametric al semnelor, se constată că între șirul de valori calculate teoretic și cel obținut prin metoda Monte Carlo există un număr de 8 diferențe pozitive (coloana 7, tabelul 3), iar între șirul valorilor experimentale și cel teoretic (coloana 8)

Tabelul 3

Tip stea	$P_1(x) \cdot 10^3$ calculat	$P_1(x) \cdot 10^3$ Monte-Carlo	Nr. stele calculat N_C	Nr. stele Monte-Carlo N_M	Nr. stele experimental N_E	Semn $N_C - N_M$	Semn $N_C - N_E$
1	2	3	4	5	6	7	8
117	38,44	59	69,822	108,088	76	—	+
118	47,00	55	86,104	100,760	89	—	+
126	101,76	93	186,424	170,376	198	+	+
127	74,16	88	135,861	161,216	176	—	+
135	107,38	93	196,720	170,376	171	+	—
136	90,58	104	165,942	190,528	143	—	—
144	54,10	51	99,111	93,432	88	+	+
145	96,53	78	176,843	142,896	151	+	—
225	51,70	51	94,714	93,432	79	+	—
226	43,71	39	80,077	71,448	95	—	+
234	101,14	106	185,288	194,192	170	—	—
235	90,52	96	165,833	175,872	193	—	—
244	44,79	36	82,055	65,952	87	+	+
333	15,61	12	28,597	21,984	29	+	—
334	42,35	39	77,585	71,448	87	+	+
Total	999,87	1000	1830,976	1832,000	1832		

există 8 diferențe negative și 7 diferențe pozitive. Domeniul diferențelor, atât pozitive cât și negative, cu un nivel de risc bilateral de $5 \div 1\%$, prevăzut de testul semnelor este de [3, 12]. Se constată astfel compatibilitatea valorilor calculate teoretic cu cele măsurate experimental sau generate prin metoda Monte Carlo, ceea ce constituie o verificare a corectitudinii relațiilor prezentate în această lucrare.

ANEXA

Exemplu de calcul

Fie stele de tip 7, y , z . Tipurile posibile sînt 7, 1, 2; 7, 1, 1 și 7, 2, 1. Conform (7)

$$P(7, 1, 2) + P(7, 1, 1) + P(7, 2, 1) = P_1(7)$$

Conform (5) și datelor din tabelul 1

$$C[0,0134 \times 0,330 \times 0,113 + 0,0134 \times 0,330 + 0,043 + 0,0134 \times 0,248 \times 0,043] = 0,0134$$

Se obține

$$C = 16,1$$

Rezultă

$$P(7, 1, 2) = 16,1 \times 0,0134 \times 0,330 \times 0,113 = 0,00804$$

$$P(7, 1, 1) = 16,1 \times 0,0134 \times 0,330 + \times 0,043 = 0,00305$$

$$P(7, 2, 1) = 16,1 \times 0,0134 \times 0,248 \times 0,043 = 0,00232$$

Catedra de fizică

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. C. J. Waddington, A Remark on the Detection of Events in Nuclear Emulsion, Suppl. Nuovo Cimento, 19, 37, 1961.
2. G. Lovera, Sulla distribuzione angolare dei raminelle stelle, Nuovo Cimento, 6, 233, 1949.
3. D. Anghelescu, L. Anghelescu, B. Bogdan, A. Dumitrescu, E. M. Friedländer, A. Vogel, Efi-
ciențe de configurație la detecția de stele, Studii și cercetări de Fizică, 23, 499,
1971.
4. D. Anghelescu, Procedee simplificate de testare a uniformității unei distribuții unghiulare,
Studii și cercetări de Fizică, 24, 929, 1972.
5. B. L. Van der Waerden, Mathematische Statistik, Springer-Verlag, Berlin, 1957.

A Way of Calculating the Probability of Formation of Stars with Uncorrelated Prongs.

The calculated formula, in conformity with the distribution of each angle apart, is compatible with the experimental data and the preestablished distribution through the Monte Carlo method.

exists a difference between the positive and negative values of the function $f(x)$ at a point x on an interval I of the real line. The function $f(x)$ is said to be *oscillatory* on I if it is not constant on I . The function $f(x)$ is said to be *monotonic* on I if it is either increasing or decreasing on I . The function $f(x)$ is said to be *bounded* on I if there exists a constant M such that $|f(x)| \leq M$ for all x in I . The function $f(x)$ is said to be *continuous* on I if it is continuous at every point in I .

1/2/71

Consider the function $f(x) = \sin x$ on the interval $I = [0, 2\pi]$. The function $f(x)$ is oscillatory on I because it is not constant on I . The function $f(x)$ is monotonic on I because it is increasing on $[0, \pi/2]$ and decreasing on $[\pi/2, 2\pi]$. The function $f(x)$ is bounded on I because $|\sin x| \leq 1$ for all x in I . The function $f(x)$ is continuous on I because it is continuous at every point in I .

Consider the function $f(x) = \cos x$ on the interval $I = [0, 2\pi]$. The function $f(x)$ is oscillatory on I because it is not constant on I . The function $f(x)$ is monotonic on I because it is decreasing on $[0, \pi]$ and increasing on $[\pi, 2\pi]$. The function $f(x)$ is bounded on I because $|\cos x| \leq 1$ for all x in I . The function $f(x)$ is continuous on I because it is continuous at every point in I .

A way of looking at the probability of formation of a nucleus is to consider the probability of formation of a nucleus as a function of the energy of the system. The energy of the system is a function of the position of the particles in the system. The probability of formation of a nucleus is a function of the energy of the system. The probability of formation of a nucleus is a function of the position of the particles in the system.

C.Z. : 535—8

ASUPRA UNOR DISPOZITIVE OPTOELECTRONICE CU CRISTALE LICHIDE NEMATICE : PROPRIETĂȚI, CARACTERISTICI ȘI APLICAȚII*

E. SOFRON, CORNELIA MOȚOC, P. STERIAN

Un studiu sistematic al relațiilor dintre structura moleculară și proprietățile electrice ale cristalelor lichide a condus recent la descoperirea mai multor efecte electro-optice noi în materiale nematice. În prezenta lucrare, care este o continuare a acestui studiu, sint prezentate rezultatele investigațiilor optice și electrice efectuate simultan pe un dispozitiv optoelectronic realizat cu MBBA (metoxibenziliden-butil-anilină).

1. Aspecte structurale

Studiile sistematice ale relațiilor fizice dintre structura moleculară și proprietățile electrice la cristalele lichide termotrope în general și la cele nematice în special, au făcut posibilă descoperirea mai multor efecte electro-optice noi. În prezenta lucrare a fost examinat compusul mezo-morfic MBBA**, de tip nematic, sub acțiunea directă a cîmpului electric extern.

Proprietățile dielectrice ale substanțelor mezomorfe au constituit subiectul a numeroase investigații experimentale în prezența cîmpurilor electrice și magnetice, care induce o puternică anizotropie a constantei dielectrice. Deși există dovezi clare că anizotropia dielectrică indusă este, de regulă, asociată cu un mare grad de aliniere moleculară în volumul substanței mezomorfe respective, totuși mecanismul molecular precis al procesului de aliniere rămîne încă necunoscut. Din punct de vedere practic, alinierea moleculară în diferite configurații de dispozitive optoelectronice realizate cu cristale lichide nematice, de exemplu cu MBBA (fig. 1), poate fi indusă prin cîmpuri electrice (fig. 2), cîmpuri magnetice (fig. 3) sau prin tratarea prealabilă, în mod convenabil, a suprafețelor interioare ale plăcilor-suport acoperite cu straturi conductoare transparente de SnO_2 (fig. 4), ceea ce constituie baza de plecare pentru multe aplicații tehnologice***.

În cazul substanțelor mezomorfe de tip nematic și de înaltă puritate se poate presupune că alinierea moleculelor în cîmp electric este cauzată numai de anizotropia permitivității dielectrice $\Delta\epsilon$ și a susceptibilității

* Manuscris predat redacției la data de 22 aprilie 1975

** Metoxy — benziliden — butil — anilină

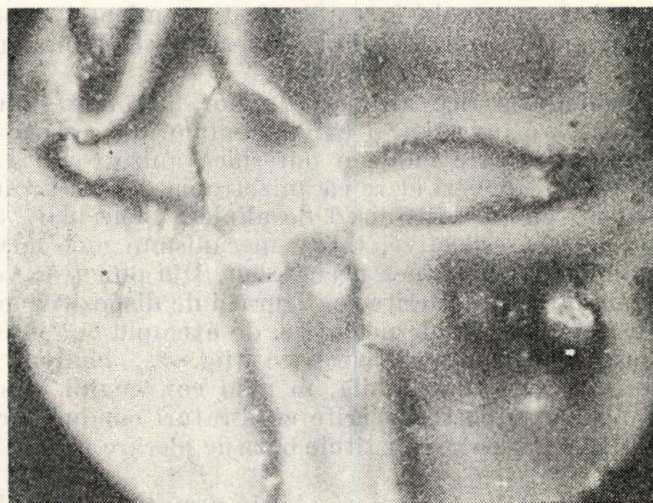
*** Fotografiile din fig. 1—4 au fost realizate în lumină polarizată; mărirea : 70

diamagnetice $\Delta\chi$, care sînt legate prin relația :

$$\Delta\varepsilon \cdot E^2 = 4 \cdot \pi \cdot \Delta\chi \cdot H^2. \quad (1)$$



a)



b)

Fig. 1.—Aspecte morfologice inițiale la un strat subțire de MBBA cu grosimea de $12\ \mu\text{m}$, în cazul netratării prealabile a suprafețelor interioare ale plăcilor suport : a) în absența cîmpului electric extern ; b) imediat după anularea cîmpului magnetic static de

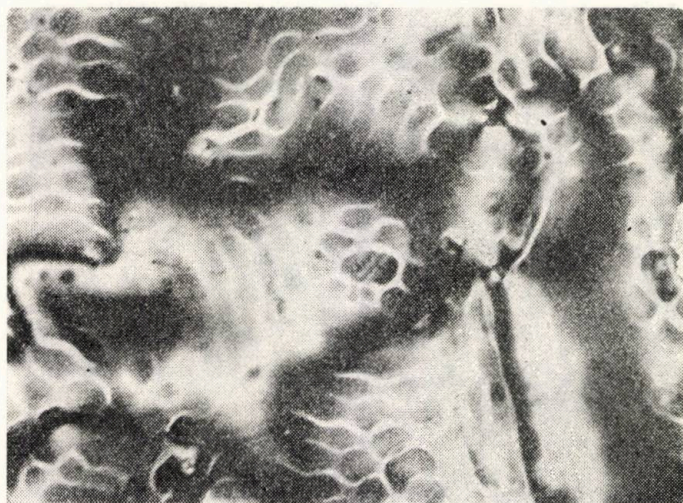
5500 Gs

În cazul substanțelor mezomorfe de tip nematic impurificate controlabil, relația (1) nu se mai verifică și într-o primă aproximație se poate scrie :

$$\varepsilon_0(c + \Delta\varepsilon) \cdot E^2 = \Delta\chi \cdot H^2, \quad (2)$$



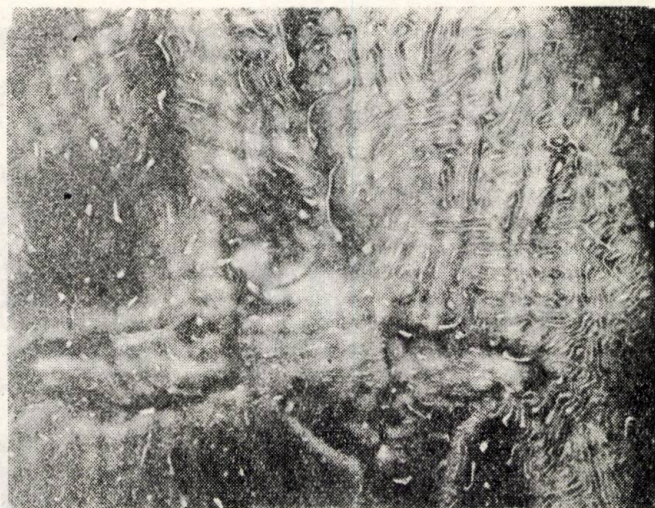
a)



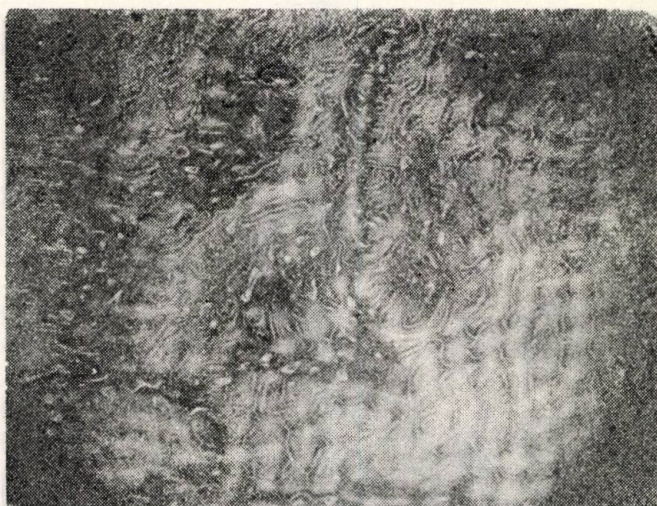
b)

Fig. 2. — Modificări ale aspectului morfologic prezentat în figura 1, a: a) pentru o tensiune de comandă continuă, $U_{CL}^{(c)} = 12 \text{ V}$; b) pentru o tensiune de comandă alternativă, $U_{CL}^{(a)} = 12\text{V}/50\text{Hz}$

unde c reprezintă o constantă care poate fi asociată cu anizotropia conductivității electrice $\Delta\sigma$. Această constantă are valori destul de mici și este neglijabilă la substanțele nematice destul de pure cu rezistivitatea ρ mai mare decât $10^{22} \Omega \text{ m}$.

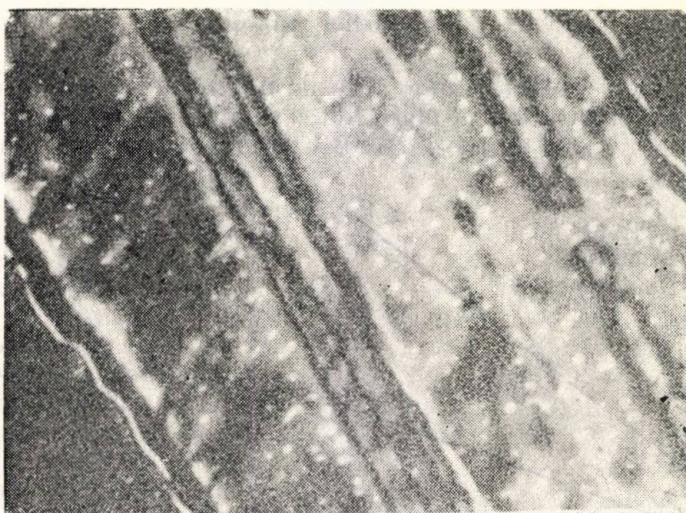


a)

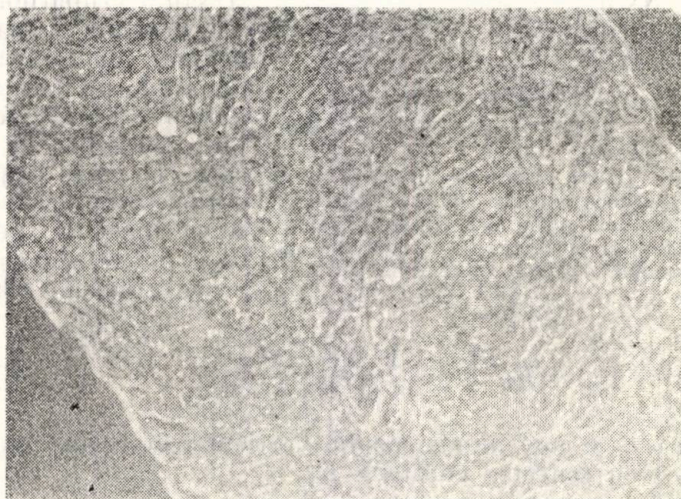


b)

Fig. 3 — Modificări ale aspectului morfologic prezentat în figura 1, b : a) pentru o tensiune de comandă continuă, $U_{CL}^{(-)} = 12 \text{ V}$; b) pentru o tensiune de comandă alternativă, $U_{CL}^{(\sim)} = 12 \text{ V/50 Hz}$



a)



b)

Fig. 4 — Aspecte morfologice la un strat subțire de MBBA cu grosimea de $10\ \mu\text{m}$, în cazul tratării prealabile a suprafețelor interioare ale plăcilor suport : a) în absența câmpului electric extern ;
b) pentru o tensiune de comandă continuă, $U_{CL}^{(-)} = 5\ \text{V}$.

2. Caracteristici funcționale

Dispozitivul optoelectronic folosit de noi în obținerea caracteristicilor funcționale satisface majoritatea condițiilor standard menționate în literatură : stratul subțire de MBBA are grosimea de $12\ \mu\text{m}$; ambele

suprafețe interioare ale plăcilor suport sînt acoperite cu SnO_2 ; comanda electro-optică se face cu tensiune continuă sau alternativă de frecvență joasă.

În figura 5, se prezintă comparativ caracteristicile $I-U$ în curent continuu (1), respectiv în curent alternativ (2) la frecvența de 50 Hz, corelate cu caracteristicile de transmisie optică-tensiune, măsurate simultan, adică exact în aceleași condiții. Atît în curent continuu cît și în curent alternativ se constată existența unei tensiuni caracteristice de prag pentru formarea domeniilor Williams [1] sau a grupărilor ordonate de molecule nematice, care depinde de constantele de material specifice substanței mezomorfe utilizate (de exemplu, MBBA). În cazul în care comanda dispozitivului optoelectronic se face cu tensiune alternativă de frecvență variabilă, tensiunea de prag se poate calcula cu relația :

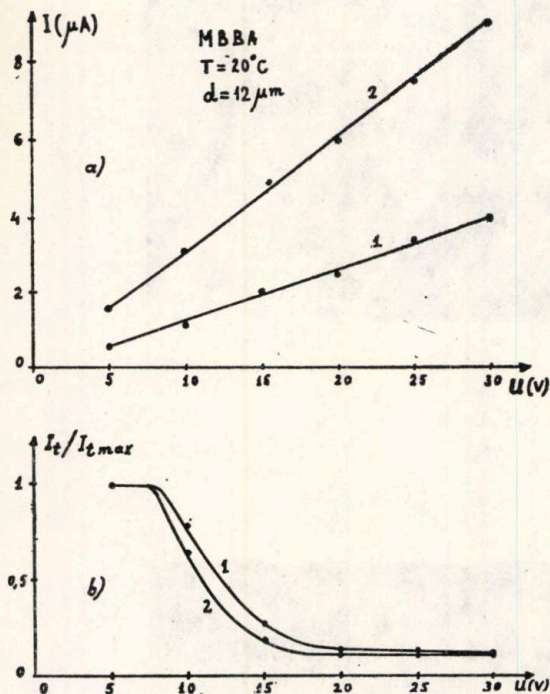


Fig. 5 — Curentul (a) și transmisia optică relativă (b) funcție de tensiunea continuă aplicată (curba 1) și respectiv alternativă (curba 2). I_t reprezintă transmisia optică măsurată în prezența tensiunii și $I_{t,max}$ este valoarea maximă obținută fără tensiune aplicată

$$U_p = U_0 \cdot \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \cdot \tau^2}{\xi^2 - (1 + \omega^2 \cdot \tau^2)}}, \quad (3)$$

care pentru $\omega = 0$ corespunde cazului particular de realizare a comenzii electro-optice cu tensiune continuă [2],

$$U_p = U_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{\xi^2 - 1}}, \quad (4)$$

unde,

$$U_0 = \pi \cdot \sqrt{K_{33} \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon_{\perp}} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \Delta\varepsilon}} \quad (5)$$

și

$$\xi = \sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon_{||}}{\Delta\varepsilon} \cdot \frac{1}{1 + \eta_0 \cdot \eta_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{||}} \cdot \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon_{\perp}}\right)} \quad (6)$$

În relațiile de mai sus, η_0 și η_1 sînt coeficienți de vîscozitate în absența respectiv în prezența cîmpului, $\varepsilon_{||}$ și $\varepsilon_{\perp}$ — permitivitățile dielectrice măsurate în direcție paralelă și perpendiculară față de axa de simetrie moleculară, $\sigma_{||}$ și $\sigma_{\perp}$ — conductivitățile electrice măsurate în același mod, K_{33} — constanta elastică asociată modului de deformare de tip twist și

$$\tau = \frac{\varepsilon_{||} \cdot \varepsilon_0}{\sigma_{||}} \quad (7)$$

reprezintă constanta de timp de relaxare a dielectricului mezomorfic după aplicarea deciziei de anulare a tensiunii electrice.

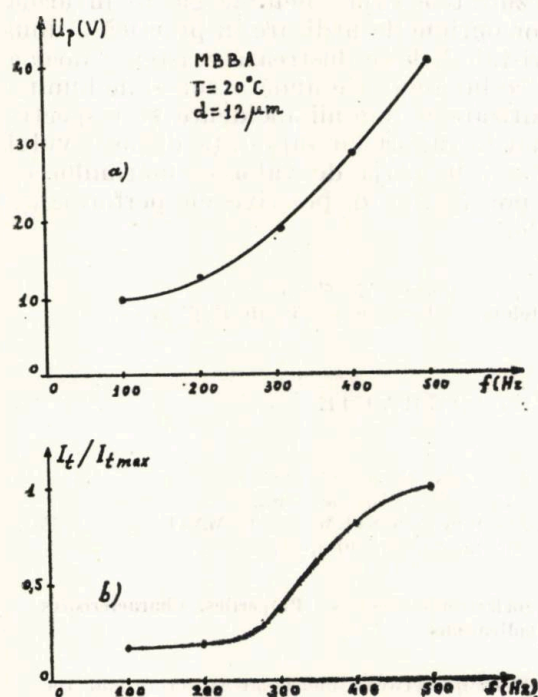


Fig. 6 — Tensiunea de prag (a) și transmisia optică relativă (b) funcție de frecvența semnalului electric de comandă.

În figura 6, se prezintă dependența tensiunii de prag corelată cu transmisia optică funcție de frecvența semnalului electric de comandă aplicat pe dispozitiv. Variația transmisiei optice funcție de frecvența tensiunii electrice de comandă este strîns corelată cu limita de existență a domeniilor Williams. Plecînd de la această constatare fizică se poate deduce ușor expresia frecvenței de tăiere, punînd condiția ca dispozitivul optoelectronic să se comporte în mod similar ca pentru o tensiune de prag infinit de mare,

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad (8)$$

care separă regimul de conducție valabil pentru $\omega < \omega_c$, de regimul dielectric valabil pentru $\omega > \omega_c$. De fapt, frecvența de tăiere se poate con-

unda cu frecvența de relaxare dielectrică a sarcinii electrice spațiale,

$$f_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \quad (9)$$

peste a cărei valoare domeniile Williams nu se mai pot forma. În ultima relație, σ și ε sînt valorile medii ale conductivității electrice și respectiv a permitivității dielectrice.

3. Discuție

Forma caracteristicilor prezentate în figura 5 ne oferă posibilitatea utilizării dispozitivelor optoelectronice cu cristale lichide în tehnica afișării imaginilor și a informațiilor alfa-numerice în mod direct sau prin metoda proiecției holografice. Printre altele, menționăm și posibilitatea de utilizare a cristalelor lichide la convertirea sunetelor în imagini vizibile fără a se recurge la metoda baleierii (folosită în cazul detectorilor piezo-electrici).

Caracteristicile prezentate în figura 6 ne indică posibilitatea realizării mai multor tipuri de dispozitive optoelectronice cum ar fi modulele electro-optice și traductoarele de turație și de vibrație.

Așa cum s-a arătat [3], rezultatele experimentale găsite în urma cercetării amănunțite a condițiilor optime de utilizare în practică a unui anumit sistem electro-optic cu cristale lichide ilustrează existența doar a unei anumite plaje de valori pentru lungimea de undă a sursei de lumină asociate, pentru direcția de polarizare a luminii incidente și respectiv pentru unghiul de incidență format în raport cu suprafața dispozitivului propriu-zis. Prin încadrarea perfectă în plaja de valori a mărimilor ce definesc condițiile de lucru, se pot realiza dispozitive cu performanțe superioare și ușor reproductibile.

Catedra de fizică

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. R. Williams, — The Journal of Chemical Physics, 39, p. 384, 1963
2. L. A. Goodman, — J. Vac. Sci. Technol., 10, p. 809, sept./oct. 1973.
3. E. Sofron, P. Sterian, C. Ionescu, — Prima sesiune de SISTEME AUTOMATE ȘI INFORMAȚIONALE ÎN INDUSTRIE, București, 28–30 aprilie 1975.

On Some Nematic Liquid Crystals Optoelectronic Devices: Properties, Characteristics and Applications

A systematic study of the relationship between molecular structure and the electric properties of liquid crystals has recently led to the discovery of several new electro-optic effects in nematic materials. In the present work, which is a continuation of the study, the results of simultaneous electrical and optical investigations on optoelectronic device prepared with MBBA (methoxy-benzilidene-butylaniline) are presented.

C.Z. : 533.7

METODE DE STABILIRE A ECUAȚIEI BOLTZMANN

LUMINIȚA DANIELLO

Sînt analizate ipotezele de lucru și condițiile de aplicabilitate a ecuației cinetice a gazelor, ecuație ce descrie evoluția unui sistem aflat într-o stare de neechilibru. Deoarece ecuația Boltzmann este dedusă, de obicei, pe baza raționamentelor fizice care deși plauzibile, nu sînt riguros justificate, lucrarea prezintă cîteva metode de stabilire a acestei ecuații în cadrul mecanicii statistice a neechilibrului. De asemenea este analizat raportul existent între ireversibilitatea ecuației Boltzmann și reversibilitatea ecuației Liouville.

Ecuația Boltzmann sau ecuația cinetică a gazelor, descriind evoluția unui sistem aflat într-o stare de neechilibru, servește la studierea fenomenelor de transport. În cele ce urmează ne propunem să prezentăm cîteva metode de stabilire a ecuației Boltzmann.

I. Teoria lui Boltzmann pentru deducerea ecuației cinetice

În lucrările lui Boltzmann [1], deducerea ecuației cinetice se face pe baza utilizării unor considerente fizice asupra sistemului. Postulatele de bază sînt :

(a) un sistem aflat într-o stare de neechilibru tinde totdeauna către starea de echilibru

(b) trecerea sistemului către starea de echilibru se realizează monoton. Gazul studiat se consideră ca fiind format din N molecule monoatomice, identice, de masă m , aflate într-o stare de neechilibru. De asemenea, se presupune că, datorită densității scăzute a gazului, se poate neglija probabilitatea de ciocnire simultană a trei molecule în comparație cu probabilitatea ciocnirilor binare. Starea unui astfel de sistem este descrisă de funcția de distribuție $f^{(N)}(\vec{r}_N, \vec{p}, t)$ a cărei variație în timp este dată de ecuația Liouville. Boltzmann, însă, stabilește ecuația cinetică pentru funcția de distribuție $f^{(1)}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ce caracterizează o singură moleculă, considerînd că probabilitatea de a găsi o moleculă într-o anumită stare este independentă de celelalte molecule și deci cunoașterea funcției de distribuție $f^{(1)}$ ne permite să avem toate informațiile referitoare la sistemul studiat.

* Manuscris predat redacției la data de 18 aprilie 1975

În aceste condiții ecuația cinetică a gazelor se scrie :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{r}} + \vec{X} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ciocnire}} \quad (\text{I.1})$$

unde $\vec{X}$ reprezintă forța exterioară, constantă, ce se aplică gazului iar membrul al doilea indică influența ciocnirilor.

Ecuația (I.1) este o ecuație integro-diferențială, neliniară, ireversibilă la transformarea $t \rightarrow -t$. Spunem că ecuația (I. 1) descrie o comportare ireversibilă în sensul că funcția de distribuție $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ soluție a ecuației Boltzmann, se apropie monoton de funcția de distribuție de echilibru. Acest lucru este dovedit de teorema H care stabilește că expresia $H = - \int f \ln f \, d\vec{v}$ satisface condiția : $\frac{dH}{dt} \leq 0$.

De remarcat că în teoria lui Boltzmann sînt esențiale următoarele ipoteze de lucru :

(α) sistemul poate fi descris printr-o ecuație pentru funcția de distribuție ce caracterizează o singură moleculă,

(β) Termenul de ciocnire se explicitează pe baza unor considerații asupra procesului de ciocnire.

Considerînd prima ipoteză, trebuie să arătăm că în teoria lui Boltzmann nu este clar de ce un sistem de N particule poate fi descris satisfăcător de funcția de distribuție pentru o singură particulă. Acest punct de plecare al teoriei lui Boltzmann și-a găsit justificarea în lucrările lui Bogoliubov, așa cum vom vedea în paragraful II.

Termenul de ciocnire poate fi explicat ținînd seama de numărul de particule care intră și ies din intervalul de viteze $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$, în unitatea de volum și de timp și considerînd ciocnirile care apar ca fiind elastice. Astfel :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ciocnire}} = \iiint f(\vec{r}, \vec{v}', t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) - f(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) |g| b \, db \, d\theta \, d\vec{p}_1$$

unde $\vec{v}$ și $\vec{v}'$ sînt vitezele a două molecule înainte de ciocnire iar $\vec{v}_1$ și $\vec{v}'_1$ vitezele lor după ciocnire.

$\vec{g} = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}}{m}$ și b reprezintă parametrul de ciocnire.

Referitor la ipoteza (β) putem spune că termenul de ciocnire nu este o consecință a legilor dinamicii ci numai o presupunere plauzibilă dar care nu este adevărată întotdeauna.

Asupra teoremei H s-au ridicat obiecții bazate pe faptul că deși ecuațiile mecanicii clasice, ce descriu mișcarea moleculelor, sînt rever-

sibile, funcția H prezintă un fenomen tipic ireversibil. Obiecțiile aduse teoremei H le putem grupa în două categorii, astfel :

(1) Obiecția de reversibilitate a lui Loschmidt care afirmă că dacă $\frac{dH}{dt} \leq 0$ pentru un sistem, atunci pentru sistemul obținut din acesta

prin inversarea vitezelor tuturor moleculelor, ar trebui ca $\frac{dH}{dt} \geq 0$, adică ar trebui să se obțină o succesiune de stări în care H să crească continuu.

(2) Obiecția de „recurență” a lui Zermelo. Argumentele lui Zermelo se bazează pe teorema lui Poincaré care stabilește că orice sistem mecanic închis într-un volum finit se reîntoarce după un timp la starea inițială. În aceste condiții, deoarece gazul realizează o mișcare evasi-periodică, funcția H nu poate prezenta o descreștere permanentă.

Ambele critici expuse ar fi valabile dar numai în cazul în care funcția f , ce intră în definiția lui H , ar fi determinată de legi dinamice. Din punctul de vedere dinamic, ciocnirile determină apariția anumitor corelații între vitezele particulelor ce se ciocnesc, corelații ce distrug starea de mișcare dezordonată a moleculelor și deci într-o astfel de teorie nu este necesară descreșterea funcției H . În realitate, în deducerea teoremei H s-a ținut seama de ecuația Boltzmann care conține ipoteza numărului de ciocniri, ipoteză ce a introdus un element statistic în teorie [2], referitor la mișcarea dezordonată a moleculelor, în absența corelațiilor. Deci teorema H trebuie să fie interpretată numai în sens probabilistic. Ecuația Boltzmann și teorema H descriu comportarea medie a unui număr mare de sisteme identice, comportare ce este ireversibilă. Primul care a avut o înțelegere clară a acestei probleme a fost chiar Boltzmann.

II. Deducerea ecuației cinetice din ecuația Liouville

II.1. Ierarhia B.B.G.K.Y. și ecuația Liouville

Ecuația cinetică este dedusă de obicei pe baza raționamentelor fizice care, deși plauzibile, lasă anumite puncte nelămurite, așa cum am arătat mai înainte. O teorie mai bună din punct de vedere al mecanicii statistice a neechilibrului este teoria B.B.G.K.Y. (Born, Bogoliubov, Green, Kirkwood, Yvon) [3], [4].

Prin această teorie, pornind de la ecuația Liouville, se obține un sistem infinit de ecuații simple cuplate între ele. Ipotezele restrictive sînt : potențialul intermolecular este presupus aditiv, central, de rază de acțiune finită.

Se consideră un sistem de N particule identice descris în spațiul fazelor de densitatea de probabilitate P_N , a cărei evoluție în timp este dată de ecuația Liouville :

$$\frac{\partial P_N}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H_N}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial P_N}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial H_N}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial P_N}{\partial \vec{r}_i} \right) \quad (\text{II.1})$$

unde hamiltoniana H_N este :

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi(r_{ij}) \quad (\text{II.2})$$

cu $\varphi(r_{ij})$ energia potențială de interacțiune între particulele i și j .

În teoria ierarhiei, hamiltoniana H_N este înlocuită cu operatorul $\mathcal{H}_N$ definit de :

$$\mathcal{H}_N(\vec{r}, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta_{ij} \quad (\text{II.3})$$

cu

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \varphi(r_{ji})}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} + \frac{\partial \varphi(r_{ij})}{\partial \vec{r}_j} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j}$$

astfel încît ecuația (II.1) devine :

$$\frac{\delta P_N(x_1, \dots, x_N, t)}{\delta t} = -\mathcal{F}_N P_N(x_1, \dots, x_N, t) \quad (\text{II.4})$$

(am notat ansamblul coordonatelor și impulsurilor $\vec{r}_i, \vec{p}_i$ cu x_i).

Pentru descrierea sistemului presupus sint necesare numai distribuții de ordin inferior definite prin :

$$F_s(x_1, \dots, x_N, t) = V^s \int \dots \int P_N(x_1, \dots, x_N, t) dx_{s+1} \dots dx_N \quad (\text{II.5})$$

În continuare vom înmulți ec. (II.4) cu V și integrăm peste fazele $x_{s+1}, \dots, x_N$. Astfel se obțin ecuațiile integrale cuplate care formează ierarhia B.B.G.K.Y.

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathcal{H}_s F_s = \frac{N-s}{V} \int dx_{s+1} \sum_{i=1}^s \theta_{i,s+1} F_{s+1}(x_1, \dots, x_{s+1}, t) \quad (\text{II.6})$$

Aceste ecuații permit aflarea succesivă a funcțiilor de distribuție F_s , pornind de la ordinul cel mai scăzut. Dacă se consideră sistemul infinit $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ și $\frac{N}{V} = \frac{1}{\varphi} = \text{const.}$ (deci densitatea scăzută), putem

înlocui $\frac{N-s}{V}$ din (II.6) cu $\frac{1}{\varphi}$. Ecuațiile ierarhiei exprimă variația în timp a lui F_s ca o sumă de doi termeni: al doilea termen din stînga ec. (II.6) reprezintă termenul de curent, iar membrul drept termenul de ciocnire.

II.2. Ipotezele teoriei Bogoliubov

Bogoliubov caută soluții speciale ale ierarhiei și anume pe acelea în care pentru $S \geq 2$, F_S depinde de timp prin intermediul lui F_1 . În continuare vom prezenta argumentele care justifică această alegere [5].

Pentru orice sistem se pot defini trei lungimi importante: r_0 — raza de acțiune a forțelor intermoleculare, λ — drumul liber mijlociu și L — dimensiunea incintei. Corespunzător acestor trei lungimi se pot stabili trei timpi caracteristici: τ_0 — durata unei ciocniri, t_0 — durata medie între două ciocniri succesive și t_0 — timpul de traversare a incintei. În concordanță cu cei trei timpi definiți, se deosebesc trei stadii în evoluția în timp a unui gaz nu prea dens.

— a) Starea inițială $0 < t < \tau_0$.

În această stare, fiind dată o distribuție inițială F_N , toate funcțiile de distribuție de ordin inferior F_s se vor modifica foarte repede. În cazul general nu este posibilă descrierea acestui mod de evoluție.

— b) Starea cinetică $\tau_0 < t < t_0$.

Datorită interacției intermoleculare θ_{ij} , un sistem considerat într-o stare arbitrară își schimbă rapid starea după trecerea unui timp $t > \tau_0$. Se constată că în termenul de curent $\mathcal{H}_s F_s$, din ecuațiile ierarhiei, apare termenul de interacție θ_{ij} pentru toate valorile lui S cu excepția lui $S = 1$. θ_{ij} apare însă în termenul de ciocnire, dar valoarea acestuia poate deveni neglijabilă prin scăderea densității gazului.

Astfel, într-un interval de timp de ordinul lui τ_0 , F_1 se modifică foarte puțin, iar funcțiile F_s cu $S \geq 2$ se schimbă mult. Studiul acestor schimbări rapide ar implica studiul mișcării dinamice a moleculelor gazului, dar un astfel de studiu este în afara scopului teoriei statistice a comportării macroscopice a gazului. În consecință, în loc să se urmărească schimbările rapide ale lui F_s pentru $S \geq 2$, într-un timp dinamic, se va studia numai comportarea mediată a lui F_s , într-un interval de timp în care F_1 se schimbă. Cu alte cuvinte, se va modifica scara timpului și aceasta se exprimă matematic prin ipoteza de bază a teoriei Bogoliubov, conform căreia după un timp $t > \tau_0$, toate funcțiile se consideră dependente de timp numai prin dependența lor funcțională de F_1 , adică :

$$F_s(x_1, \dots, x_s, t) \rightarrow F_s(x_1, \dots, x_s | F_1(t))$$

— c) Starea hidrodinamică $t_0 < t < T_0$.

După trecerea unui interval de timp ce depășește timpul între două ciocniri, F_1 și F_s vor depinde de timp prin intermediul a cinci mărimi macroscopice: $n(\vec{r}, t)$ — densitatea locală, $\vec{u}(\vec{r}, t)$ — viteza medie locală, $T(\vec{r}, t)$ — temperatura medie locală. Aceste presupuneri oferă posibilitatea unei simplificări în descrierea sistemului.

Pentru rezolvarea ecuațiilor ierarhiei se utilizează dezvoltarea în serie, după puterile densității, pentru F_s și termenul de curent din ecuația ierarhiei. Identificând coeficienții puterilor egale ale lui $\frac{1}{\varphi}$ din ambii

membri, găsim următoarele ecuații ale ierarhiei, care se decuplează :

$$\begin{aligned}
 D^{(0)}F_s^{(0)}(|F_1\rangle) + \mathcal{H}_s F_s^{(0)}(|F_1\rangle) &= 0 \\
 D^{(0)}F_s^{(1)}(|F_1\rangle) + \mathcal{H}_s F_s^{(1)}(|F_1\rangle) &= -D^{(1)}F_s^{(0)}(|F_1\rangle) + \int dx_{s+1} \sum_{i=1}^s \theta_{i,s+1} F_{s+1}^{(0)}(|F_1\rangle) \\
 D^{(0)}F_s^{(l)}(|F_1\rangle) + \mathcal{H}_s F_s^{(l)}(|F_1\rangle) &= -\sum_{k=1}^l D^{(k)}F_s^{(l-k)} + \int dx_{s+1} \sum_{i=1}^s \theta_{i,s+1} F_{s+1}^{(l-1)}(|F_1\rangle)
 \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

unde operatorii $D^{(l)}$ sînt definiți ca în [5].

Condițiile la limită necesare rezolvării ecuațiilor se introduc cu ajutorul operatorilor de evoluție în timp S , :

— pentru cazul spațial omogen :

$$S_{\infty}^{(s)}(x_1, \dots, x_s) F_s(x_1, \dots, x_s | F_1(t)) = S_{\infty}^{(s)}(x_1, \dots, x_s) \prod_{i=1}^s F_1(x_i, t) \quad (\text{II.8})$$

— pentru cazul spațial neomogen

$$S_{\infty}^{(s)}(x_1, \dots, x_s) F_s(x_1, \dots, x_s | S^{(1)} F_1(t)) = S_{\infty}^{(s)}(x_1, \dots, x_s) \quad (\text{II.9})$$

Aceste condiții la limită asigură comportarea ergodică a soluțiilor ierarhiei B.B.G.K.Y. Calcule laborioase permit aflarea soluțiilor în aceste condiții [4], [5], [6].

Pentru obținerea ecuației Boltzmann și a unei generalizări a ei pentru densități mai mari ale gazului, se folosesc dezvoltările în serie după puterile densității și după puterile unui parametru de uniformitate μ , proporțional cu gradientii. Introducînd aceste dezvoltări în ecuațiile ierarhiei și identificînd coeficienții diferitelor puteri ale lui $\frac{1}{\mu}$, putem regăsi ecuația Boltzmann și generalizarea acesteia pentru ciocniri triple.

II.3. Teoria lui Frieman și Sandri

Frieman și Sandri [7], [8] au formulat o nouă teorie a proceselor ireversibile în gaze, teorie ce contribuie la clasificarea problemei stabilirii ecuației cinetice pe baza ecuației Liouville. În continuare vom prezenta ideile de bază ale acestei teorii și le vom compara cu cele din teoria lui Bogoliubov. Frieman și Sandri își fundamentează teoria, ca și Bogoliubov, pe existența celor trei timpi caracteristici.

$$\varepsilon = \frac{\tau_0}{t_0} = \frac{r_0}{\lambda} = \frac{r_0^3}{v} = nr_0^3 \ll 1 \quad (\text{a})$$

După cum am văzut, în teoria lui Bogoliubov este schimbată scara timpului, astfel încît funcțiile F_s cu $s \geq 2$ depindeau de timp numai prin intermediul lui F_1 , adică :

$$F_s(x_1, \dots, x_s, t) \rightarrow F_s(x_1, \dots, x_s | F_1) \quad (b)$$

Scopul acestei schimbări era acela de a media variațiile rapide ale lui F_s , variații care nu interesează în teoria statistică. Din punctul de vedere matematic, ipoteza (b) reprezintă o metodă de evitare a comportării seculare, adică a creșterii nelimitate în timp la integrarea ecuațiilor ierarhiei.

În teoria lui Frieman și Sandri, ipoteza (a) este încă fundamentală dar în locul ipotezei (b) este folosită o altă metodă pentru a rezolva dificultățile comportării seculare. Metoda constă în introducerea unui număr de variabile de timp, formal independente $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$, ce corespund la diverse scări fizice de timp :

$$\frac{d\tau_n}{dt} = \varepsilon^n; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots \quad (c)$$

ε este un parametru ce caracterizează diferitele scări de timp.

$$F_s = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_s^{(n)} \quad s \geq 2 \quad (d)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A^{(n)} \quad (e)$$

În teoria Frieman Sandri, dezvoltarea (c) este folosită împreună cu dezvoltarea (d) extinsă pentru $s = 1$.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \tau_0} + \varepsilon \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \tau_1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F^{(0)}}{\partial \tau_2} \right) + \dots$$

Utilizarea acestei dezvoltări și a ipotezei (c) constituie diferența principală dintre teoria lui Frieman și Sandri și cea a lui Bogoliubov care folosește ipotezele (b), (d) și (e).

În teoria formulată de Frieman și Sandri, cu ajutorul celor două dezvoltări (c) și (d), se obține o ecuație pentru $F_s^{(n)}$ pînă la diferite ordine în ε . Pentru fiecare ordin se impune absența comportării seculare și această condiție furnizează ecuația cinetică în acel ordin. Dezvoltarea după puterile parametrului ε este asimptotică, adică vor apare divergențe inerente peste un anumit ordin. Atît timp cît dezvoltarea în serie este valabilă, ecuația cinetică însăși garantează absența comportării seculare. Teoria este aplicabilă gazelor neutre cu rază scurtă de acțiune. Pentru obținerea ecuației cinetice nu este necesar, ca în teoria lui Bogoliubov, să presupunem absența totală a corelațiilor dintre molecule și în acest sens teoria lui Frieman și Sandri este mai generală decît a lui Bogoliubov.

Totuși, trebuie să remarcăm că o teorie a gazelor pentru starea de neechilibru, bazată pe ecuația Liouville și pe dezvoltarea după puterile densității, prezintă o dificultate fundamentală și anume apariția divergenței. Această dificultate apare ca urmare a nepotrivirii folosirii unei

dezvoltări după densități, atunci cînd un sistem "many body" se exprimă în funcție de sisteme de două sau trei corpuri.

Pentru creerea unei teorii care să nu prezinte acest inconvenient e necesar :

(a) sau să se pornească de la ecuația Liouville dar să se utilizeze o altă dezvoltare decît cea după densitate

(b) sau să se folosească dezvoltarea după densitate dar să se introducă apoi ipoteze statistice noi, ajungînd chiar să se pornească de la presupuneri de bază independente de ecuația Liouville.

III. Raportul dintre ecuația Boltzmann și ecuația Liouville

În cele ce urmează vom prezenta cîteva aspecte legate de comportarea ireversibilă a ecuației Boltzmann și de cea reversibilă a ecuației Liouville. După cum s-a văzut în paragraful I, funcția H nu crește în timp $\left(\frac{dH}{dt} \leq 0\right)$ și conduce în final, pentru orice distribuție inițială,

la o stare staționară $\left(\frac{dH}{dt} = 0\right)$ corespunzătoare funcției de distribuție

de echilibru. Astfel ecuația Boltzmann reprezintă un proces ireversibil. Pe de altă parte, ecuația Liouville, din care a fost dedusă ecuația Boltzmann, prezintă o comportare reversibilă caracteristică mecanicii. Astfel se ajunge aparent la o contradicție și pentru lămurirea problemei este necesar să răspundem la două întrebări.

— a) În ce sens trebuie înțeleasă reversibilitatea ecuației Liouville ?

— b) Care sînt elementele ce apar în deducerea ecuației Boltzmann din ecuația Liouville și introduc ireversibilitatea ?

După Ehrenfest chiar ecuația Liouville arată o comportare ireversibilă într-un anumit sens și anume :

(i) N fiind foarte mare, durata unui ciclu Poincaré devine enormă, astfel că : pentru valori de timp $t \ll \mathcal{T}$, teorema lui Poincaré nu este observabilă.

(ii) Din cauza imposibilității de a se specifica prin măsurători macroscopice starea inițială a sistemului, descrierea evoluției lui nu se face prin faza inițială și ecuația de mișcare ci prin densitatea de probabilitate a cărei evoluție în timp e dată de ecuația Liouville. Din cele două motive, caracterul reversibil chiar ciclic al evoluției sistemului se pierde, ecuația Liouville descriind deja o comportare ireversibilă în sensul limitat de Ehrenfest. Totuși, chiar dacă se consideră într-un sens limitat, nu se poate spune că ecuația Liouville arată aceeași comportare monoton ireversibilă ca și ecuația Boltzmann. De aceea este necesar să stabilim răspunsul la întrebarea (b). În acest scop vom reaminti ipotezele principale cuprinse în deducerea riguroasă a ecuației Boltzmann din ecuația Liouville.

1) Deducerea ierarhiei B.B.G.K.Y. din ecuația Liouville pentru un sistem presupus infinit.

2) Funcțiile F_s cu $s \geq 2$ prezintă o dependență funcțională de F_1 , prin intermediul căreia depind de timp.

3) S-au postulat condiții la limită speciale pentru $F_s(|F_1)$.

4) S-a folosit o dezvoltare în serie după puterile densității, din care s-au reținut doar primii doi termeni.

Dintre aceste patru ipoteze, doar a doua și a treia par să joace un rol în introducerea ireversibilității. Conform primei ipoteze ne putem aștepta ca ierarhia să reprezinte o comportare analoagă ecuației Liouville, adică reversibilă cu cicluri Poincaré infinite, sau ireversibilă în sensul restrîns al lui Ehrenfest. De asemenea, restricția de densități scăzute, încorporată în ipoteza a patra, nu are consecințe în introducerea ireversibilității. A doua ipoteză selectează pe F_1 ca variabilă seculară; F_1 este definită ca o integrală multiplă și este aceeași în regiuni finite din spațiul fazelor. Acest fapt, introducînd deja elemente ale ireversibilității, este încă insuficient pentru a explica apropierea monotonă de echilibru, în sensul strict cerut de teorema H. Este deci necesar să examinăm ipoteza 3). Condițiile la limită (II. 8) și (II. 9) selectează din toate soluțiile posibile ale ierarhiei pe acelea cu o comportare ergodică. Dacă pentru cazul spațial omogen s-ar formula o nouă condiție la limită, aparent la fel de plauzibilă, de forma :

$$S_{+\infty}^{(s)}(x_1, \dots, x_s) F_s(x_1, \dots, x_s | F_1(t)) = S_+^{(s)}(x_1, \dots, x_s) \prod_{i=1}^s F_1(x_i, t) \quad (\text{III.1})$$

se va obține ecuația Boltzmann în care termenul de ciocnire apare cu semn schimbat. În concluzie, condițiile la limită sînt cele care introduc ireversibilitatea la deducerea ecuației Boltzmann din ecuația Liouville. Condiția (III.1) nu poate fi utilizată deoarece implică existența unor corelații speciale între particule, înainte de ciocnire.

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

B I B L I O G R A F I E

1. L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, J. A. Bath, Leipzig, 1896—98
2. D. ter Haar Elements of Statistical Mechanics, New York, Rinehart (1954)
3. N. N. Bogoliubov Problems of a Dynamical Theory in Statistical Physics College Providence R. I (1959)
4. S. Chapman, T. G. Cowling The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, London, Cambridge University Press (1960)
5. E. G. D. Cohen Physica 27(1961), 28 (1962)
6. S. T. Choh, G. E. Uhlenbeck The Kinetic Theory of Dense Gases (1958)
7. E. A. Frieman J. Math. Phys. 4, 410 (1963)
8. G. Sandri Phys. Rev. Letters 11, 178 (1963)

Méthodes pour établir l'équation Boltzmann

On analyse les hypothèses de travail et les conditions d'applicabilité de l'équation cinétique des gas, équation qui décrit l'évolution d'un système dans un état de non-équilibre. Etant donné que l'équation Boltzmann est d'habitude obtenue par des raisonnements physiques, lesquels, bien que vraisemblables ne sont pas rigoureusement justifiés, nous présentons quelques méthodes d'obtenir cette équation, dans le cadre de la mécanique statistique du nonéquilibre. On analyse aussi la relation existant entre l'irréversibilité de l'équation Boltzmann et la réversibilité de l'équation Liouville.

C.Z.: 550.3

CUTREMURELE DE PĂMÎNT

I.M. POPESCU

Cutremurul de pământ este o mișcare bruscă a scoarței terestre, datorită unui dezechilibru fizic produs în interiorul ei. Acesta apare ca o rezultantă a proceselor geodinamice care deplasează mase litosferice aflate într-o continuă interacțiune. Cutremurul de pământ se manifestă printr-o „descărcare de energie” acumulată la nivelurile unde interacțiunile sînt foarte active, ducînd la distrugerea echilibrelor mecanice între masele litosferice.

Energia (ale cărei origini nu sînt suficient de bine cunoscute) acumulată sub formă de tensiuni elastice este brusc eliberată, în momentul în care este depășită rezistența substanței Pămîntului, și se manifestă sub forma unor unde elastice.

La distanță mare de focar, trenurile de unde, de naturi diferite, se separă. Se deosebesc trei faze principale, denumite: P (unde prime), S (unde secunde) și L (unde lungi). Undele P și S ale căror viteze aparente cresc cu distanța, se propagă prin globul terestru, în timp ce undele L , de viteză constantă, se propagă la suprafața sa. Faza P este constituită din oscilații rectilinii în planul de propagare, faza S din oscilații perpendiculare pe planul de propagare (unde longitudinale și unde transversale), aceste două tipuri de unde fiind unde de volum. Fazei L îi corespund unde de suprafață. Acestea se împart în unde Rayleigh (înregistrate de seismografe pentru componenta verticală), care provoacă o mișcare retrogradă materiei după o traiectorie eliptică cu axa verticală în planul direcției de înaintare și unde Love (înregistrate de seismografe pentru componenta orizontală), care duc la deplasări mai simple, fiind unde transversale care acționează în plan orizontal. În zonele superioare ale scoarței terestre, vitezele undelor seismice variază în gama $2500 - 5000 \text{ ms}^{-1}$.

În general la un cutremur de pământ se deosebesc mișcări orizontale, verticale și de torsiune.

Ținînd seama de cauzele care le produc, cutremurele se împart în tectonice, vulcanice și de prăbușire.

Actualmente există două teorii asupra nașterii cutremurelor de pământ: teoria ricoșării elastice și teoria aplicării brusce a unui sistem de forțe care duc la eliberarea instantanee a tensiunilor acumulate.

Cutremurele de pământ pot fi descrise utilizînd două tipuri de scări: scara bazată pe efectele observate, în cîmp, care conduce la intensitate și scara bazată pe înregistrarea instrumentelor, care dă magnitudinea.

Intensitatea depinde de energia cutremurului de pământ, adâncimea focarului, distanța punctului de observație de sursă, structurile geologice de-a lungul drumului unde, proprietățile terenului la punctul de observație, densitatea populației, facilitățile de raportare, etc. . . și, astfel, variază de la punct la punct. Există 12 grade de intensitate în scară Mercalli-Cancani.

Magnitudinea este considerată ca depinzând de energie și are o valoare pentru fiecare cutremur de pământ. Această caracteristică a fost introdusă de C. F. Richter, în 1935, care a elaborat scara magnitudinilor ce-i poartă numele. Scara Richter permite, pornind de la amplitudinea deplasării solului și energia degajată de cutremur, determinarea magnitudinii seismului într-o manieră obiectivă și absolută, indiferent de manifestările lui într-un loc ori altul. Astfel, accelerația maximă medie a în cm s^{-2} și intensitatea I sint legate prin relația aproximativă :

$$\log a = \frac{I}{3} - \frac{1}{2} \quad (1)$$

Pentru a înlătura discrepanțele dintre magnitudinile definite pe baza diferitelor scări, s-a introdus magnitudinea unificată, m :

$$m = \log \left(\frac{a}{T} \right) + S + Q, \quad (2)$$

unde T este perioada în secunde pentru undele prin Pământ, S este o constantă de valoare mică, depinzând de stația de observație și Q este o constantă care depinde de tipul de undă, de distanța epicentrală și de adâncimea focarului (această constantă se află dată în tabele constituite pe baza datelor experimentale acumulate). Magnitudinile pe scara Richter variază de la 1 la 8,6.

Energia unui cutremur W , în ergi, este dată de

$$\log W = 5,8 + 2,4 m$$

Cu excepția cutremurelor de pământ de mare adâncime și a distrugerilor neuzual de mari, valoarea care rezultă pentru $\log W$ este corectă cu ± 1 .

Din 1896 (de când se folosesc seismografele) până în prezent, cel mai mare cutremur a avut loc în 1906 pe coasta Columbia-Ecuador, avind $m = 8,1 - 8,2$ și $W = 2 \cdot 10^{25}$ ergi.

Anual, numărul de cutremure cu $m \simeq 1$ ($W \simeq 10^8$ ergi) este de ordinul a 10^6 , cel al cutremurilor cu $m \simeq 3,5$ ($\log E = 14$) este de $3 \cdot 10^4$, iar 400 dau distrugeri care nu se iau în seamă, 80 dau distrugeri de considerat, 10 dau distrugeri serioase și 3 dau distrugeri și în aria populației.

Statisticile din ultimii 50 de ani arată că în fiecare an au loc 26 cutremure deosebite (din care 17 au focarul la 0—70 km, 7 la 70—300 km și 2 la 300—700 km în interiorul Pământului).

Catedra de fizică

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”

București

Tremblement de terre

On présente les grandeurs caractéristiques d'un tremblement de terre pour information.

C.Z. : 537.313
621.3.012.8

ECUAȚIILE DE STARE ALE CIRCUITELOR ACTIVE CU ELEMENTE ÎN EXCES*

M. PREDA, N. NICOARĂ, IOANA DOROBANȚU

În lucrare se stabilesc relații pentru calculul coeficienților ecuațiilor de stare ale circuitelor cu bucle active de condensatoare și secțiuni active de bobine, fără cuplaje magnetice.

În aceste relații sunt utilizate transmitanțe calculate într-un circuit mai simplu, derivat din circuitul dat.

În lucrare se prezintă o metodă de obținere a ecuațiilor de stare ale circuitelor conținând bucle separabile de condensatoare și surse ideale de tensiune și secțiuni separabile de bobine și surse ideale de curent.

Se știe că la astfel de circuite scrierea ecuațiilor de stare este relativ laborioasă [3]. La aceste circuite nu toate tensiunile la bornele condensatoarelor, respectiv curenții prin bobine sînt mărimi de stare independente, între ele existînd un număr de relații impuse de teorema a doua, respectiv de prima teoremă a lui Kirchhoff.

Din punct de vedere topologic, este avantajos [2] să se includă în arborele rețelei laturile capacitive, iar laturile inductive să aparțină coarborelui. Laturile capacitive, ramuri, vor determina secțiunile fundamentale, iar laturile inductive, coarde, vor determina buclele fundamentale ale rețelei. În fiecare buclă (b_h) de condensatoare, respectiv secțiune (s_h) de bobine, apare cîte un condensator C_{a_h} ce nu aparține arborelui, respectiv cîte o bobină L_{a_h} ce nu aparține coarborelui, elementele în exces ale circuitului. Tensiunile la borne, respectiv curenții corespunzători acestor elemente, se pot exprima pe baza teoremei a doua, respectiv primei teoreme a lui Kirchhoff în funcție de tensiunile la bornele celorlalte condensatoare din buclă, respectiv de curenții celorlalte bobine ale secțiunii. De aceea aceste elemente pot fi denumite elemente dependente, iar restul elementelor elemente independente.

Sistemul de secțiuni fundamentale poate fi ales astfel încît secțiunile (S_{c_k}) ce taie ramurile capacitive C_k aparținînd unei bucle de condensatoare (b_h) să taie toate condensatorul C_k (fig. 1a). Similar, se pot alege buclele (b_{L_k}) determinate de coardele inductive L_k aparținînd unei secțiuni de bobine (s_h) astfel încît toate să conțină latura L_{a_h} (fig. 1b).

Pe de altă parte, condensatoarele și bobinele pot fi înlocuite cu surse ideale de tensiune, respectiv de curent, avînd același tensiuni la borne, respectiv aceiași curenți, ca și elementele înlocuite (fig. 2a, 2b). Îndepăr-

* Manuscris predat redacției la data de 3 octombrie 1976

tind, așa cum se indică în fig. 3a, 3b, sursele corespunzătoare elementelor în exces C_{dh} , L_{dh} , tensiunile și curenții laturilor din exteriorul buclelor și secțiunilor respective nu se modifică. În buclele de condensatoare teorema a doua a lui Kirchhoff continuă să fie verificată; la fel teorema întâia a lui Kirchhoff în secțiunile de bobine.

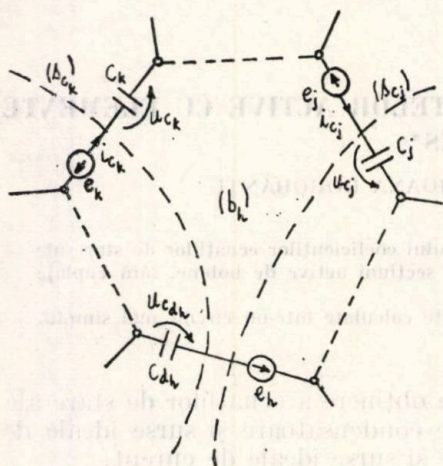


Fig. 1a.

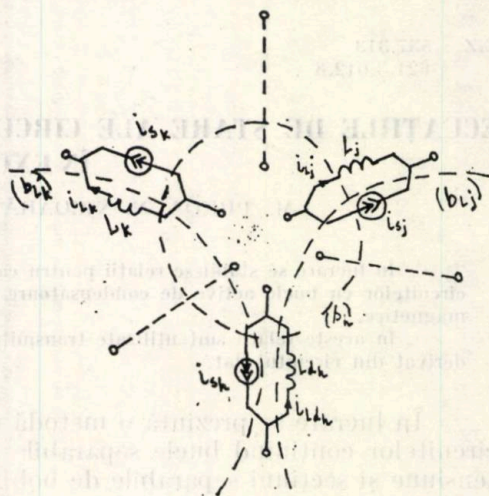


Fig. 1b.

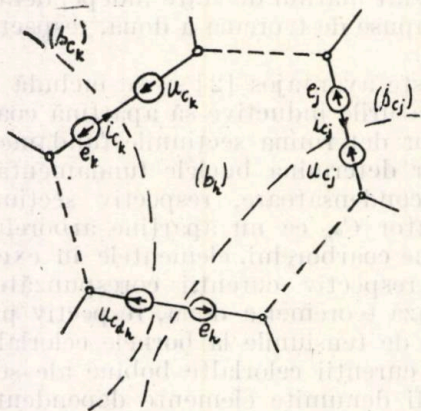


Fig. 2a.

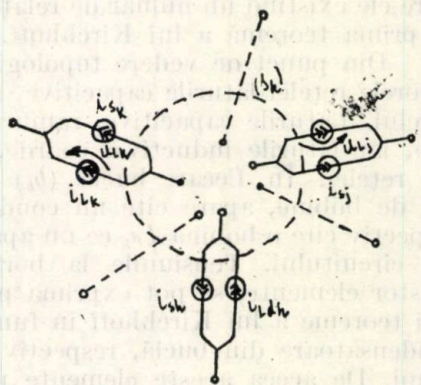


Fig. 2b-

1. — Ecuatiile de stare corespunzătoare condensatoarelor din buclele active de condensatoare

Întrucât curenții din laturile exterioare buclei de condensatoare rămân aceiași, din teorema întâia a lui Kirchhoff aplicată secțiunii fundamentale (s_{ck}), corespunzătoare condensatorului independent C_k , rezultă

$$C_k \frac{dU_{ck}}{dt} + C_{dh} \frac{dU_{cdh}}{dt} = i_{ck} \quad (1)$$

unde, așa cum rezultă din fig. 3a, cu iec_k s-au notat curenții din laturile corespunzătoare condensatoarelor C_k , după înlăturarea laturii condensatorului dependent C_{d_h} .

Ținînd seama de modul cum au fost alese sensurile de referință pentru tensiunile la bornele condensatoarelor din bucla (b_h), se poate scrie

$$U_{C_{d_h}} = \sum_{C_j \in (b_h)} U_{C_j} + \sum_{e_j \in (b_h)} \varepsilon_j e_j \quad (2)$$

unde $\varepsilon_j = \pm 1$ sînt coeficienții de semn, depinzînd de sensul surselor e_j în raport cu cel al tensiunii $U_{C_{d_h}}$, iar sumele includ toate elementele buclei (b_h).

Înlocuind (2) în (1),

$$C_k \frac{dU_{C_k}}{dt} + C_{d_h} \frac{d}{dt} \left(\sum_{C_j \in (b_h)} U_{C_j} \right) = iec_k - C_{d_h} \frac{d}{dt} \left(\sum_{e_j \in (b_h)} \varepsilon_j e_j \right) \quad (3)$$

Notînd cu $n + 1$ numărul total de condensatoare din bucla (b_h), n dintre acestea sînt condensatoare independente și pentru fiecare se obține, o ecuație de forma (3). Sistemul de n ecuații se scrie matriceal:

$$\begin{bmatrix} C_1 + C_{d_h} & C_{d_h} & \dots & C_{d_h} \\ C_{d_h} & C_2 + C_{d_h} & \dots & C_{d_h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{d_h} & C_{d_h} & \dots & C_n + C_{d_h} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \\ \vdots \\ U_{C_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iec_1 \\ iec_2 \\ \vdots \\ iec_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \varepsilon_{d_h} \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \varepsilon_{d_h} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \varepsilon_{d_h} \end{bmatrix} C_{d_h} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{d_h} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sistemul (4) se rezolvă în raport cu derivatele tensiunilor de bornele condensatoarelor independente. Folosind notații restrînse, sistemul matriceal obținut se poate scrie

$$\frac{d}{dt} [U_{C_{(b_h)}}] = \frac{1}{\Delta_{(b_h)}} [D_{(b_h)}] \left([ie_{C_{(b_h)}}] - [\varepsilon_{(b_h)}] C_{d_h} \frac{d}{dt} [e_{(b_h)}] \right) \quad (5)$$

Datorită formei particulare a matricei coeficienților sistemului (4), atît determinantul $\Delta_{(b_h)}$ al acesteia, cît și matricea $[D_{(b_h)}]$, avînd ca elemente complementii algebrici ai aceluiași determinant, cu expresii simple.

Determinantul $\Delta(b_h)$ este egal cu suma produselor tuturor combinațiilor posibile de n factori constituiți din cele $n + 1$ condensatoare ale buclei :

$$\Delta b_h = \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in C_{n+1}^n (C_1, C_2, \dots, C_n, C_{d_h})} C_{\gamma_1} C_{\gamma_2} \dots C_{\gamma_n} \quad (6)$$

Complementii algebrici $D_{\alpha\beta}$ ai aceluiași determinant au valorile

$$D_{\alpha\beta} = - C_1 \cdot C_2 \dots C_{\alpha-1} \cdot C_{\alpha+1} \dots C_{\beta-1} C_{\beta+1} \dots C_n C_{d_h} \quad (7)$$

pentru $\alpha = \beta$ și

$$D_{\alpha\alpha} = \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}) \in C_n^{n-1} (C_1, C_2, \dots, C_{\alpha-1}, C_{\alpha+1}, \dots, C_n, C_{d_h})} \quad (8)$$

pentru $\alpha \neq \beta$.

Pe de altă parte, curenții $i_{e_{C_k}}$ se calculează din circuitul cu elementele în exces eliminate și surse ideale în locul elementelor independente din fig. 3a, 3b :

$$i_{e_{C_k}} = \sum_{C_j \in (C_i)} T_{C_k C_j} (U_{C_j} + \varepsilon_j e_j) + \sum_{L_j \in (L_i)} T_{C_k L_j} (i_{L_j} + \varepsilon_{s_j} \cdot i_{s_j}) + \sum_{(e_m)} T_{C_k e_m} e_m + \sum_{(i_{s_q})} T_{C_k i_{s_q}} i_{s_q} \quad (9)$$

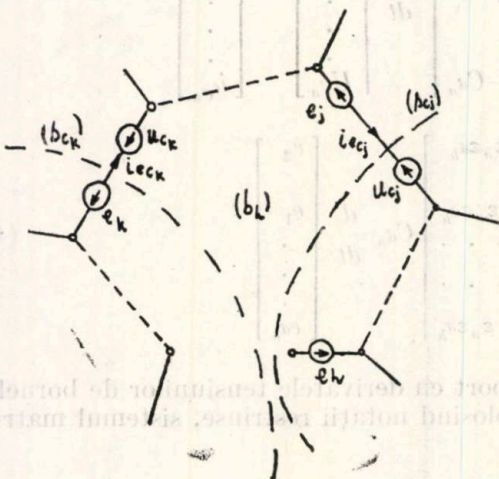


Fig. 3a.

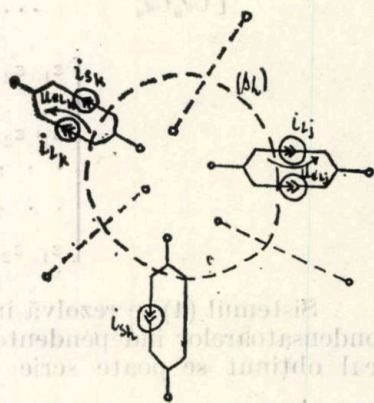


Fig. 3b.

unde (C_i) , (L_i) , reprezintă mulțimea tuturor condensatoarelor independente, respectiv mulțimea tuturor bobinelor independente din rețea, iar (e_m) și (i_{s_q}) mulțimea surselor de tensiune, respectiv de curent din laturile ce nu aparțin buclelor de condensatoare sau secțiunilor de bobine. $T_{C_k C_j}$,

etc., sint transmitanțele din circuitul cu surse echivalente din fig. 3a, 3b. Sumele se efectuează pentru elementele aceluiași circuit. S-au notat cu $\varepsilon_{sj} = \pm 1$ coeficienții de semn pentru sursele de curent din secțiunile de bobine; valoarea lor este funcție de sensul surselor de curent.

Dacă se introduce (9) în (5), atunci, cu notații evidente, se poate scrie :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [U_{C(b_h)}] = \frac{1}{\Delta_{(b_h)}} [D_{(b_h)}] \left\{ [T_{(b_h)p}] \left(\left[\frac{[U_{C_i}]}{[i_{L_i}]} \right] + \left[\frac{[\varepsilon_i e_i]}{[\varepsilon_{sj} i_{sj}]} \right] \right) + \right. \\ \left. + [T_{(b_h)s}] \left[\frac{[e_m]}{[i_{s_q}]} \right] - [\varepsilon_{(b_h)}] C_{d_h} \frac{d}{dt} [e_{(b_h)}] \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

Grupind împreună toți termenii în care apar surse de tensiune sau curent, relația (9) se mai poate scrie :

$$i_{c_k} = \sum_{c_j \in (C_i)} T_{c_k c_j} U_{c_j} + \sum_{L_j \in (L_i)} T_{c_k L_j} i_{L_j} + \sum_{e_f \in (e)} T_{c_k e_f} e_f + \sum_{i_{s_g} \in (i_s)} T_{c_k i_{s_g}} \cdot i_{s_g} \quad (9')$$

unde s-au notat cu (e), (i_s) mulțimea tuturor surselor de tensiune, respectiv de curent din rețea.

Se introduce acum (9') în (5) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [U_{C(b_h)}] = \frac{1}{\Delta_{(b_h)}} [D_{(b_h)}] \left\{ [T_{(b_h)p}] \left[\frac{[U_{C_i}]}{[i_{L_i}]} \right] + [T_{(b_h)a}] \left[\frac{[e]}{[i_s]} \right] \right. \\ \left. - [\varepsilon_{(b_h)}] C_{d_h} \frac{d}{dt} [e_{(b_h)}] \right\} \quad (10') \end{aligned}$$

Relațiile matriciale (10'), (10') exprimă două forme ale ecuațiilor de stare corespunzătoare condensatoarelor din bucla de condensatoare (b_h).

2. Relațiile de stare corespunzătoare bobinelor din secțiunile active de bobine

Întrucît tensiunile la bornele laturilor exterioare secțiunii de bobine rămîn aceleași, din teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată buclei fundamentale (b_{L_k}), corespunzătoare bobinei independente L_k , rezultă

$$L_k \frac{di_{L_k}}{dt} + L_{d_h} \frac{di_{L_{d_h}}}{dt} = U_{e_{L_k}} \quad (11)$$

unde, așa cum rezultă din fig. 3b, cu $u_{e_{L_k}}$ s-au notat tensiunile la bornele laturilor corespunzătoare bobinelor L_k , după înlăturarea sursei de curent corespunzătoare bobinei dependente L_{d_h} .

Ținînd seama de alegerea sensurilor de referință pentru curenții din bobinele aparținînd secțiunii (s_h), se poate scrie

$$i_{L_{d_h}} = \sum_{L_j \in (s_h)} i_{L_j} + \sum_{i_{s_j} \in (s_h)} \varepsilon_{s_j} \cdot i_{s_j} \quad (12)$$

unde sumele se efectuează pentru toate elementele aparținând secțiunii (s_h).

În continuare se obțin relații duale relațiilor (3)–(9), obținute mai sus pentru derivatele tensiunilor condensatoarelor dintr-o buclă de condensatoare.

Relațiile matriceale ce exprimă ecuațiile de stare corespunzătoare bobinelor din secțiunea de bobine (s_h) vor fi deci de forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [i_{L(s_h)}] = \frac{1}{\Delta(s_h)} [D(s_h)] \left\{ [T(s_h)p] \left(\left[\frac{[U_{C_i}]}{[i_{L_i}]} \right] + \left[\frac{[\varepsilon_i e_i]}{[\varepsilon_{s_i} \cdot i_{s_i}]} \right] \right) + \right. \\ \left. + [T(s_h)s] \left[\frac{[e_m]}{[i_{s_q}]} \right] - [\varepsilon_{S(s_h)}] L_{(s_h)} \frac{d}{dt} [i_{S(s_h)}] \right\} \quad (13), \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [i_{L(s_h)}] = \frac{1}{\Delta(s_h)} [D(s_h)] \left\{ [T(s_h)p] \left[\frac{[U_{C_i}]}{[i_{L_i}]} \right] + [T(s_h)a] \left[\frac{[e]}{[i_s]} \right] - \right. \\ \left. - [\varepsilon_{S(s_h)}] L_{(s_h)} \frac{d}{dt} [i_{S(s_h)}] \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

Aplicație

Se consideră circuitul din figura 4, în care apar bucla activă de condensatoare C_6, C_7, C_8 și secțiunea activă de bobine L_1, L_2, L_3, L_4 . Se alege ca elemente dependente bobina L_3 și condensatorul C_6 .

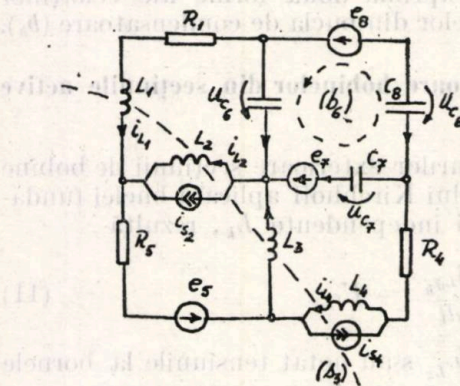


Fig. 4.

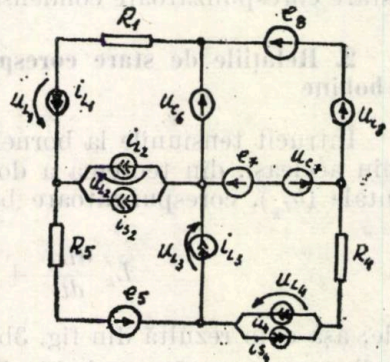


Fig. 5.

Se înlocuiesc condensatoarele și bobinele cu surse ideale de tensiune, respectiv curent (fig. 5). Sursele elementelor dependente se îndepărtează, obținând circuitul din fig. 6, în care se calculează transmitanțele ce intervin în ecuațiile de stare.

Ecuatiile de stare corespunzătoare tensiunilor la bornele condensatoarelor independente C_7, C_8 sînt de forma :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{C_7} \\ U_{C_8} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_{(b_6)}} [D_{(b_6)}] \left\{ \begin{bmatrix} T_{C_7 C_7} & T_{C_7 C_8} \\ T_{C_8 C_7} & T_{C_8 C_8} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} U_{C_7} \\ U_{C_8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_7 & e_7 \\ \varepsilon_8 & e_8 \end{bmatrix} \right) + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} T_{C_7 L_1} & T_{C_7 L_2} & T_{C_7 L_4} \\ T_{C_8 L_1} & T_{C_8 L_2} & T_{C_8 L_4} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_{L_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{S_2} i_{S_2} \\ \varepsilon_{S_4} i_{S_4} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} T_{C_7 e_5} \\ T_{C_8 e_5} \end{bmatrix} [e_5] - \begin{bmatrix} \varepsilon_7 & \varepsilon_8 \\ \varepsilon_7 & \varepsilon_8 \end{bmatrix} C_6 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_7 \\ e_8 \end{bmatrix} \right\} \quad (1)$$

unde, așa cum s-a arătat

$$\Delta_{(b_6)} = C_6 C_7 + C_7 C_8 + C_8 C_6 \quad (2),$$

$$[D_{(b_6)}] = \begin{bmatrix} C_6 + C_8 & -C_6 \\ -C_6 & C_7 + C_8 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Coeficienții de semn $\varepsilon_7 = -1$, $\varepsilon_8 = 1$, $\varepsilon_{S_2} = 1$, $\varepsilon_{S_4} = -1$.

Ecuatiile de stare corespunzătoare curenților bobinelor independente sînt de forma.

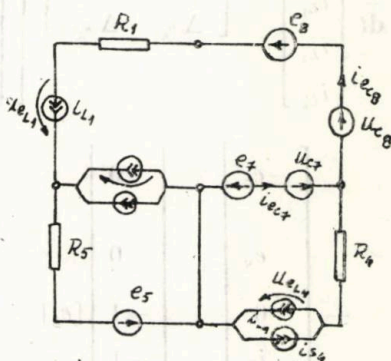


Fig. 6.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_{L_4} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{\Delta_{(s_3)}} \right] \left\{ \begin{bmatrix} T_{L_1 C_7} & T_{L_1 C_8} \\ T_{L_2 C_7} & T_{L_2 C_8} \\ T_{L_4 C_7} & T_{L_4 C_8} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} U_{C_7} \\ U_{C_8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_7 & e_7 \\ \varepsilon_8 & e_8 \end{bmatrix} \right) + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} T_{L_1 L_1} & T_{L_1 L_2} & T_{L_1 L_4} \\ T_{L_2 L_1} & T_{L_2 L_2} & T_{L_2 L_4} \\ T_{L_4 L_1} & T_{L_4 L_2} & T_{L_4 L_4} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_{L_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{S_2} i_{S_2} \\ \varepsilon_{S_4} i_{S_4} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} T_{L_1 e_5} \\ T_{L_2 e_5} \\ T_{L_4 e_5} \end{bmatrix} [e_5] - \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{S_2} & \varepsilon_{S_4} \\ 0 & \varepsilon_{S_2} & \varepsilon_{S_4} \\ 0 & \varepsilon_{S_2} & \varepsilon_{S_4} \end{bmatrix} L_6 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ i_{S_2} \\ i_{S_4} \end{bmatrix} \right\} \quad (4),$$

$$\Delta_{(s_3)} = L_1 L_2 L_3 + L_1 L_2 L_4 + L_1 L_3 L_4 + L_2 L_3 L_4 \quad (4),$$

$$[D_{(s_3)}] = \begin{bmatrix} L_2 L_3 + L_3 L_4 + L_2 L_4 & -L_3 L_4 & -L_2 L_3 \\ -L_3 L_4 & L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_3 L_4 & -L_1 L_3 \\ -L_2 L_3 & -L_1 L_3 & L_1 L_3 + L_2 L_3 + L_1 L_3 \end{bmatrix}$$

Dacă se efectuează calculul transmitanțelor și se reunesc sistemele (1) și (4), se obține sistemul matriceal de ecuații de stare căutat :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C_7} \\ u_{C_8} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_{L_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_{(b_6)}] & [D_{(s_3)}] \\ \Delta_{(b_6)} & \Delta_{(s_3)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -R_1 - R_5 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & -R_5 & -R_5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_7} \\ u_{C_8} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ i_{L_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e_7 \\ e_8 \\ 0 \\ i_{S_2} \\ -i_{S_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [e_5] - \begin{bmatrix} C_6 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & L_6 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_7 \\ e_8 \\ 0 \\ i_{S_2} \\ i_{S_4} \end{bmatrix} \right\}$$

Catedra de electrotehnică II
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. M. Preda, Ioana Breazu, N. Nicoară — Ecuațiile de stare ale circuitelor cu bucle de condensatoare și secțiuni de bobine. Rev. Electrotehnică nr. 7, 1972.
2. J. Meisel State Equations of Electrical Networks from a Lagrangian Formulation. Trans. I.E.E.E. Vol. CT-16, May 1969.
3. A. L. Zadeh, C. A. Desoer — Linear Systems Theory. The State Space Approach. N. V., Mc Graw Hill, 1963.
4. M. A. Tapia — Use of Superposition in Writing State Equations for Networks with Excess Elements. Trans. I.E.E.E. Vol. CT-17, November 1970.

State Equations for Active Circuits with Excess Elements

The paper presents some relations for the computation of the state equations coefficients of circuits having active capacitor loops and active coil cutsets, without magnetic couplings.

These relations use transadmittances calculated for a simpler circuit, derived from the one given.

C.Z. : 621.372.4
517.533.4

A METHOD OF COMPUTING THE DERIVATIVE OF SAME FUNCTIONS DESCRIBING NONLINEAR ELECTRIC PHENOMENA

M. IORDACHE, V. SOCACIU

The paper brings forth a direct method, not based on interpolation, of computing the derivative of a large class of function frequently met in the study of electric circuits.

The efficiency of the method lies in the simplicity of the algorithm used and in its high accuracy.

1. Introduction

A large class of electrical phenomena are described by functions characterized by the following properties :

- 1) $f : [a, b] \rightarrow R$, where $a, b \in R$ and f is of class $C^2_{[a, b]}$;
- 2) $f' \geq 0$ on $[a, b]$;
- 3) f'' keeps constant sign on $[a, b]$.

The plots configurations of these functions are given in figure 1, a for case $f'' > 0$ and in figure 1, b for the case $f'' < 0$, respectively. Among the phenomena the evolution of which is the presented from we can enumerate :

- the variation of state quantities (capacitor voltages and inductor currents) versus time, in transitory processes ;
- the variation of input and output quantities of a transistor (the collector voltage versus intensity and the emitter voltage versus intensity, respectively) ;
- the variation of inductor flux linkages with an iron core versus intensity, of the electric charge on the capacitor plates versus voltage and of the voltage at the terminals of resistor versus intensity, respectively.

For the formulation state equations in a nonlinear transient network [1], the calculus of dynamic inductances and capacities is necessary when the relations between $\Phi - i$, respectiv $q - u$, are given by tabular values.

The problem that now arises is the following : a certain function being specified by tabular values for a set of points we have to determine

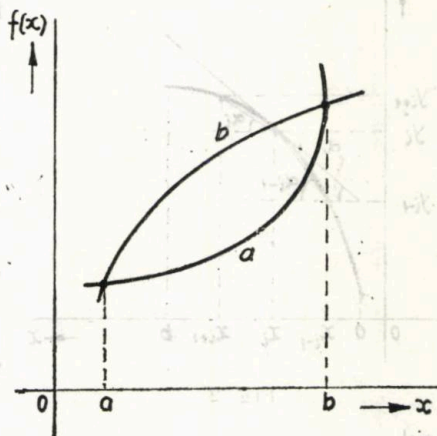


Fig 1.

the derivatives at these points. The difficulty consists in the fact that in order to determine the derivative values at a given point one must know the function values in the neighbourhood of that point, [2-8].

This is impossible in the case of experimental measurement when the function values may be found out at a finite number of points at the most. That is why the method applied as a rule is the interpolation of the function with an analytic expression in the neighbourhood of the considered point and the derivative computation by means of this expression.

The obvious drawback of this method is the diminuation of the accuracy because of the interpolation errors.

The method here presented eliminates the necessity of any interpolation providing a direct proceeding for the computation of derivate when the function values at the mesh points are given.

2. Procedure

Let f be a real function having properties 1), 2), 3). We shall assume $f'' < 0$ (case $f'' > 0$ is perfectly similar). Let $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ a mesh with equidistant points of the interval $[a, b]$ and $y_0, y_1, \dots, y_n$, respectively, the values of function f experimentally determined at the mesh points. We note with $h = x_{i+1} - x_i$, $0 \leq i \leq n-1$ the spacing of the considered mesh.

Let

$$\alpha_{i-1} = \arctg \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \text{ și } \alpha_i = \arctg \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad (1)$$

$1 \leq i \leq n-1$ be (figure 2).

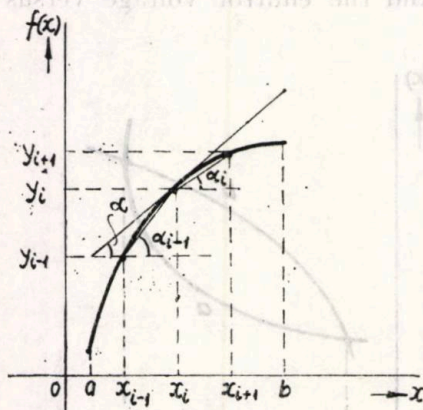


Fig. 2.

and

In order to calculate the derivate we consider the following approximative formula :

$$f'(x_i) = f'_i \approx \frac{\alpha_{i-1} - \alpha_i}{2} = y'_i, \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (2)$$

Taking into account that :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1}}{2} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h + \sqrt{h^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} \quad (3a)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h + \sqrt{h^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad (3b)$$

the following expression for y'_i yields :

$$y'_i = \frac{(y_i - y_{i-1})[h + \sqrt{h^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}] + (y_{i+1} - y_i)[h + \sqrt{h^2 + (y_i - y_{i-1})^2}]}{[h + \sqrt{h^2 + (y_i - y_{i-1})^2}][h + \sqrt{h^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}] - (y_i - y_{i-1})(y_{i+1} - y_i)},$$

$$1 \leq i \leq n-1. \quad (4)$$

Therefore for the derivative calculus the function values must be known in three successive points.

3. Error estimation

The error committed when using formula (4) is made up of the error due to the approximation (2) and the error due to the inaccuracy of the experimental measurements.

Let $f_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$ be. We note $\varepsilon = \max \{|f_i - y_i|, 0 \leq i \leq n\}$. Let y'_{ir} be the value of the derivative at point x_i calculated while supposing the values y to be accurate. Then the overall error is :

$$|f'_i - y'_{ir}| = |f'_i - y'_i + y'_i - y'_{ir}| \leq |f'_i - y'_i| + |y'_i - y'_{ir}|. \quad (5)$$

We evaluate in turn the 2 terms of the right member of the inequality (5). We note $\alpha(x) = \arctg f'(x)$. Since f is of class $C^2_{[a, b]}$ the derivative $f'(x)$ is continuous on a compact interval, therefore bounded. As a particular case $f'(a) < \infty$ hence $\alpha(a) < \frac{\pi}{2}$. On the other hand from condition $f'' < 0$ it results that function $f'(x)$ is strictly decreasing on $[a, b]$. We note $M_1 = f'(a) = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. It results :

$$(\forall) x \in [a, b] \quad 0 \leq f'(x) \leq M_1 \Rightarrow 0 \leq \alpha(x) \leq \arctg M_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

a) We make the calculus of the difference $|f'_i - y'_i|$.

$$|f'_i - y'_i| = \left| \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| = \left| \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right) \right| \left| 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| \leq$$

$$\leq \operatorname{tg} \left| \alpha - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| \left| 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right|.$$

One can easily verify $\alpha_i < \arctg f'_i$ $(\forall) 1 \leq i \leq n-1$. Then :

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| \leq M_1. \quad (7)$$

Therefore :

$$\left| 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| \leq 1 + |\operatorname{tg} \alpha| \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| \leq 1 + M_1^2. \quad (8)$$

It results that :

$$|f'_i - y'_i| \leq (1 + M_1^2) \operatorname{tg} \left| \alpha - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right|. \quad (9)$$

On the other hand

$$\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right). \quad (10)$$

By applying Lagrange's theorem on each of the intervals $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$ we obtain :

$$\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} = \frac{1}{2} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(\beta_{i-1}) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(\beta_i)] \quad \text{with} \quad (11)$$

$$x_{i-1} \leq \beta_{i-1} \leq x_i \quad \text{and} \quad x_i \leq \beta_i \leq x_{i+1}.$$

Hence :

$$\left| \alpha - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| = \left| \frac{[\operatorname{arc} \operatorname{tg} f'_i - \operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(\beta_{i-1})] + [\operatorname{arc} \operatorname{tg} f'_i - \operatorname{arc} \operatorname{tg} f'(\beta_i)]}{h} \right|. \quad (12)$$

By applying again Lagrange's theorem on each of the intervals $[\beta_{i-1}, x_i]$, $[x_i, \beta_i]$ the relation (12) becomes :

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| &= \frac{1}{2} \left| \alpha'(\eta_{i-1})(x_i - \beta_{i-1}) + \alpha'(\eta_i)(x_i - \beta_i) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (|\alpha'(\eta_{i-1})| |x_i - \beta_{i-1}| + |\alpha'(\eta_i)| |x_i - \beta_i|) \leq \frac{h}{2} (|\alpha'(\eta_{i-1})| + |\alpha'(\eta_i)|), \\ &\beta_{i-1} \leq \eta_{i-1} \leq x_i, \quad x_i \leq \eta_i \leq \beta_i. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{But } \alpha'(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}} \text{ which shows that } |\alpha'(x)| = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'^2(x)|^{3/2}} \leq |f''(x)|.$$

Noting $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$, the inequality (12) becomes:

$$\left| \alpha - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| \leq M_2 h. \quad (14)$$

By applying tg to both members of inequality (14) it results:

$$\text{tg} \left| \alpha - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| \leq \text{tg} M_2 h. \quad (15)$$

For inequality (15) to be true, since $\left| \alpha - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$, it is sufficient that $M_2 h < \frac{\pi}{2}$. Therefore the first choice for the spacing

$$h \text{ is } h < \frac{\pi}{2M_2}.$$

If we consider (15), (8) becomes;

$$|f'_i - y'_i| \leq (1 + M_1^2) \text{tg} M_2 h, (\forall) 1 \leq i \leq n-1. \quad (16)$$

$$\text{b) } |y'_i - y'_{ir}| = \left| \text{tg} \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} - \text{tg} \frac{\alpha_{i-1,r} + \alpha_{ir}}{2} \right|. \quad (17)$$

We first evaluate the difference:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} - \frac{\alpha_{i-1,r} + \alpha_{ir}}{2} \right| &= \frac{1}{2} \left| \text{arc tg} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \text{arc tg} \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \right. \\ &+ \text{arc tg} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \text{arc tg} \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \left. \right| \leq \frac{1}{2} \left| \text{arc tg} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \right. \\ &- \text{arc tg} \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \left. \right| + \left| \frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \text{arc tg} \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \right|. \quad (18) \end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned} \left| \text{arc tg} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \text{arc tg} \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \right| &= \left| \text{arc tg} \frac{\frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}}{1 + \frac{(y_i - y_{i-1})(f_i - f_{i-1})}{h^2}} \right| = \\ &= \text{arc tg} \left| \frac{(y_i - f_i + f_{i-1} - y_{i-1})h}{h^2 + (y_i - y_{i-1})(f_i - f_{i-1})} \right| \leq \text{arc tg} h \frac{|y_i - f_i| + |y_{i-1} - f_{i-1}|}{|h^2 + (y_i - y_{i-1})(f_i - f_{i-1})|} \leq \text{arc tg} \frac{2\varepsilon}{h}, \quad (19) \end{aligned}$$

where we took into account that $|y_i - f_i| < \varepsilon$, $|y_{i-1} - f_{i-1}| < \varepsilon$ and that function f is increasing.

Similarily it is shown that :

$$\left| \operatorname{arctg} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \operatorname{arctg} \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \right| \leq \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon}{h}. \quad (20)$$

Hence

$$\left| \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} - \frac{\alpha_{ir} + \alpha_{i-1,r}}{2} \right| \leq \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon}{h}. \quad (21)$$

Therefore $|y'_i - y'_{ir}| \leq (1 + M_1^2) \frac{2\varepsilon}{h}$, so that [the overall error is :

$$|f'_i - y'_{ir}| \leq (1 + M_1^2) \left(\operatorname{tg} M_2 h + \frac{2\varepsilon}{h} \right). \quad (22)$$

4. Spacing improvment

Inequality (22) shows that the redution of spacing might, as a possibility to not lead to an improvment of the accuracy because if $h \rightarrow 0$, then $\frac{2\varepsilon}{h} \rightarrow \infty$. We try to determine the optimum spacing h_{opt} . This does evidently correspond to the minimum of the function :

$$g(h) = \operatorname{tg} M_2 h + \frac{2\varepsilon}{h}, \quad (23)$$

under the condition $0 < h < \frac{\pi}{2M_2}$

We note $M_2 h = x$ and $2M_2 \varepsilon = a^2$ and consider the function

$$g_1(M_2 h) = g_1(x) = \operatorname{tg} x + \frac{a^2}{x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

$$g'_i(x) = \frac{x^2 - a^2 \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x}. \quad (25)$$

The derivative roots are the roots of the transcendental equation

$$\cos x = \pm \frac{x}{a}. \quad (25)$$

From expression (25) we deduce that the positive root of equation (26) represents a minimum for function (24). It results that :

$$h_{\text{opt}} = \frac{x_1}{M_1}, \text{ with } \cos x_1 = 0. \quad (27)$$

The following table gives the derivatives of function

$$f(x) = y(x) = 10(1 - e^{\frac{x}{10}}),$$

for $0.25 \leq x \leq 5$ and $h = 0.25$, directly calculated, by means of formula (4) and by means of formula :

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad 1 \leq i \leq n - 1. \quad (28)$$

We note by y'_a the value given by formula (4), by y'_b the value given by (28) and by $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ the errors committed when using (4) and (28), respectively. Results are given in the table 1.

Table 1

x	$f'(x) = -e^{-\frac{x}{10}}$	y'_a	$\varepsilon_1 [\%]$	y'_b	$\varepsilon_2 [\%]$
0.25	0.975311	0.9753459	0.00368	0.97542	0.01117
0.50	0.951229	0.951249	0.0021	0.95132	0.00956
0.75	0.927744	0.9277733	0.00315	0.92784	0.01034
1.00	0.904837	0.9048761	0.00432	0.90494	0.01138
1.25	0.882497	0.8825199	0.00259	0.88258	0.0094
1.50	0.860708	0.8607427	0.00403	0.8608	0.01068
1.75	0.839457	0.8394855	0.00339	0.83954	0.00988
2.00	0.8183731	0.8187687	0.0046	0.81882	0.01087
2.25	0.798516	0.7985512	0.0044	0.7986	0.01051
2.50	0.778801	0.778834	0.00423	0.77888	0.01014
2.75	0.759572	0.7596164	0.00584	0.75966	0.01158
3.00	0.740818	0.7408387	0.00279	0.74088	0.00836
3.25	0.722528	0.7225616	0.00465	0.7226	0.00996
3.50	0.704688	0.7047433	0.00784	0.70478	0.01305
3.75	0.687289	0.6873255	0.00531	0.68736	0.01033
4.00	0.67032	0.6703475	0.0041	0.67038	0.00895
4.25	0.65377	0.6538095	0.00604	0.65384	0.0107
4.50	0.637628	0.6376711	0.00675	0.6377	0.01129
4.75	0.621885	0.6219128	0.00447	0.62194	0.00884
5.00	0.606531	0.606545	0.00387	0.60658	0.00807

6. Conclusions

The method here presented constitutes a useful tool for the derivative calculus. Its efficacy consists in :

— the simplicity of the applied algorithm which does not use the previous results at each step, but, on the contrary only the initial data to which it applies formula (4);

— the high accuracy;

— the practically unlimited possibility of application.

The importance of the method is rendered more clearly by the calculus of dynam inductances and capacities, which is necessary for determining the solutions of state equations in a nonlinear transitory regim circuit.

Table 1 shows that the relative error issued by formula (4) is of an order of magnitue less than the one issued by formula (28).

Chair in Electrotechnics

Polytechnical Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
Bucharest

REFERENCES

1. Iordache Mihai. Formularea și scrierea ecuațiilor de stare pentru circuitele electrice neliniare cu surse comandate neliniare și elemente în exces, utilizând elemente dipolare În : E.E.A., *Electrotehnica*, nr. 1, 1977, p. 33—41.
2. Demidovici P. B., Maron A. I. *Computational Mathematics*. Mir Publishers, Moscow, 1973.
3. Hiroshi Akima. A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedure, *Journal of ACM*, vol. 17, no. 4, October 1970, p. 589—602.
4. Relston Anthony. *Mathematical Methods for Digital Computers*. New York, 1960.
5. * * * System/360 Scientific Subroutine Package (360A—CM—03X), Version III, Programmer's Manual, 1970.
6. Dorn S. W., Mc Cracken. *Metode numerice cu programe în FORTRAN IV* București, Edit. tehnică, 1976.
7. Bucur M. C. *Metode numerice*. Timișoara, Edit. tehnică, 1974.
8. Lagerlöf O.E. Rolf. Interpolation with Rounded Ramp Functions. *Communications of the ACM*, vol. 17, no. 8, August 1974, p. 476—479.

O metodă de calcul al derivației unor funcții ce descriu fenomene electromagnetice neliniare

În lucrare se prezintă o metodă directă, fără a face apel la interpolare, de calcul al derivatei unor clase de funcții frecvent întâlnite în studiul circuitelor și fenomenelor electrice neliniare.

6. Conclusions

The method here presented constitutes a useful tool for the derivative calculation in circuits with nonlinear elements.

ELECTRONICĂ

C.Z.: 621.3.015.1
621.316

SINTEZA FUNCȚILOR DE TRANSFER DE TENSIUNE AVÎND ÎN VEDERE MINIMIZAREA SENSITIVITĂȚII*

TATIANA RĂDULESCU

Se prezintă o metodă de sinteză a funcțiilor de transfer de tensiune, optimă din punct de vedere al sensibilității, folosind circuite cu 1, 2 și 3 STT (sursă de tensiune controlată în tensiune).

Introducere

Circuitele RC active a căror funcție de transfer de tensiune conține parametrul activ numai în coeficientul lui s al numitorului, merită o atenție deosebită din punct de vedere al sensibilității circuitului la variația parametrului activ.

Fie funcția de transfer de forma :

$$F(s) = \frac{h}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = \frac{h}{s^2 + a(k)s + b}$$

unde

$$\omega_0 = \sqrt{b}; \quad Q = \frac{\sqrt{b}}{a}$$

În [1] s-a stabilit că funcția de sensibilitate definită în sens clasic poate fi scrisă astfel :

$$S_k^F = \frac{d(\ln F)}{d(\ln k)} = S_Q^F F_k^Q + S_{\omega_0}^F S_k^{\omega_0}$$

Partea reală a funcției de sensibilitate reprezintă sensibilitatea atenuării, iar partea imaginară este sensibilitatea fazei.

Deoarece parametrul activ k aparține numai coeficientului lui s , rezultă că $S_k^{\omega_0} = 0$ și deci :

$$S_k^F = S_Q^F S_k^Q = \operatorname{Re}(S_k^F) + j\operatorname{Im}(S_k^F) = S_k^a + jS_k^f$$

* Manuscris predat redacției la data de 29 mai 1975

Făcînd analiza funcțiilor S_k^a și S_k^q în domeniul frecvenței se obține :

$$(S_k^a)_{\max} = S_k^q \quad \text{la} \quad \omega = \omega_0$$

$$(S_k^q)_{\max} = 0,5 S_k^q \quad \text{la} \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \omega_0$$

Funcția S_k^q este independentă de parametrul considerat și este necesară minimizarea ei.

Fie $a(k) = m + nk$. Vom obține :

$$Q = \frac{\sqrt{b}}{m + nk}$$

$$S_k^q = \frac{-nk}{m + nk}$$

Se observă că factorii de calitate Q mari se obțin atunci cînd numitorul lui Q este foarte mic, adică atunci cînd se alege k negativ și $m \rightarrow nk$. În acest caz însă S_k^q devine foarte mare și deci sensibilitățile atenuării și fazei sînt mari.

Horowitz [2] arată că dacă un parametru intervine în funcția de circuit cu semnul minus, pentru reducerea sensibilității este necesar să se folosească descompunerea optimă de tip diferență. Această descompunere este unică și asigură sensibilitatea minimă posibilă. Pentru funcția considerată, numitorul se va putea descompune astfel :

$$(s + \alpha)^2 - k\beta s$$

Rezultă :

$$\omega_0 = \alpha$$

$$Q = \frac{\alpha}{2\alpha - k\beta}$$

$$S_k^q = \frac{k\beta}{2\alpha - k\beta} = \frac{k\beta}{\alpha} Q$$

Pentru obținerea factorilor de calitate mari este necesar ca $2\alpha \rightarrow k\beta$. Se obține :

$$S_k^q \rightarrow \frac{2\alpha}{\alpha} Q = 2Q$$

Rezultă în final că sensibilitatea atenuării prezintă un maxim la $\omega = \omega_0$ și anume de valoare $2Q$, iar sensibilitatea fazei prezintă un maxim de valoare Q la $\omega \cong \omega_0$.

În concluzie, sensibilitatea circuitelor de acest tip este mare. Dacă totuși este necesar să folosim aceste circuite, este foarte important să realizăm minimizarea acestor funcții de sensibilitate. Acest lucru este posibil deoarece în general numărul de ecuații care pot fi scrise este mai mic decât numărul de necunoscute. Există deci posibilitatea alegerii unor parametri, alegere care se poate face stabilind relații suplimentare care să conducă la minimizarea sensibilității.

În [3] și [4] se afirmă că se poate obține o reducere a sensibilității prin folosirea unor circuite cu mai multe elemente active. Se dau chiar relații între numărul de elemente active necesare și factorii de calitate care pot fi realizați cu aceste circuite.

În prezentul articol se arată că sensibilitatea unei funcții de circuit depinde în primul rând de modul în care parametrul intervine în funcția de circuit. Această afirmație este verificată în articolul de față prin sinteza circuitelor cu 1, 2 și 3 parametri activi, care intervin în funcția de circuit în același mod (aparțin toți coeficientului lui s).

Se face sinteza funcțiilor de transfer folosind aceste trei circuite, urmărind minimizarea sensibilității la variația valorilor elementelor.

Vom considera funcția de transfer de forma :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{k}{s^2 + (1/Q)s + 1} \quad (1)$$

2. Sinteza funcției de transfer cu un circuit cu o S.T.T.

Se consideră circuitul din Fig. 1.

În [5, [6], [7], [8], [9] se face sinteza aceleiași funcții de transfer cu acest circuit și se obțin 5 soluții diferite. În prezenta lucrare se va face sinteza având în vedere minimizarea sensibilității folosind criteriul Schoeffler.

Fără a pierde din generalitate, putem alege :

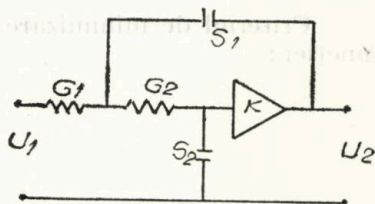


Fig. 1.

$$G_1 = n_1 G_2 = n_1 G ; S_1 = 1/C_1 = n_2 S_2 = n_2 S \quad (2)$$

Funcția de transfer corespunzătoare circuitului propus este :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{k G_1 G_2}{s^2 C_1 C_2 + s(G_2 C_1(1 - k) + C_2(G_1 + G_2)) + G_1 G_2} \equiv \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3)$$

Din relațiile (2) și (3) obținem :

$$Q = \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{n_1 n_2 + n_2 + 1 - k} \quad (4)$$

Se va realiza minimizarea sensibilității la variația parametrului activ, deoarece așa cum s-a arătat în introducere, valoarea acesteia va fi mare. Se obține :

$$S_k^F = 1 + \frac{kGS s}{D(s)}$$

Această funcție are valoare maximă pentru $\omega = \omega_0$. Valoarea minimă a acestui maxim se obține pentru $n_1 n_2 = 1$.

Se determină sensibilitățile referitoare la variațiile celorlalți parametri :

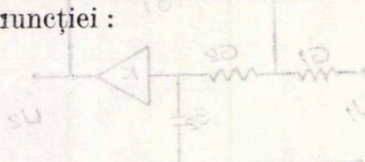
$$S_{G_1}^F = 1 - \frac{n_1 n_2 GS s + n_1 n_2 G^2 S^2}{D(s)}$$

$$S_{G_2}^F = 1 - \frac{(1 - k + n_2)GS s + n_1 n_2 G^2 S^2}{D(s)}$$

$$S_{S_1}^F = 1 - \frac{(1 + n_1)n_2 GS s + n_1 n_2 G^2 S^2}{D(s)}$$

$$S_{S_2}^F = 1 - \frac{(1 - k)GS s + n_1 n_2 G^2 S^2}{D(s)} \quad (5)$$

Criteriul de minimizare dat de Schoeffler are în vedere minimizarea funcției :



$$I = \sum_{i=1}^n |S_{x_i}^F F|^2 \quad (6)$$

I este minim dacă toate funcțiile de sensibilitate $S_{x_i}^F$ vor fi egale în modul. Impunând această condiție funcțiilor de sensibilitate din (5) obținem :

$$n_1 n_2 = n_1 n_2 + n_2 = |1 + n_2 - k| = |1 - k| \quad (7)$$

Aceste relații pot fi approximate alegind pe n_2 cit de mic posibil. În această situație rezultă :

$$n_1 n_2 \rightarrow 1 ; \quad k \rightarrow \frac{(2Q - 1)}{Q}$$

Valorile ce se pot atribui lui n_1 și n_2 rezultă din considerente practice.

Pentru valori mari ale lui Q se obține :

$$k \rightarrow 2 \quad (S_{x_i}^a)_{\max} = 1 - \frac{Q^2}{2Q - 1} \quad \text{pentru } \omega = \sqrt{1 + 1/Q}$$

$$S_k^F \rightarrow 2Q \quad (S_{x_i})_{\max} = Q \quad \text{pentru } \omega \cong \omega_0$$

În Fig. 2. sint reprezentate curbele $S_k^F (n_1 n_2)$ și $S_k^F (k)$ pentru diverse valori ale lui Q .

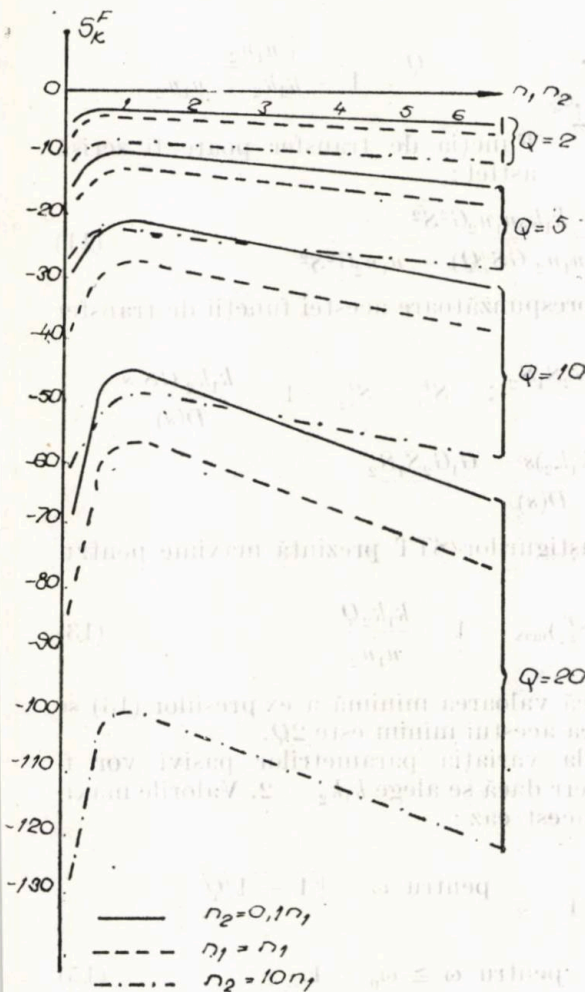


Fig. 2a.

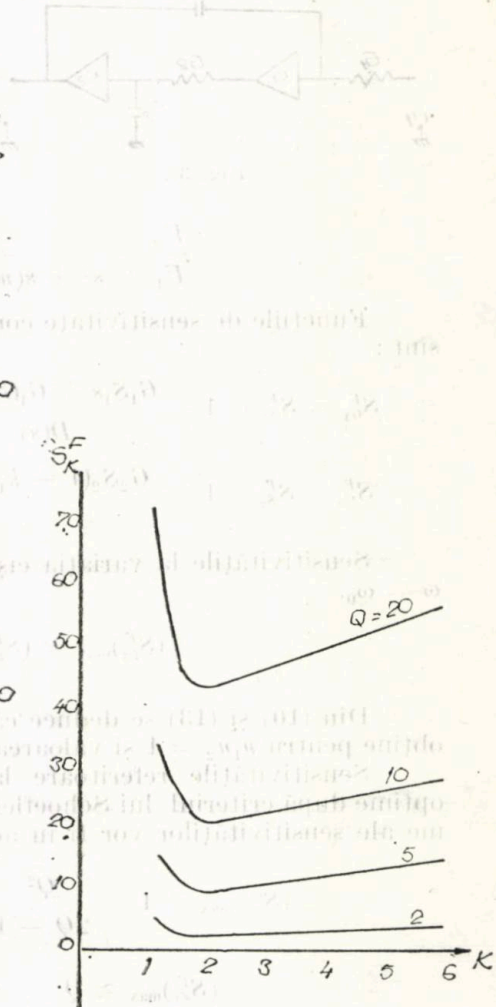


Fig. 2b.

3. Sinteza funcției de transfer cu un circuit cu 2 S.T.T.

Considerăm circuitul din Fig. 3.

Funcția corespunzătoare acestui circuit este :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_1 k_2 G_1 G_2 S_1 S_2}{s^2 + s(G_2 S_2(1 - k_1 k_2) + G_1 S_1) + G_1 G_2 S_1 S_2} \quad (8)$$

Considerăm :

$$G_1 = n_1 G_2 = n_1 G; \quad S_1 = n_2 S_2 = n_2 S \quad (9)$$

Obținem :

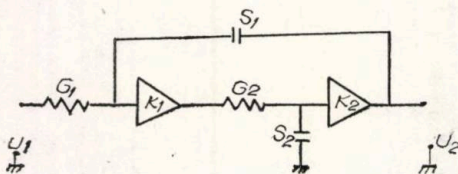


Fig. 3.

$$\omega_0 = \sqrt{n_1 n_2} GS \quad (10)$$

$$Q = \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{1 - k_1 k_2 + n_1 n_2}$$

Funcția de transfer poate fi scrisă astfel :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{k_1 k_2 n_1 n_2 G^2 S^2}{s^2 + s(n_1 n_2 GS/Q) + n_1 n_2 G^2 S^2} \quad (11)$$

Funcțiile de sensibilitate corespunzătoare acestei funcții de transfer sînt :

$$S_{G_1}^F = S_{S_1}^F = 1 - \frac{G_1 S_1 s + G_1 G_2 S_1 S_2}{D(s)}; \quad S_{k_1}^F = S_{k_2}^F = 1 - \frac{k_1 k_2 GS s}{D(s)}$$

$$S_{G_2}^F = S_{S_2}^F = 1 - \frac{G_2 S_2(1 - k_1 k_2)s + G_1 G_2 S_1 S_2}{D(s)}$$

Sensitivitățile la variația cîștigurilor STT prezintă maxime pentru $\omega = \omega_0$.

$$(S_{k_1}^F)_{\max} = (S_{k_2}^F)_{\max} = 1 - \frac{k_1 k_2 Q}{n_1 n_2} \quad (13)$$

Din (10) și (13) se deduce că valoarea minimă a expresiilor (13) se obține pentru $n_1 n_2 = 1$ și valoarea acestui minim este $2Q$.

Sensitivitățile referitoare la variația parametrilor pasivi vor fi optime după criteriul lui Schoeffler dacă se alege $k_1 k_2 = 2$. Valorile maxime ale sensibilităților vor fi în acest caz :

$$(S_{x_i}^a)_{\max} = 1 + \frac{Q^2}{2Q - 1} \quad \text{pentru } \omega = \sqrt{1 + 1/Q}$$

$$(S_{x_i}^F)_{\max} \cong Q \quad \text{pentru } \omega \cong \omega_0 = 1. \quad (15)$$

unde x_i sînt G_1, G_2, S_1, S_2 .

Deoarece n_1 și n_2 nu influențează individual funcțiile de sensibilitate, iar $n_1 n_2$ trebuie să fie egal cu 1, este indicat să alegem $n_1 = 1$ și $n_2 = 1$.

În privința sensibilității, circuitul analizat nu aduce nici o îmbunătățire. Sensitivitatea funcției de transfer la variația fiecărui parametru activ are aceeași valoare cu S_k^F obținută pentru circuitul cu o STT.

4. Sensitivitatea funcției de transfer pentru un circuit cu trei S.T.T.

Să considerăm circuitul din Fig. 4.

Funcția de transfer corespunzătoare acestui circuit este :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_1 k_2 G_1 G_2 S_1 S_2}{s^2 + s(G_1 S_1 + G_2 S_2 (1 - k_1 k_2 k_3)) + G_1 G_2 S_1 S_2} \quad (16)$$

Funcția (16) diferă de (8) printr-o constantă k_3 .

Funcțiile $S_{x_i}^F$, unde $x_i = k_1, k_2, G_1, G_2, S_1, S_2$, sînt identice cu cele stabilite pentru circuitul din Fig. 3, dacă în relațiile (12) înlocuim pe $k_1 k_2$ prin $k_1 k_2 k_3$.

Rămîne de determinat $S_{k_3}^F$:

$$S_{k_3}^F = \frac{k_1 k_2 k_3 G_2 S_2 s}{D(s)} \quad (17)$$

Funcția (17) prezintă un maxim pentru $\omega = \omega_0$ și anume :

$$(S_{k_3}^F)_{\max} = \frac{k_1 k_2 k_3}{n_1 n_2} Q$$

Pentru $n_1 n_2 = 1$ și $k_1 k_2 k_3 = (2Q - 1)/Q$, relații necesare pentru minimizarea funcțiilor de sensibilitate după criteriul lui Schoeffler se obține :

$$(S_{k_3}^F)_{\max} = 2Q - 1 \quad (18)$$

Sensitivitățile funcției de transfer referitoare la variații ale parametrilor activi, sînt comparabile ca valori cu cele obținute anterior pentru circuitele cu o STT și două STT. În plus, prezența mai multor elemente active face ca sensibilitatea sumă să crească, deoarece așa cum se cunoaște din [11], sensibilitatea sumă poate fi scrisă astfel :

$$S_{RCk}^F = \frac{2s}{F} \frac{dF}{ds} + \sum_i S_{k_i}^F$$

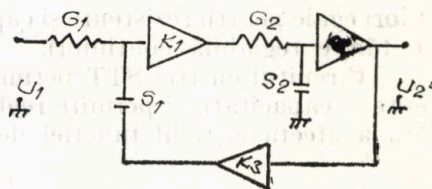


Fig. 4.

5. Concluzii

Au fost considerate circuite a căror funcții de transfer conțin parametrul activ, care este negativ, în coeficientul lui s al numitorului funcției de transfer. S-a arătat că sensibilitatea funcției de transfer la variația acestui parametru este mare (în condiții optime de proiectare, sensibilitatea maximă a atenuării tinde către $2Q$, pentru valori mari ale lui Q). Este deci important să minimizăm sensibilitatea la variația acestui parametru.

S-a prezentat o metodă de sinteză a acestor circuite avînd în vedere minimizarea sensibilității după criteriul Schoeffler. Importanța optimizării rezultă clar din diagramele prezentate în Fig. 2.

În nici unul din aceste circuite nu este indicat să alegem $k = 1$, alegere care ar fi avantajoasă din punct de vedere al realizării STT.

Circuitele cu două și trei STT discutate au sensibilitatea sumă mai mare față de aceea a circuitului cu o STT.

Circuitul cu două STT este indicat dacă este necesară alegerea de valori egale pentru rezistențe și capacități (ex. filtre universale cu frecvența de tăiere reglabilă continuu).

Circuitul cu trei STT permite alegerea de valori egale pentru rezistențe și capacități, și permite reglarea cu ușurință a factorului de calitate fără a afecta cîștigul funcției de transfer.

Catedra telefonie, telegrafie

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. T. Rădulescu, Metode de analiza și sinteza circuitelor RC active Teza de doctorat, 1973.
2. L. P. Huelsman, Theory and Design of Active RC Circuits McGraw Hill, New York, 1968.
3. G. S. Moschytz, Active Filters: part. 5. Applying the Operational Amplifier Electronics vol. 41, no 25, dec 1968, p. 98—106.
4. G. S. Moschytz, Inductorless Filters a Survey Linear Active and Digital Filters IEEE Spectrum, sept. 1970.
5. F. E. J. Girling, E. F. Good, Active Filters: Uses of the Parallel T Network Wireless World, may 1970, pp 231—234.
6. P. G. Ioannides, RC Elements Improve Active Filter Performance Electronics Engineering, vol 44, no 531, may 1972, pp 43
7. H. J. Kowalski, Vereinfachte Dimensionierung Aktiver RC-Schaltungen mit vorgeschriebenem Dämpfungsvorgang Radio Fernsehen elektronik 21, H8, 1972, pp 267—269.
8. S. K. Mitra, Analysis and Synthesis of Linear Active Networks, John Wiley, Sons Inc, New York, 1969.
9. M. S. Soderstrand S. K. Mitra, Gain and Sensitivity Limitations of Active RC Filters IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT 18, no 6, nov. 1971, pp 600—610.
10. L. C. Thomas, The Biquad: Part. 1. Some Practical Design Considerations IEEE Trans. on Circuit Theory, vol CT 18, no 3, may 1971.
11. A. G. J. Holt, M. R. Lee, Summed Sensitivity of Active RC Networks Electronics Letters July 1968, vol 4, no 14, pp. 298—299.

The Synthesis of Voltage Transfer Function with Minimum Sensitivity

A method for synthesis of voltage transfer functions with minimum sensitivity using the networks with 1, 2, 3 V.V.T. (voltage to voltage transducer) is obtained.

C.Z. : 681.3.06
517.532

METODA CĂUTĂRII PLANELOR PRINCIPALE PENTRU OPTIMIZAREA SISTEMELOR MULTIVARIABILE*

I. DUMITRACHE, D. POPESCU

În lucrare se prezintă o nouă metodă pentru minimizarea funcțiilor de mai multe variabile. Metoda căutării planelor principale este bazată pe determinarea punctelor de intersecție a direcției negative a gradientului cu planele principale din spațiul variabilelor

1. Generalități

În literatură sînt cunoscute mai multe metode care permit optimizarea sistemelor multivariabile definite printr-o relație intrare-ieșire de tipul : $y(x) = y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Optimizarea unui astfel de sistem — prezentat în figura 1, constă în determinarea vectorului x care optimizează funcția scalară $y(x)$.

Cele mai uzuale metode folosite în rezolvarea problemelor de optim staționar sînt : metodele gradientului tehnic, metodele direcțiilor conjugate și metodele de tip Newton — Raphson.

Metodele gradientului tehnic folosesc procedura de determinare a optimului prin deplasări pe direcția gradientului funcției oferind cele mai bune îmbunătățiri — creșteri sau descreșteri ale funcției $y(x)$ după cum aceasta are un maxim sau un minim.

Principalul dezavantaj al acestor metode este convergența slabă spre extremul funcției datorită unor tendințe de oscilație.

Metodele direcțiilor conjugate sînt avantajoase în cazul funcțiilor pătratice determinînd soluția de optim într-un număr de pași dictat de dimensiunea spațiului variabilelor de intrare. Dezavantajul acestor metode rezidă din calculul unor direcții de deplasare diferite de cele ale gradientului funcției.

Metodele de tipul Newton-Raphson utilizează aproximarea printr-o dezvoltare trunchiată în serie Taylor a funcției de optimizat și determinarea noilor puncte îmbunătățite prin apelarea la derivatele de ordinul doi ale acestei funcții. Aceste metode au avantajul unei bune convergențe în jurul punctului de optim dar sînt limitative pentru că se referă

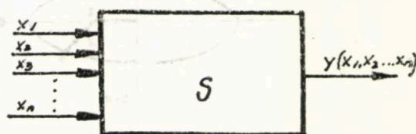


Fig. 1

* Manuscris predat redacției la data de 17 noiembrie 1976

la o aproximare locală a funcției și necesită calculul derivatelor de ordinul doi.

Utilizarea eficientă a unui anumit tip de metodă din categoria celor prezentate mai sus depinde efectiv de problema care trebuie soluționată.

Metoda căutării planelor principale MCPP propusă de noi poate fi încadrată în categoria metodelor de gradient.

Această metodă întrunește atît avantajele metodei gradientului tehnic precum și pe cele ale metodelor direcțiilor conjugate și Newton — Raphson, și apare ca o metodă universală de optimizare.

2. Prezentarea metodei căutării planelor principale (MCPP)

Metoda „căutării planelor principale” determină pentru funcții de tipul

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n W_i x_i^2 \quad (1)$$

în mod succesiv punctele de intersecție ale direcției gradientului cu planele principale ale sistemului de axe din spațiul variabilelor independente x_i

Pentru o funcție tridimensională curbele de izonivel ale acesteia sînt elipsoizi cu excentricități determinate de valorile coeficienților C_i ($i = 1, 2, 3$).

Pornind dintr-un punct arbitrar 0, direcția negativă a gradientului în acest punct de pornire a căutării intersectează planul care conține axele x_1 și x_2 în 0_1 (fig. 2). Intersecția succesivă și cu planele ce conțin axele $(x_1 x_3)$ și axele $(x_2 x_3)$ se obțin punctele 0_2 și 0_3 , fig. 2b și 2c

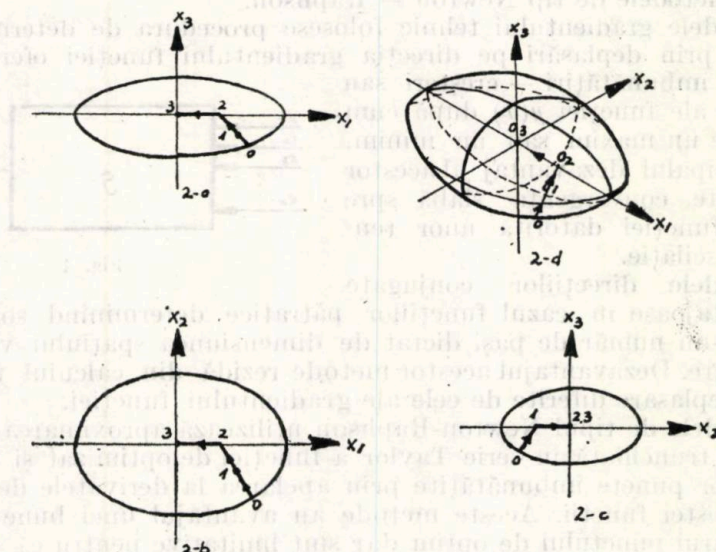


Fig. 2

Din fig. 2d se observă că punctul o_3 reprezintă chiar soluția de minim exactă a funcției $y(x)$.

În cazul unei funcții n -dimensionale gradientul și matricea derivatelor parțiale de ordinul al doilea al funcției obiectiv $y(x)$ au forma :

$$Y_x(x) = \frac{\partial Y}{\partial x} = \left[\frac{\partial Y}{\partial x_1}, \frac{\partial Y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Y}{\partial x_n} \right]$$

$$Y_{xx}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 Y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Fie un punct arbitrar x_0 din spațiul n -dimensional al variabilelor independente. O dezvoltare trunchiată în serie Taylor în jurul lui x_0 permite aproximarea locală a lui $y(x)$:

$$y(x) = y(x_0) + y_x(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T y_{xx}(x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

Vectorul gradient al aproximării locale a funcției $y(x)$ este :

$$y_x(x) = y_x(x_0) + (x - x_0)^T y_{xx}(x_0) \quad (4)$$

Admițind o procedură de căutare iterativă după direcția gradientului de tipul :

$$x_{i+1} = x_i - k \cdot y_x^T(x_i) \quad (5)$$

unde x_i este vectorul x la iterația i iar k este pasul căutării vom determina pasul k cu care se înaintează la o asemenea iterație.

Acest pas este de fapt distanța de la prezenta poziție x_i la noua poziție x_{i+1} care este dată de intersecția cu unul din planele principale a direcției gradientului din x_i .

Pentru x_i apropiați de x_0 , $y_x(x_i)$ este bine aproximat de $y_{xloc}(x_i)$. Substituind (4) în (5) se obține :

$$x_{i+1} = x_i - k [y_x(x_0) + (x_i - x_0)^T y_{xx}(x_0)]^T \quad (6)$$

Se poate obține o informație utilă asupra pasului k la trecerea de la stadiul i , la $i + 1$ evaluând diferența dintre $y(x_{i+1})$ și $y(x_i)$

Se poate scrie :

$$x_{i+1} - x_i = -k [y_x(x_0) + (x_i - x_0)^T y_{xx}(x_0)]^T \quad (7)$$

$$y_{loc}(x_{i+1}) - y_{loc}(x_i) = y_x(x_0) \cdot (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_0)^T y_{xx}(x_0) \cdot (x_{i+1} - x_0) - \frac{1}{2} (x_i - x_0)^T y_{xx}(x_0) (x_i - x_0) \quad (8)$$

O interpretare mai bună a relației (8) poate fi făcută dacă se efectuează două transformări de coordonate: o translație și o rotație. Necesitatea acestor transformări este legată de însăși funcționarea metodei. Aceste transformări cuprind valorile și vectorii proprii ai matricei derivatelor parțiale de ordinul doi atașată funcției $y(x)$.

Dacă matricea derivatelor parțiale de ordinul doi este reală și simetrică valorile proprii vor fi reale [2].

Separind valorile proprii pozitive de cele negative în $(\lambda_1 \dots \lambda_p)$ respectiv $(\lambda_{p+1} \dots \lambda_N)$ restul de „ $n-N$ ” putind fi valori proprii nule, obținem matricea diagonală a valorilor proprii.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_p & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p+1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_{p+N} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Matricea vectorilor proprii poate fi reprezentată partiționat astfel:

$$E = [E_1, E_2 \dots E_p, E_{p+1}, \dots E_{p+N} E_n] \quad (10)$$

Pentru matricea E se poate scrie:

$$E^T \cdot E = I. \quad (11)$$

$$E^T \cdot y_{xx}(x_0) \cdot E = \lambda \quad (12)$$

Acum efectuăm prima transformare de coordonate:

$$W = X - z \quad (13)$$

Vectorul z este definit de ecuațiile:

$$C_j = E_j^T Y_x^T(x_0) \quad j = 1, 2, \dots, P + N \quad (14)$$

$$C_j = 0 \quad j = P + N + 1 \dots n \quad (15)$$

$$z = -EC + x_0 \quad (16)$$

Dacă în (12) se înmulțește la stînga cu E și la dreapta cu E^T rezultă :

$$y_{xx}(x_0)^{-1} = E \lambda^{-1} \cdot E^T \quad (17)$$

Relațiile (16) și (17) pot fi combinate și simplificate, obținîndu-se :

$$Z = -y_{xx}(x_0)^{-1} y_x(x_0)^T + x_0 \quad (18)$$

Se observă că punctul Z dat de (18) este punctul staționar (de minim) al relației (3) care dă aproximarea locală a lui $y(x)$. Deci translația (13) mută originea sistemului în punctul staționar al aproximării $y_{loc}(x)$ în jurul punctului x_0 .

A doua transformare este o rotație a sistemului W dată de :

$$e = E^T W = E^T(x - x_0) + C \quad (19)$$

Dacă sint definite expresiile :

$$e_0 = e(x_0) = c \quad (20)$$

$$e_i = e(x_i) = E^T(x_i - x_0) + c \quad (21)$$

$$e_{i+1} = e(x_{i+1}) = E^T(x_{i+1} - x_0) + c \quad (22)$$

urmează că :

$$x_i - x_0 = E(e_i - c) \quad (23)$$

$$x_{i+1} - x_0 = E(e_{i+1} - c) \quad (24)$$

$$x_{i+1} - x_i = E(e_{i+1} - e_i) \quad (25)$$

Prin înlocuirea în relația (8) a relațiilor prezentate la (23), (24), (25) se obține :

$$\begin{aligned} y_{loc}(x_{i+1}) - y_{loc}(x_i) &= [y_x(x_0)E - C^T \cdot \lambda][e_{i+1} - e_i] + \frac{1}{2} e_{i+1}^T \lambda e_{i+1} - \\ &\quad - \frac{1}{2} e_{i+1}^T \lambda - \frac{1}{2} e_{i+1}^T \end{aligned} \quad (26)$$

Din relațiile (7) respectiv (23) (24) (25) se pot scrie transformările de coordonate în sistemul e de la căutarea „ i ” la „ $I + 1$ ” pe componente :

$$e_{i+1,j} = [1 - K \lambda_j] \cdot e_{i,j}; j = 1, 2 \dots; P + N \quad (27)$$

$$e_{i+1,j} = e_{i,j} - K E_j^T y_x(x_0); j = P + N + 1, \dots n \quad (28)$$

Forma finală pentru relația (26) este atunci :

$$Y_{loc}(x_{i+1}) - Y_{loc}(x_i) = -\frac{k}{2} \sum_{j=1}^{P+N} [(2 - k\lambda_j) \lambda_j^2 e_{i,j}^2] - k \left[\sum_{j=P+N+1}^n Y_x(x_0) E_j \right]^2 \quad (29)$$

Rotăția axelor se face, după cum rezultă din (19) pentru aducerea axelor sistemului W paralele cu direcțiile vectorilor proprii E . Pentru ca înaintarea cu un pas pornind din x_0 să fie eficientă, adică îndreptată spre minim, trebuie ca

$$y_{loc}(x_{i+1}) - y_{loc}(x_i) \leq 0 \quad (30)$$

Dacă se alege succesiv pasul $k = \frac{1}{\lambda_j}; j = 1 \dots P$ în relația (29) se obține o îmbunătățire întrucît termenii $(2 - k\lambda_j)$ sînt negativi. În același timp din inspectarea relațiilor (27) rezultă că pe rînd se anulează componentele $e_j, (j = 1, 2 \dots P)$.

Deci dacă se pornește din x_0 cu pași $k = 1/\lambda_j, j = 1, 2 \dots p$ pe direcția negativă a gradientului, cu siguranță se obțin îmbunătățiri ale funcției $y(x)$. Noile puncte de căutare sînt date de intersecția direcției gradientului cu planele principale ale sistemului de coordonate „ e ”. Deci după P iterații, pasul k nu se mai poate pune egal cu inversul valorilor proprii pentru că acestea sînt negative. În acest fel nu se mai pot aduce îmbunătățiri pentru $y(x)$.

De aici înainte pasul k se alege printr-o procedură de minimizare unidirecțională pe direcția negativă a gradientului.

Se poate observa că transformările de coordonate efectuate nu au fost alese intimplător. Semnificația lor rezultă dacă în ecuația (3) sînt substituite relațiile (14), (15) și (23).

$$Y_{loc}(x) = Y(x_0) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{P+N} \frac{Y_x(x_0) E_j^2}{\lambda_j} + \sum_{j=P+N+1}^n Y_x E_j e_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{P+N} \lambda_j e_{i,j}^2 \quad (30)$$

Dacă spre exemplu x_0 este astfel încît matricea derivatei parțiale de ordinul doi are toate valorile proprii pozitive, aceasta este o matrice nesară și (30) devine :

$$Y_{loc}(x) = Y_{loc}(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j e_{i,j}^2 \quad (31)$$

În (31) $y_{loc}(x_s)$ este valoarea aproximției lui $y(x)$ în punctul său staționar x_s . Relația (31) este de fapt ecuația unei suprafețe elipsoidice în spațiul n — dimensional al cărei minim se găsește în „ n ” pași mergând pe direcția negativă a gradientului $y_x(x)$ cu pași $k = \frac{1}{\lambda_j}$ intersectînd succesiv planele principale ale spațiului variabilelor.

Toată procedura este valabilă în jurul lui x_0 , adică pentru puncte x_i , x_{i+1} , pentru care încă aproximarea din (3) este valabilă. Se poate controla valabilitatea aproximației prin calculul la fiecare iterație al raportului de performanță :

$$RP = \frac{y(x_i) - y(x_0)}{y_{loc}(x_i) - y(x_0)} \quad (32)$$

Este necesar ca acest raport să fie apropiat de 1.

Dacă $|RP - 1| > 1$ atunci se înlocuiește x_0 cu punctul curent x_i și toată procedura se reia de la capăt executînd o aproximație în jurul lui x_i . Pasul inițial se poate alege spre exemplu printr-o relație de tipul :

$$k = \frac{y(x_0) - y_m(\text{est})}{y_x(x_0) \cdot y_x(x_0)^T} \quad (33)$$

unde se impune o valoare estimată $y_m(\text{est})$ pentru minimul funcției $y(x)$. Înțelegerea mai profundă a modului de funcționare a metodei căutării planelor principale rezidă din aplicarea acesteia pentru funcția bine cunoscută : $y(x) = 100(yx_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ a lui Rosenbroch. În figura 3 a sint prezentate curbele de izonivel ale funcției Rosenbrock.

În figura 3 este prezentat mecanismul metodei „căutării planelor principale” (aici axelor principale).

Aproximarea funcției în jurul punctului x_0 este dată de un elipsoid care are curba de izonivel conturul eliptic punctat pe care se găsește perechea $(x_0, y(x_0))$. Prima transformare de coordonate — translație, aduce sistemul de axe la centrul elipsei care este punctul de minim al $y_{loc}(x)$.

Următoarea transformare rotește axele W_1, W_2 peste axele majore ale elipsoidului ce aproximează pe $y(x)$ în x_0 obținîndu-se astfel noul

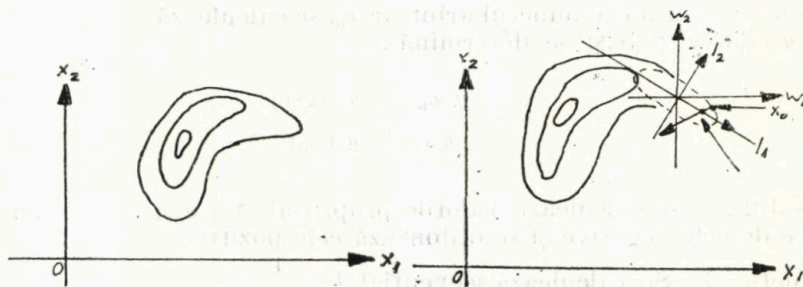


Fig. 3.

sistem de coordonate cu axe e_1, e_2 ce corespund axei principale și secundare ale elipsei. Dacă se înaintează din x_0 pe direcția negativă a gradientului spre intersecția cu axele e_1 și e_2 se obțin în mod evident îmbunătățiri. Aceste îmbunătățiri sînt „locale” ele ducînd spre optimul global prin parcurgerea mai multor etape de aproximare locală, următoarea fiind efectuată în jurul punctului $x_0^{(1)}$.

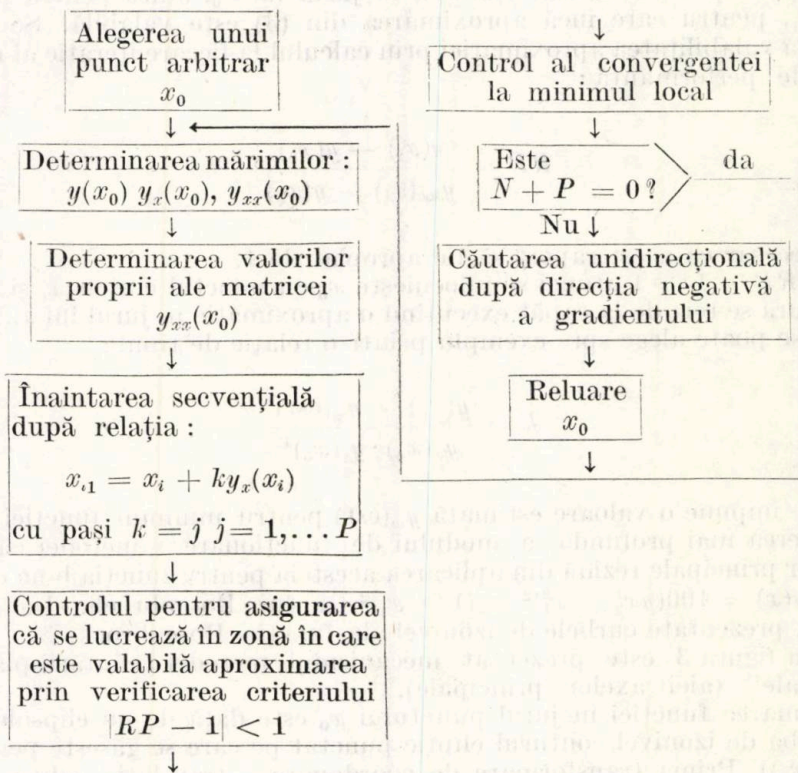


Fig. 4.

Algoritmul de calcul se poate preciza din organigrama prezentată în fig. 4.

La pasul 1 : — se alege punctul arbitrar x_0 , se calculează $y(x_0)$, $y_x(x_0)$, $y_{xx}(x_0)$ și se determină :

$$k = \frac{y(x_0) - y_m(\text{est})}{y_x(x_0) \cdot y_x(x_0)^T}$$

La pasul 2 : — se calculează valorile proprii ale lui $y_{xx}(x_0)$ se separă cele pozitive de cele negative și se ordonează cele pozitive.

La punctul 3 : Se calculează secvențial $k = \frac{1}{\lambda_i}$

($i = 1, \dots, P$) și se fac mișcările după relația :

$$x_{i+1} = x_0 - k \cdot y_x(x_i)$$

La fiecare iterație se controlează dacă aproximarea în jurul lui x_0 este încă valabilă prin criteriul :

$$|RP - 1| < 1 \text{ unde } RP = \frac{y(x_i) - y(x_0)}{y_{loc}(x_i) - y(x_0)}$$

și se verifică convergența algoritmului prin criteriul :

$$|y(x_{i+1}) - y(x_i)| < 0 \quad (35)$$

După $i = P$ iterații se controlează atingerea minimului local prin criteriul :

$$|y_x(x_i)| < \varepsilon \quad (36)$$

La pasul 4 : — se efectuează o testare logică pentru detectarea valorilor proprii negative sau zero.

Dacă $N + Z = 0$ x_0 este substituit cu valoarea curentă x_i și algoritmul de minimizare este reinițializat.

Dacă $N + Z \neq 0$ se efectuează o căutare unidirecțională după direcția negativă a gradientului pînă se determină un minim local pe aceea direcție de x_0 se repune la această valoare, procedura de minimizare reluindu-se. La punctul 5 : — Se testează dacă s-a ajuns la optimul funcției $y(x)$ printr-un criteriu de oprire de tipul $|y(x_{k+1}) - y(x_k)| < \varepsilon$;

Programul de calcul pentru această metodă conține un minim de cinci subrutine :

- subrutina metodei căutării planelor principale MCPP —
- Subrutina pentru determinarea gradientului și matricei derivatelor parțiale de ordinul doi CALGH
- subrutina pentru calculul valorilor proprii „VALP”
- subrutina pentru introducerea datelor problemei INTP
- subrutina pentru calculul valorilor unei funcții multivariabile într-un punct VAL.

Prin asamblarea corespunzătoare a acestor subrutine se poate obține un program general de calcul pentru optimizare — utilizînd metoda „căutării planelor principale” —

4. Domenii de aplicabilitate și rezultate „obținute”

Metoda prezentată are posibilități largi de utilizare în sensul că rezolvă pe lîngă problemele de optimizare a sistemelor descrise prin modelele matematice, și o altă gamă de probleme cum ar fi identificarea sistemelor dinamice prin rezolvarea unor probleme bilocale, și rezolvarea

Rezultatele problemelor testate pe calculator

Problema	Metoda de optimizare	Număr de valori ale funcției evaluate	Număr de gradienti ai funcției evaluați	Număr de matrici cu derivate parțiale de ordin doi evaluate	Punct inițial de pornire	Punctul de optim	Valoarea funcției în punctul de optim.
a) $\min y(x)$ $y(x) = (Ax - b) \cdot (Ax - b)$	Fletcher-Reeves	17	17	—	$x_1 = 0,0$ $x_2 = 0,0$ $x_3 = 0,0$ $x_4 = 0,0$	$x_1 = -0,25$ $x_2 = 0,025$ $x_3 = 0,1$ $x_4 = 0,175$	$1,97 \cdot 10^{-22}$
	C.C.P.	2	2	1	$x_1 = 0,0$ $x_2 = 0,0$ $x_3 = 0,0$ $x_4 = 0,0$	$x_1 = -0,251$ $x_2 = 0,025$ $x_3 = 0,10$ $x_4 = 0,175$	0,0
b) $\min y(x)$ $y(x) = 100(x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2$	Fletcher-Reeves	44	23	18	$x_1 = -1,2$ $x_2 = 1,0$	$x_1 = 1,0$ $x_2 = 1,0$	0,0
	C.C.P.	76	76	—	$x_1 = -1,2$ $x_2 = 1,0$	$x_1 = 1,0$ $x_2 = 1,0$	$0,426 \cdot 10^{-2}$ $0,818 \cdot 10^{-3}$
c) $\min y(x)$ $y(x) = g^2(x) + g^2(x) + g^2(x)$	Fletcher-Reeves	183	183	—	$x_1 = 3,0$ $x_2 = -1,0$ $x_3 = 0,0$ $x_4 = 1,0$		1.767037
	C.C.P.	7	3	3	$x_1 = 3,0$ $x_2 = -1,0$ $x_3 = 0,0$ $x_4 = 1,0$		1.767037

unor sisteme de ecuații algebrice liniare sau neliniare. Pentru a avea o imagine concludentă a eficacității metodei „căutării planelor principale” au fost efectuate unele teste comparative ale căror rezultate sînt prezentate în tabelul alăturat.

Metoda propusă a fost comparată cu metoda gradientului conjugat a lui Fletcher și Reeves, cotate ca o metodă foarte puternică de optimizare multidimensională.

Problemele test soluționate prin cele două metode au fost :

a) Rezolvarea unui sistem de ecuații liniare $Ax = b$ cu :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (37)$$

folosind funcția pentru minimizat :

$$y(x) = (Ax - b)^T \cdot (Ax - b) \quad (38)$$

Punctul inițial de căutare s-a ales pentru ambele metode $x_0 = (0, 0, 0, 0)$

b) Minimizarea funcției lui Rosenbroch :

$$y(x) = 100 (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (39)$$

c) Rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice neliniare :

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 0,879 = 0$$

$$g_2(x) = 0,5x_1^2 + x_2^2 + 0,879 = 0 \quad (40)$$

$$g_4(x) = x_1 - x_2 + 0,62 = 0$$

utilizînd minimizarea funcției :

$$y(x) = g_1^2(x) + g_2^2(x) + g_3^2(x). \quad (41)$$

Rezultatele au fost obținute pe un calculator FELIX — 256. Din analiza rezultatelor cuprinse în tabel se observă că volumul de calcul aferent pentru rezolvarea oricăreia dintre problemele alese este cu mult mai mic în cazul algoritmului lui „CPP”, decît în cazul algoritmului Fletcher — Reeves, chiar dacă algoritmul „CPP” apelează și la calculul derivatelor de ordinul doi.

5. Concluzii

a) Așa cum rezultă din prezentarea de mai sus metoda „căutării planelor principale” întrunește calitățile metodelor de gradient tehnic

precum și a celor de gradienti conjugați sau de ordinul doi astfel că apare ca o metodă :

— rapidă în căutare furnizând cele mai mari variații (creșteri sau descreșteri) ale funcției de optimizat date de deplasări pe direcția gradientului (calitatea a metodelor gradientului tehnic)

— cu convergență puternică în jurul punctului de extrem (calitate a metodelor conjugate) și de tip Newton — Raphson.

b) Metoda are un caracter universal de aplicabilitate fiind utilă pentru o clasă largă de funcții — obiectiv.

c) Metoda se pretează și la rezolvarea eficientă a unor probleme legate de identificarea sistemelor precum și la soluționarea unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare sau neliniare.

d) Volumul de calcul este sensibil mai mic decât în cazul altor metode, cotate ca eficiente în rezolvarea problemelor de optim.

e) Metoda oferă ușurință în programare.

Catedra de automatică II

Institutul politehnic „Gheorghe Georghiu Dej” București

The Seeking Principal Planes Method for the Optimization Systems—

In this paper it is presented a method for minimising of functions of several variables. The method of seeking principal planes is based on the intersections of negative gradient direction with principal planes from the variables space.

C.Z.: 681.3.041
517.942.82

METODA NUMERICĂ DE CALCUL AL VALORILOR UNEI FUNCȚII DE TIMP DATA PRIN TRANSFORMATĂ Z

MARIA ANA NECULA, A. NĂDEJDE, LIGIA MAIOR

În lucrare se prezintă o metodă numerică de calcul al valorilor unei funcții de timp cînd se cunoaște transformata Z a acesteia. Se demonstrează că, dacă transformata Z a funcției este rațională avînd gradul m al polinomului de la numărător mai mic sau cel mult egal cu gradul n al polinomului de la numitor, există întotdeauna o formulă de recurență pentru calculul prin puncte al valorilor funcției. Se demonstrează de asemenea că, pentru semnalele eșantionate din sistemele liniare, transformata Z este rațională cu $m \leq n$, deci existența unor formule de recurență este interesantă nu numai teoretic ci și practic. Sînt date algoritmul și organigramele pentru programul FORTRAN corespunzătoare metodei.

1. Introducere

Utilizarea transformatei Z pentru studiul sistemelor cu date eșantionate a impus existența unor metode de calcul al inversei transformatei Z . Transformatele Z ale semnalelor din sistemele liniare sînt rapoarte de polinoame în puteri întregi ale variabilei z , avînd gradul numărătorului mai mic sau cel mult egal cu gradul numitorului. Pentru acestea sînt date în literatură ([1], [2]) următoarele metode de determinare a funcției de timp corespunzătoare:

- a) din formula de calcul al inversei transformatei Z , prin evaluarea integralei de inversiune folosind un calcul de reziduuri
- b) prin dezvoltare în fracții simple și căutarea în tabele de corespondență dintre funcții de timp și transformate Z cunoscute.
- c) prin dezvoltarea în serie de puteri, sau împărțirea lungă.

Prin primele două metode se determină expresia analitică a funcției de timp; prin cea de a treia metodă sînt calculate valori ale funcției de timp în puncte succesive pe axa timpului (la momentele de eșantionare). Utilizarea calculatorului numeric este avantajoasă numai pentru cea de a treia metodă.

În cele ce urmează va fi prezentată o metodă nouă de calcul prin puncte al funcției de timp pornind de la transformata Z a acesteia. Metoda se bazează pe posibilitatea de a stabili formule de recurență pentru clasa funcțiilor de timp ce intervin în studiul sistemelor dinamice.

2. Formula de recurență pentru funcțiile de timp

Fie $y(t)$ o funcție de timp și $y^*(t)$ funcția de timp obținută prin eșantionarea lui $y(t)$ cu impulsuri unitate, intervalul de eșantionare fiind T .

Fie $Y(z)$ transformata Z a lui $y^*(t)$, definită ca

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot z^{-k} = z\{y^*(t)\} \quad (1)$$

Teoremă

Dacă $Y(z)$ este rațională de forma :

$$Y(z) = \frac{a_m \cdot z^m + a_{m-1} \cdot z^{m-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0}{b_n \cdot z^n + b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + b_1 \cdot z + b_0} \quad (2)$$

cu $m \leq n$, există întotdeauna o formulă de recurență pentru calculul valorilor lui $y^*(t)$, numărul termenilor din formulă fiind n .

Demonstrație :

$Y(z)$ se poate scrie :

$$Y(z) = \frac{\frac{a_0}{b_n} z^{-n} + \frac{a_1}{b_n} z^{-(n-1)} + \dots + \frac{a_{m-1}}{b_n} z^{-(n-m+1)} + \frac{a_m}{b_n} z^{-(n-m)}}{1 - \left[-\frac{b_0}{b_n} z^{-n} - \frac{b_1}{b_n} z^{-(n-1)} - \dots - \frac{b_{n-2}}{b_n} z^{-2} - \frac{b_{n-1}}{b_n} z^{-1} \right]} \quad (3)$$

sau :

$$Y(z) = \frac{P(z)}{1 - Q(z)} \quad (4)$$

cu :

$$p_i = \frac{a_{n-i}}{b_n} \text{ pentru orice } i = (n-m), \dots, n \quad (5)$$

și :

$$q_i = -\frac{b_{n-i}}{b_n} \text{ pentru orice } i = 1, 2, \dots, n$$

$P(z)$ și $Q(z)$ pot fi considerate transformatele Z ale unor funcții de timp $p^*(t)$ și respectiv $q^*(t)$. Aceste funcții de timp au următoarele valori particulare :

$$p(iT) = 0 \text{ pentru orice } i > n \text{ și } i < n-m$$

$$q(iT) = 0 \text{ pentru orice } i > n \quad (6)$$

$$q(0) = 0$$

Celelalte valori ale acestor funcții sînt :

$$p(iT) = p_i \text{ pentru orice } i = (n-m), \dots, n$$

$$q(iT) = q_i \text{ pentru orice } i = 1, 2, \dots, n \quad (5')$$

unde p_i și q_i se calculează cu relațiile (5)

Relația (4) se mai poate scrie:

$$Y(z) = Y(z) \cdot Q(z) + P(z) \quad (7)$$

În domeniul timp:

$$y(kT) = \sum_{i=0}^k q(iT) \cdot y(kT - iT) + p(kT) \quad (8)$$

pentru orice $k \leq 0$.

Înlocuind în relația (8) $q(0) = 0$ și făcând notațiile

$$y(kT) = y_k, \quad p(kT) = p_k, \quad q(iT) = q_i, \quad \text{obținem:}$$

$$y_k = \sum_{i=1}^k q_i \cdot y_{k-i} + p_k \quad (9)$$

relație de bază în metoda propusă.

Se observă că această relație are un caracter recurent și nu recursiv, cum ar părea la prima vedere.

Pentru $k \leq n$, formula (9) servește la calculul primelor $n + 1$ valori ale funcției și anume:

$$y_0 = p_0$$

$$y_1 = q_1 y_0 + p_1$$

$$y_2 = q_1 y_1 + q_2 y_0 + p_2$$

$$\dots$$

$$y_n = \sum_{i=1}^n q_i \cdot y_{n-i} + p_n,$$

(10)

are reprezintă valorile inițiale pentru formula de recurență.

Pentru $k > n$, formula (9) devine

$$y_k = \sum_{i=1}^n q_i \cdot y_{k-i}, \quad (11)$$

care este chiar formula de recurență căutată.

q. e. d.

3. Funcțiile calculabile prin formulă de recurență

În teorema enunțată s-a impus condiția ca transformata Z a funcțiilor pentru care se poate deduce o formulă de recurență să fie rațională, având gradul numărătorului mai mic sau cel mult egal cu gradul numitorului.

În continuare vom arăta acest caz este interesant din punct de vedere al studiului sistemelor dinamice.

Fie $Y(s)$ transformata Laplace a lui $y(t)$ și $Y^*(t)$ transformata Laplace a funcției eșantionate $y^*(t)$. Pentru sistemele liniare reale, $Y(s)$ este rațională în puteri ale lui s , avînd gradul numărătorului mai mic sau cel mult egal cu gradul numitorului.

Lemă

Dacă transformata Laplace $Y(s)$ a unei funcții $y(t)$ este rațională cu gradul m al numărătorului mai mic sau cel mult egal cu gradul n al numitorului, transformata Z a lui $y^*(t)$ este tot rațională, de forma :

$$Y(z) = \frac{a_m \cdot z^m + \dots + a_1 \cdot z}{b_n \cdot z^n + \dots + b_1 \cdot z + b_0} \quad (12)$$

avînd $m \leq n$.

Demonstrație

Transformata Laplace a funcției eșantionate este :

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot e^{-kTs} \quad (13)$$

Se știe că $Y(z)$ se poate obține din $Y^*(s)$ făcînd schimbarea de variabilă

$$s = \frac{1}{T} \cdot \ln z$$

$Y^*(s)$ poate fi calculată din $Y(s)$ aplicînd teorema complexă a produsului de convoluție :

$$Y^*(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} Y(\chi) \cdot \frac{1}{1 - e^{-(s-\chi) \cdot T}} d\chi \quad (14)$$

unde Γ este conturul care include polii s ai lui $Y(s)$.

Dacă $Y(s) = G(s)/H(s)$ și are n poli și m zerouri, atunci

$$Y^*(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - e^{-(s-s_k) \cdot T}} \text{Res}[Y(\chi), \chi = s_k] \quad (15)$$

și, făcînd schimbarea de variabilă,

$$Y(z) = \sum_{k=1}^n \frac{z}{z - e^{s_k T}} \text{Res}[Y(\chi), \chi = s_k] \quad (16)$$

Se observă că :

$$Y(z) = \frac{G_1(z)}{H_1(z)} \quad (17)$$

unde

$$H_1(z) = \prod_k (z - e^{s_k T})$$

și

$$G_1(z) = z G_2(z), \text{ gradul lui } G_2(z) \text{ fiind } m - 1.$$

q.e.d.

Rezultă că funcțiile de timp pentru care se obțin formule de recurență pot reprezenta semnale de ieșire pentru sistemele dinamice liniare; din punct de vedere matematic aceste funcții constituie soluții ale ecuațiilor diferențiale liniare.

Observație

Deoarece în expresia, dată în relația (12), a transformatei Z pentru această clasă de funcții, $a_0 = 0$, se constată că numărul de valori inițiale ce trebuie calculate este n și nu $n + 1$, cum a rezultat din teoremă pentru cazul general.

Exemple:

a) Fie $Y(z) = \frac{Az}{z - e^{-aT}}$, care este transformata Z a funcției $y(t) = Ae^{-at}$ eșantio-

nate, intervalul de eșantionare fiind T . Cu notațiile de mai sus:

$$m = n = 1$$

$$p_0 = A$$

$$p_i = 0 \quad i \geq 1$$

$$q_1 = e^{-aT}$$

$$q_i = 0 \quad i > 1$$

Formula de recurență este:

$$y_k = \sum_{i=1}^1 q_i \cdot y_{k-i} = q_1 y_{k-1}$$

sau

$$y_k = e^{-aT} \cdot y_{k-1}$$

cu valoarea inițială $y_0 = p_0 = A$

b) Fie

$Y(s) = \frac{z \cdot \sin wT}{z^2 - 2z \cdot \cos wT + 1}$ care este transformata Z a funcției $y(t) = \sin wt$ eșantio-

nate, intervalul de eșantionare fiind T .

Se observă că:

$$m = 1$$

$$n = 2$$

$$p_0 = 0$$

$$p_1 = \sin wT$$

$$p_i = 0 \quad i \geq 2$$

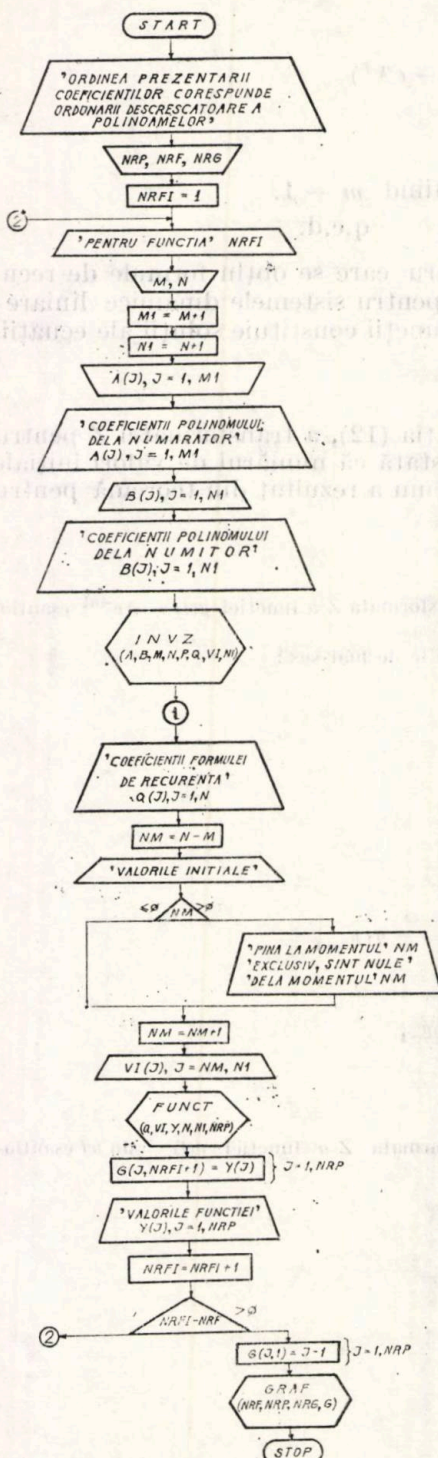


Fig. 1

$$q_0 = 0$$

$$q_1 = 2 \cdot \cos wT$$

$$q_2 = -1$$

$$q_i = 0 \quad i > 2$$

Formula de recurență este :

$$y_k = \sum_{i=1}^2 q_i \cdot y_{k-i} \text{ sau}$$

$$y_k = 2 \cdot \cos wT \cdot y_{k-1} - y_{k-2}$$

cu valorile inițiale $y_0 = 0$, $y_1 = y_2 \cdot q_1 + p_1 = \sin wT$.

4. Algoritmul

Pentru metoda prezentată a fost elaborat un program FORTRAN. Organigramele care au stat la baza scrierii programului sînt prezentate în continuare.

În figura 1 este reprezentată organigrama programului principal. Variabilele cu care operează programul principal sînt :

D : vector cu coeficienții polinomului de la numărător

B : vector cu coeficienții polinomului de la numitor

M : gradul polinomului de la numărător

N : gradul polinomului de la numitor

P : vector cu valorile p_i

Q : vector cu coeficienții formulei de recurență

VI : vector cu valorile inițiale ale funcției

NI : numărul de valori inițiale necesare

În figura 2 se prezintă subrutina INVZ, care, pe baza coeficienților polinoamelor de la numărător și numitorul fracției ce reprezintă transformata Z a funcției, calculează coeficienții formulei de recurență precum și valorile inițiale necesare aplicării formulei.

Se verifică mai întâi dacă utilizatorul a respectat condiția $M \leq N$ și dacă gradul polinomului de la numitor este într-adevăr N ($B(1) \neq 0$).

În continuare se construiesc vectorul cu valorile p_i și vectorul cu coeficienții formulei de recurență (Q și respectiv P).

Blocurile următoare prezintă schema de calcul al valorilor inițiale.

Dacă $N > M$ atunci primele $N - M$ valori inițiale sînt nule.

Dacă termenul liber al polinomului de la numărător este nul atunci numărul de valori inițiale necesare ($N1$) este numai N .

Restul de $N - (N - M)$ valori inițiale se calculează pe baza formulelor prezentate în secțiunea 2.

În această subrutină nu se determină și alte valori ale funcției deoarece în unele aplicații nu sînt necesare decît valorile inițiale și formula de recurență.

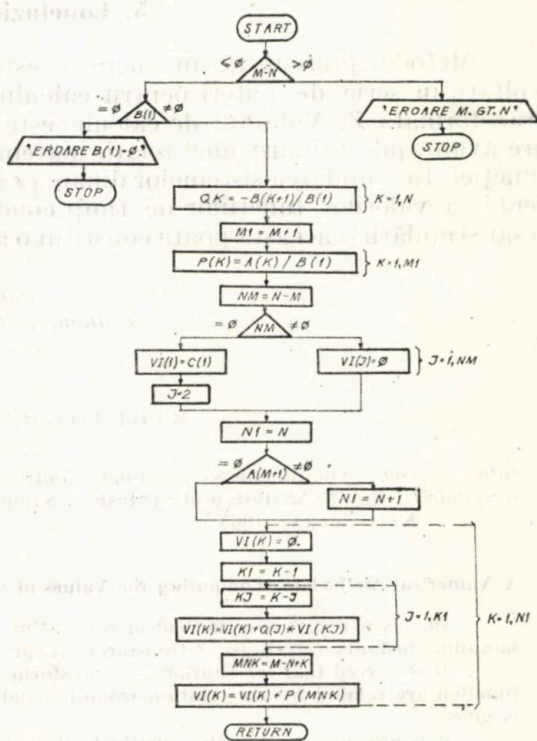


Fig. 2.

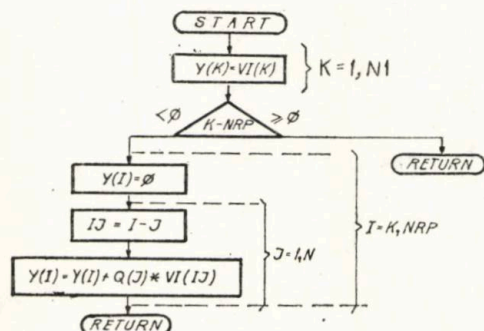


Fig. 3

În figura 3 se prezintă subrutina FUNCT, care, pe baza valorilor inițiale (VI) și a formulei de recurență (Q) calculează primele NRP valori ale funcției.

Se transferă mai întâi valorile inițiale în vectorul Y . Apoi se calculează următoarele valori ale funcției cu ajutorul formulei prezentate în secțiunea 2.

5. Concluzii

Metoda prezentată în lucrare este comparabilă cu metoda dezvoltării în serie de puteri pentru calculul valorilor unei funcții dată prin transformata Z . Volumul de calcule este același, dar metoda prezentată are avantajul stabilirii unei relații matematice pentru generarea valorilor funcției. În simularea sistemelor dinamice generarea prin formule de recurență a valorilor funcțiilor de timp conduce la reducerea timpului necesar și mulțirii și aceasta poate constitui o aplicație utilă a metodei propuse.

Catedra de calculatoare
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Julius T. Tou* — Digital and Sampled-data Control Systems. Mc Graw Hill, New York, 1959
2. *Benjamin C. Kuo* — Analysis and Synthesis of Sampled-data Control Systems. Prentice Hall, New Jersey, 1963

A Numerical Method for Computing the Values of a Time Function Given its Z -transform

In this paper, a new method of computing the values of a time function at the sampling instants, given its Z -transform, is presented.

It is proved that for a rational Z -transform, the values of the corresponding time function are related by an iteration formula, and the algorithm for its determination is given.

It is also proved that this method of evaluating the inverse Z -transform is well suited to the signals related to the linear sampled-data systems and hence the practical importance of the method.

C.Z. : 681.3.06
681.327.023

ALGORITM DE SINCRONIZARE A PROCESELOR SISTEMULUI SISIF 1

CRISTEA VALENTIN

Sincronizarea proceselor paralele asincrone constituie o problemă de actualitate a sistemelor de calcul. Lucrarea de față prezintă câteva aspecte generale ale acestei probleme și descrie modul de implementare a unui algoritm de sincronizare pentru un sistem de calcul interactiv realizat în cadrul catedrei de calculatoare a Institutului Politehnic din București.

1. Introducere

Una din părțile esențiale ale oricărui sistem de calcul modern este aceea care rezolvă conflictele între diferite procese aflate în competiție pentru resurse comune. Prezenta lucrare își propune să arate unele aspecte ale sincronizării proceselor în sistemul interactiv orientat FORTRAN SISIF—1, realizat în cadrul catedrei de calculatoare din IPB.

Structura generală a sistemului a fost prezentată în lucrarea [1], elementele sale fiind conectate ca în fig. 1. Vom reaminti, că în sistem se desfășoară simultan un număr de procese, dintre care unul de prelucrare grupată și 8 interactive. Una din sarcinile proceselor interactive este crearea unor fișiere proprii pe unul din discurile sistemului. Aceste fișiere conțin texte introduse de utilizatori de la console.

2. Procesul de transfer de date

Fiecare proces interactiv are la dispoziția sa o zonă de lucru localizată în memoria HP, pe care o gestionează independent de celelalte procese, și un fișier pe unul din discurile sistemului. Derularea proceselor interactive reclamă un număr de transferuri de informație între zona de lucru și fișier.

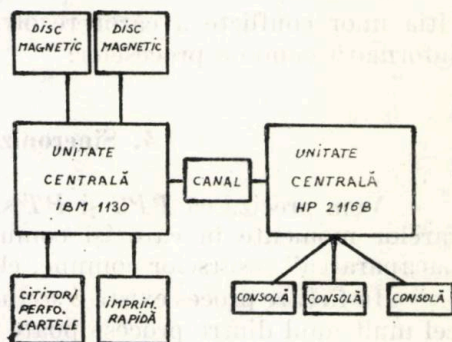


Fig. 1

Pentru executarea unui transfer, un proces interactiv va apela la procesul de transfer de date, căruia îi comunică prin memoria comună cererea sa, însoțită de parametrii necesari derulării operației. La terminarea operației cerute, procesul de transfer va anunța procesul interactiv că cererea a fost satisfăcută.

Deoarece între memoria HP, unde sînt localizate zonele de lucru, și discurile sistemului, unde se găsesc fișierele, nu există o legătură directă, derularea transferurilor între acestea reclamă existența unei zone tampon în memoria IBM.

3. Alocarea zonei de memorie IBM procesului de transfer

Crearea unui spațiu liber în memoria IBM, care să poată fi alocat procesului de transfer a ridicat probleme deosebite, datorită structurii sistemului de operare standard I.B.M.

Acesta este conceput sub forma unui „nucleu” rezistent într-o zonă fixă din memorie și a numeroase faze aduse de pe disc și lansate în execuție în funcție de împrejurări. Neexistînd posibilitatea protejării unei zone de memorie, și nici a modificării nucleului rezistent, crearea spațiului pentru transfer ar fi necesitat modificarea tuturor fazelor sistemului de operare. S-a estimat că nu se afectează considerabil procesele interactive dacă se fac modificări numai în anumite faze, de durată mai mare (fazele asamblorului, compilatorului, faza de execuție, etc).

Ca urmare zona de memorie constituind o resursă comună este pusă la dispoziția procesului de transfer (*PT*) numai în anumite perioade de timp, cînd controlul procesului de prelucrare grupată (*PPG*) se află într-una din fazele modificate. În rest, ea este utilizată de procesul de prelucrare grupată. A doua resursă folosită în comun este discul.

După cum se arată în [2], această situație poate conduce la apariția unor conflicte a căror rezolvare se realizează prin utilizarea unor informații comune proceselor.

4. Sincronizarea proceselor

Vom preciza că *PPG* și *PT* sînt „slab conectate”, deoarece, în afara rarelor momente în care își comunică explicit informații referitoare la „acapararea” resurselor comune, ele sînt independente unul față de altul.

În fiecare proces există o *secțiune critică*, în sensul că, la orice moment cel mult unul dintre procese poate fi angajat în secțiunea sa critică. Procesul *PPG* se află în secțiunea sa critică, atunci cînd controlul se află într-una din fazele nemodificate. Procesul *PT* se află în secțiunea sa critică atunci cînd execută un transfer, și deci el este acela care folosește zona de memorie.

Putem privi cele două procese ca fiind *ciclice*. Ciclul procesului *PPG* constă dintr-o succesiune de faze nemodificate (secțiunea critică) urmate

de o succesiune de faze modificate (restul procesului). În mod asemănător, ciclul procesului *PT* constă dintr-un transfer (secțiune critică), urmat de o serie de operații în care nu se folosesc resursele comune (restul procesului).

Lucrurile se prezintă asemănător la utilizarea discului, putînd distinge pe ansamblu două secțiuni critice : una referitoare la memorie, alta referitoare la disc.

Spre deosebire de situațiile prezentate în [2] în care procesele sînt egale în fața secțiunii critice, comportarea proceselor *PPG* și *PT* poate fi considerată *asimetrică*, această asimetrie fiind o consecință a particularităților sistemului : deoarece timpul în care *PPG* stă în secțiunea sa critică poate influența timpul de așteptare la consolă, se permite procesului de transfer să rezolve pe rînd toate cererile, de îndată ce a căpătat permisiunea de a utiliza memoria. Această înseamnă de fapt că procesul de transfer poate parcurge ciclul său de mai multe ori, pentru un ciclu al lui *PPG*.

Pentru sincronizarea proceselor se folosesc o serie de variabile comune, care au următoarele semnificații :

send	:	= 0	cînd memoria devine disponibilă pentru <i>PT</i>
	:	= 1	cînd <i>PT</i> permite procesului <i>PPG</i> să folosească resursa memorie
stran	:	= 0	cînd <i>PPG</i> solicită resursa memorie
	:	= 1	cînd <i>PPG</i> eliberează resursa memorie
hpbsy	:	= 0	cînd s-au epuizat solicitările resursei memorie din partea <i>PT</i>
	:	= 1	cînd apar solicitări ale resursei memorie din partea <i>PT</i>
avail	:	= 0	cînd <i>PPG</i> a eliberat resursa memorie
	:	= 1	cînd <i>PPG</i> utilizează resursa memorie
disc	:	= 0	resursa disc este utilizată de unul dintre cele două procese
	:	= 1	resursa disc este liberă
excl	—		este folosită la excluderea mutuală între cele două procese pe durata inspectării și modificării variabilelor comune

În plus, la nivelul comunicației între procesul de transfer și procesele interactive se folosește un vector de cereri (cerere [1 : *N*]), fiecare element al acestuia corespunzînd unui proces interactiv. Pentru procesul *n* :

cerere [*n*] := 1 procesul *n* face o cerere de transfer
 := 0 cererea de transfer a procesului *n* a fost satisfăcută de *PT*.

Algoritmul care urmează descrie în termenii utilizați în [2] rezolvarea conflictelor între procese :

```
begin integer array cerere [1 : N];
integer hpbsy, avail, stran, send, disc, excl;
hpbsy := 0; avail := 1; stran := 0; send := 1; disc := 1;
excl := 1;
```



```

for i := 1 step 1 until N do cerere [i] := 0;
parbegin proces PPG: begin A1: secț critică memorie PPG;
    send := 0; stran := 1;
    P (excl);
    avail := 0;
    V (excl);
    rest proces PPG;
    stran := 0;
    P (excl);
    if hpbsy = 0 then begin send := 1;
        avail := 1 end;
    V (excl);
    B1: if send = 0 then goto B1; goto A1
    end;
proces 1 : begin ..... end;
    :
    :
proces n : begin Pn: rest proces n;
    cerere [n] := 1;
    Rn: if cerere [n] = 1 then goto Rn;
    end;
    :
    :
proces N : begin ..... end;
proces PT: begin A2: for k := 1 step 1 until N do
    begin if cerere [k] = 1 then goto CEXTR end;
    P (excl);
    hpbsy := 0;
    if stran = 1 then goto B2;
    send := 1;
    B2: V (excl);
    goto A2;
    CEXTR: P (excl);
    hpbsy := 1;
    if stran = 1 then avail := 0;
    V (excl);
    WAIT: if avail = 1 then goto WAIT;
    secț critică memorie PT;
    P (disc);
    secț critică disc;
    V (disc);
    cerere [k] := 0; goto A2
    end;
parend
end

```

5. Aspecte ale implementării algoritmului

Algoritmul diferă de soluțiile prezentate în [2] care prezintă cazul unor procese simetrice cît și de cele din [3] unde procesele considerate asimetrice au o comportare diferită de cele din sistemul SISIF 1.

Urmărind desfășurarea procesului *PT*, s-ar părea că acțiunea acestuia de modificare a lui *avail* (în secvența dintre *CEXTR* și *WAIT*) este inutilă, deoarece modificarea acestei variabile se face în procesul *PPG* (după secțiunea critică). Vom menționa că, datorită unor condiții hardware, în anumite perioade de timp instrucțiunea *avail* := 0 din *PPG* este inefectivă. Din acest motiv, acțiunea lui *PT* de a corecta eventual valoarea lui *avail* înainte de a intra în secțiunea critică este justificată.

Observăm, de asemenea, că variabilele *send* și *avail* au același valori pe parcursul derulării proceselor. Algoritmul nu se modifică dacă vom înlocui peste tot pe *send* cu *avail* și vom elimina instrucțiunile redundante. Această dedublare a variabilei *send* a fost făcută tot datorită unor particularități ale echipamentului pe care a fost implementat algoritmul.

Soluția prezentată este „sigură”, în sensul că cele două procese, *PT* și *PPG*, nu se pot afla niciodată simultan în secțiunile lor critice. Cînd *PT* se află în secțiunea sa critică *avail* este 0. Pentru ca *PPG* să intre și el în secțiunea sa critică ar trebui ca *avail* (sau *send*) să fie 1. Dar *PPG* nu poate atribui variabilei *avail* această valoare decît dacă *hpbsy* = 0, condiție nesatisfăcută atunci cînd *PT* se găsește în secțiunea sa critică.

Se mai poate observa că fiecare proces poate aștepta un timp nedefinit în fața secțiunii critice. În cazul procesului *PPG* așteptarea implică testarea variabilei de stare *send*, lucru care se realizează în afara zonelor de excludere mutuală delimitate de operațiile *P* și *V* asupra lui *excl*. Acest lucru permite modificarea lui *send* de către procesul *PT*. Facem precizarea că prin hardware se asigură că, în timpul testului, procesul *PPG* va găsi în *send* fie valoarea înainte de modificare, fie valoarea după modificare, ceea ce este în deplin acord cu cerințele specificate de Dijkstra în [2]. Și procesul *PT* poate aștepta în fața secțiunii sale critice, testînd *avail*, cele spuse mai sus rămînînd valabile și în acest caz. Deoarece, în mod normal, procesele petrec în secțiunile critice un timp limitat, nu poate fi vorba de o blocare totală a proceselor în bucla de test din fața secțiunilor critice.

În altă ordine de idei, variabila *avail* este aceea care dă posibilitatea procesului *PT* să execute mai multe cicluri, satisfăcînd toate cererile de transfer marcate la un moment dat. Există o dîosebire între semnificația acestei variabile și cea a variabilei *stran*, care poate fi scoasă în evidență prin următoarele precizări :

- *stran* indică dacă *PPG* solicită sau eliberează resursa memorie
- *avail* indică dacă *PPG* utilizează sau a eliberat resursa memorie

Deși *stran* poate indica la un moment dat că *PPG* solicită resursa memorie, prin *avail* se precizează dacă această solicitare a fost satisfă-

cută sau nu. Dacă avai arată că *PPG* nu utilizează resursa memorie procesul *PT* poate servi cererile de transfer.

Deși nu ne propunem să discutăm toate problemele legate de implementarea algoritmului, vom mai preciza câteva elemente legate de realizarea operațiilor *P* și *V*. O idee de realizare a acestei operații se găsește în [4], unde se prezintă o instrucțiune notată *PRO*-tect, a cărei funcție este de a asigura că pentru o scurtă perioadă de timp după execuția sa :

— procesul care execută *PRO* nu poate pierde controlul procesului alocat lui, și

— nici un alt *PRO* nu poate fi executat ; dacă un alt proces încearcă să execute un *PRO*, el este forțat să aștepte până la încetarea efectului instrucțiunii *PRO* curente.

Soluția adoptată în sistemul *SISIF*—1, este de a utiliza două instrucțiuni notate *CLFO* și *STFO* : prima are același efect ca instrucțiunea *PRO* descrisă mai sus, cu excepția faptului că efectul ei nu este limitat în timp, ci se extinde până la execuția unei instrucțiuni *STFO*. Privind aceste instrucțiuni prin prisma efectelor lor, le putem considera ca operații *P* și *V* aplicate unor semafoare binare.

6. Concluzii

Algoritmul prezentat, a fost implementat și testat la execuție, dovedindu-se astfel corectitudinea sa. Deși această implementare este particulară, referindu-se la un sistem existent la catedra de calculatoare, descrierea algoritmului în termeni generali este utilă în vederea abordării unor probleme similare care pot apărea în proiectarea altor sisteme asemănătoare.

Catedra de calculatoare

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. P. Dimo, I. Athanasiu, V. Cristea, F. Moldoveanu, L. Serbănași *SISIF* — 1 — sistem interactiv cu acces multiplu orientat FORTRAN. Comunicare la sesiunea Academiei RSR, oct 1973
2. E. W. Dijkstra Co-operating Sequential Processes, Programming Languages, Academic Press, London, 1968.
3. P. J. Courtois, F. Heymans Concurrent Control with „Readers” and Writers, Comm. of the ACM, oct. 1971, nr. 10
4. B. W. Lampson A scheduling Philosophy for Multiprocessing Systems, in Comm. of the ACM nr. 5, may 1968

An Algorithm for Process Synchronization for the Sisif 1 System

The synchronisation of parallel processes is one of the major problems currently tackled in the field of computer science. This work discusses general aspects of this problem and underlines the implementation techniques of a synchronisation algorithm used in an interactive system designed at the Polytechnical Institute of Bucharest

C.Z.: 62 — 82

METODE DE ANALIZĂ A SISTEMULUI HIDRAULIC POMPA-MOTOR ROTATIV*

ILIE CATANĂ

Lucrarea se ocupă cu determinarea modelului matematic al subsistemului hidraulic format dintr-o pompă cu debit reglabil și servomotor, rotativ, stabilind diferite metode de analiză a regimului dinamic.

Se tratează metodologia de obținere a ecuațiilor de debite în regim dinamic și de cupluri la sarcină care stau la baza metodei schemelor bloc, a grafurilor de semnal, și a variabilelor de stare, prezentate în continuare în această lucrare.

Se evidențiază particularitățile fiecărei metode și se determină în final funcțiile de transfer corespunzătoare folosite la analiza regimului dinamic sau în sinteza sistemului.

Ca o noutate lucrarea prezintă metoda variabilelor de stare folosită pentru prima dată la analiza sistemelor hidraulice.

1. Introducere

Folosirea acționărilor hidraulice în cadrul sistemelor de automatizare moderne s-a impus definitiv în numeroase aplicații industriale unde oferă o comportare statică și dinamică excelentă față de alte tipuri de acționări. Astfel, acționările hidraulice au în prezent o largă utilizare în, industria aerospațială, a tehnicii militare, în construcția mașinilor unelte în foraj și extracție, la mașini de transportat și ridicat, automobile, tractoare și mașini agricole etc.

În toate aceste aplicații se poate realiza ușor, în limite largi, o variație continuă a forțelor, cuplurilor, vitezei și poziției, cu o precizie ridicată folosind componente care oferă sistemului un raport putere-greutate foarte mare în condițiile unei fiabilități ridicate.

În multe sisteme automate componentele hidraulice reprezintă elemente finale de forță și cuplu care convertesc un semnal de intrare de nivel energetic scăzut într-un semnal de ieșire de mare putere, ușor reglabil.

Odată cu perfecționarea constructivă a componentelor hidraulice s-a trecut la folosirea unor structuri de sisteme în care acestea conlucrează cu elemente electrice sau electronice și care oferă o mare flexibilitate în realizarea celor mai dificile legi de reglare asigurând o comportare dinamică net superioară.

Un sistem hidraulic care are o largă utilizare în multe din aplicațiile menționate este alcătuit dintr-o pompă cu debit reglabil și un motor

* Manuscris predat redacției la data de 22 octombrie 1976.

hidraulic rotativ și este cunoscut în practică sub numele de transmisie hidrostatică, figura 1.

Acest sistem se utilizează în aplicațiile care necesită puteri mari la ieșire și se caracterizează printr-un randament ridicat (peste 94%).

Comanda pompei cu debit reglabil se realizează mecanic electric, hidraulic sau combinat în funcție de contextul în care se încadrează acest ansamblu hidraulic.

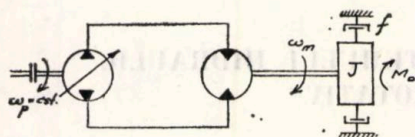


Fig. 1

În lucrarea de față ne propunem să stabilim modelul matematic care descrie comportarea acestui sistem hidraulic în circuit deschis, cu ajutorul căruia să putem face o analiză a regimului dinamic și static.

2. Modelul matematic al sistemului pompă-servomotor rotativ

Mărimea de intrare în acest sistem este deschiderea reglabilă u a pompei care modifică debitul specific refulat de pompă la o rotație. Mărimea de ieșire este viteza unghiulară ω_m a motorului hidraulic sau poziția unghiulară θ_m a acestuia, considerind toate elementele cinematice ale sarcinii reduse la arborele motorului.

Modelul matematic căutat exprimă dependența dintre mărimea de ieșire θ_m și mărimea de intrare u și se prezintă în general sub forma unei ecuații diferențiale.

Deducerea acestui model matematic se bazează pe stabilirea ecuațiilor de debite la pompă și servomotor furnizate de teorema continuității mediului fluid precum și de ecuația de echilibru dinamic al cuplurilor ce acționează la sarcină.

Pentru a pune în evidență toate mărimile care intervin în cadrul acestui sistem vom reprezenta transmisia hidrostatică ca în figura 2.

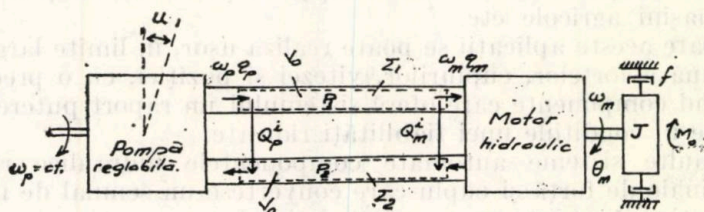


Fig. 2

Ecuațiile de continuitate a fluidului de lucru aplicate în raport cu suprafețele de control Σ_1 și Σ_2 furnizează ecuațiile de debite în regim dinamic care caracterizează sistemul pompă-motor hidraulic :

$$\omega_p q_p - \alpha_p^i (p_1 - p_2) - \alpha_p^e p_1 - \alpha_m^i (p_1 - p_2) - \alpha_m^e p_1 - q_m \omega_m = \frac{V_0}{E} \frac{dp_1}{dt} \quad (1)$$

$$\omega_m q_m + \alpha_m^i (p_1 - p_2) + \alpha_p^i (p_1 - p_2) - \alpha_m^e p_2 - \alpha_p^e p_2 - \omega_p q_p = \frac{V_0}{E} \frac{dp_2}{dt} \quad (2)$$

Scăzînd cele două ecuații obținem :

$$\omega_p q_p - \alpha_0 \Delta p - \omega_m q_m = \frac{V_0}{2E} \frac{d(\Delta p)}{dt} \quad (3)$$

unde :

$$\alpha_0 = \alpha_p^i + \alpha_m^i + \frac{1}{2} (\alpha_m^e + \alpha_p^e)$$

$$\Delta p = p_1 - p_2.$$

Cuplul activ generat de motorul hidraulic datorită presiunii create de pompă este dat de relația :

$$M_a = q_m (p_1 - p_2) \quad (4)$$

Aplicînd ecuația de echilibru dinamic al cuplurilor la arborele servomotorului, obținem :

$$M_a = J \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + f \frac{d\theta_m}{dt} + M_0. \quad (5)$$

3. Analiza sistemului hidraulic prin metoda schemelor bloc

Folosind ecuațiile (3), (4), (5) care descriu complet și univoc comportarea acestui sistem hidraulic construim schema funcțională corespunzătoare din figura 3.

Schema bloc obținută este utilă atît pentru stabilirea funcției de transfer cit și pentru modelarea sistemului cu ajutorul calculatorului analogic.

Aplicînd algebra schemelor bloc se ajunge la o schemă simplificată care permite să stabilim mărimea la ieșire funcție de cele două mărimi

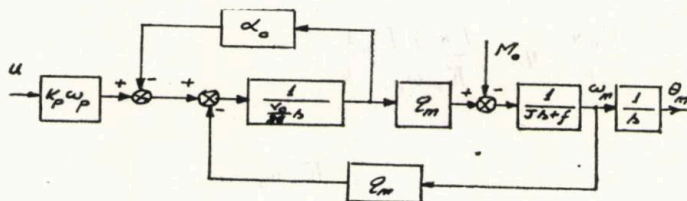


Fig. 3

de intrare în sistem reprezentate de u și M_0 respectiv să obținem relația :

$$\theta_m(s) = \frac{\frac{k_p \omega_p}{q_m} u(s) - \frac{\alpha_0}{q_m^2} \left(1 + \frac{V_0}{2E \alpha_0} s \right) M_0(s)}{\frac{V_0 J}{2E q_m^2} s^3 + \left(\frac{\alpha_0 J}{q_m^2} + \frac{f V_0}{2E q_m^2} \right) s^2 + \left(1 + \frac{f \alpha_0}{q_m^2} \right) s}. \quad (7)$$

4. Analiza sistemului hidraulic prin metoda grafelor de semnal

Pentru a stabili mai rapid funcția de transfer a sistemului organizăm ecuațiile (3), (4) și (5) sub forma grafului de semnal asociat sistemului ca în figura 4.

Aplicând principiul superpoziției, obținem :

$$\theta_m(s) = H_1(s) u(s) + H_2(s) M_0(s) \quad (7)$$

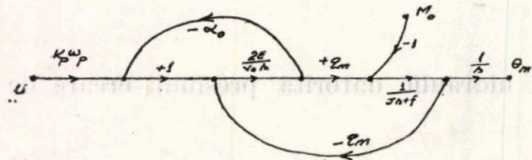


Fig. 4

Pentru determinarea celor două funcții de transfer vom aplica regula lui Masson, succesiv pentru fiecare intrare în parte considerînd pe cealaltă nulă

$$H_1(s) = \frac{\sum T_k \Delta_k}{\Delta} \quad (8)$$

unde :

$\Delta = 1 - \Sigma L_1 + \Sigma L_2 - \Sigma L_4$ reprezintă determinantul grafului ;

T_k — produsul transmitanței căii directe k ;

Δ_k — determinantul subgrafului obținut prin înlăturarea laturilor căii directe k .

În aceste condiții avem :

$$\Delta = \frac{2E q_m^2}{V_0 s (Js + f)} \left[\frac{V_0 J}{2E q_m^2} s^2 + \left(\frac{V_0 f}{2E q_m^2} + \frac{\alpha_0 J}{q_m^2} \right) s + \left(1 + \frac{f \alpha_0}{q_m^2} \right) \right].$$

$$\sum \Delta_k T_k = \frac{V_0 s}{2E} \cdot q_m \cdot \frac{Js + f}{K_p \omega_p} \cdot \frac{1}{s}.$$

Obținem :

$$H_1(s) = \frac{\frac{K_p \omega_p}{q_m}}{s \left[\frac{V_0 J}{2E q_m^2} + \left(\frac{V_0 f}{2E q_m^2} + \frac{\alpha_0 J}{q_m^2} \right) s + \left(1 + \frac{f \alpha_0}{q_m^2} \right) \right]} \quad (9)$$

Procedind similar pentru cealaltă mărime de intrare obținem :

$$\sum \Delta_k T_k = \frac{-1}{s(Js + f)} \cdot \frac{2E \alpha_0}{V_0 s} \left(1 + \frac{2E \alpha_0}{V_0} s \right)$$

Determinantul grafului rămâne neschimbat așa că putem scrie :

$$H_2(s) = \frac{\sum \Delta_k T_k}{\Delta} = - \frac{\frac{\alpha_0}{q_m^2} \left(1 + \frac{V_0}{2E \alpha_0} s \right)}{s \left[\frac{V_0 J}{2 E q_m} s^2 + \left(\frac{\alpha_0 J}{q_m^2} + \frac{f V_0}{2 E q_m^2} \right) s + \left(1 + \frac{f \alpha_0}{q_m^2} \right) \right]} \quad (10)$$

Relațiile (7), (9) și (10) permit stabilirea răspunsului căutat care evident este același cu cel obținut în relația (6).

5. Reprezentarea sistemului hidraulic în spațiul variabilelor de stare

Metoda variabilelor de stare folosită a analiza sistemelor face parte din mijloacele moderne de analiză și oferă posibilitatea utilizării unor metode numerice de studiu care facilitează rezolvarea problemei cu ajutorul calculatorului electronic.

În plus există posibilitatea de a cunoaște evoluția în timp nu numai a mărimii de ieșire dar și a altor mărimi importante care trebuie cunoscute la proiectarea optimă a sistemului.

Vom alege pentru descrierea comportării acestui sistem hidraulic variabile fizice, direct măsurabile care prezintă cea mai mare importanță în comportarea dinamică și statică a acestei transmisii hidrostatice. Definim vectorul de stare pe componentele :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_m \\ x_2 &= \dot{\theta}_m \\ x_4 &= \Delta P. \end{aligned} \quad (11)$$

În aceste condiții relațiile (3), (4), și (5) capătă forma matricial-vectorială de mai jos :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{q_m}{V_0} \\ 0 & -\frac{2 E q_m}{V_0} & -\frac{2 E \alpha_0}{V_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega_p K_p 2 E}{V_0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} M_0 \quad (12)$$

$$\theta_m = y = x_1 = [100] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Vom introduce următoarele notații ale matricelor care intervin în ecuațiile (12) și (13) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{q_m}{V_0} \\ 0 & -\frac{2Eq_m}{V_0} & -\frac{2E\alpha_0}{V_0} \end{bmatrix} ; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\omega_p K_p E}{V_0} \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

În aceste condiții sistemul matricial-vectorial se scrie :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AY + B_u \cdot u + B_p \cdot M_0 \\ y &= C^T X. \end{aligned} \quad (14)$$

Se remarcă faptul că elementele matricelor din modelul matematic care descrie comportarea dinamică a sistemului hidraulic sint exprimate în funcție de parametrii constructivi și funcționali proprii acestui sistem fapt care oferă avantajul determinării mai rapide a influenței pe care aceștia o au asupra sistemului.

În condiții inițiale nule din ecuația (14) se obține :

$$H_1(s) = C^T [sI - A]^{-1} B_u, \quad \text{respectiv,}$$

$$H_2(s) = C^T [sI - A]^{-1} B_p.$$

Vom obține aceleași expresii date în relațiile (9) și (10). Dacă notăm cu :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2Eq_m^2}{V_0 J}} \quad (15)$$

$$\zeta = \frac{\alpha_0}{2q_m} \sqrt{\frac{2EJ}{V_0}} + \frac{f}{2q_m} \sqrt{\frac{2EJ}{V_0}} \quad (16)$$

pulsația naturală, respectiv factorul de amortizare și dacă ținem cont că în practică termenul $\frac{f\alpha_0}{q_m^2}$ este mult subunitar atunci obținem forma

definitivă pentru funcțiile de transfer care stau la baza operațiilor de analiză și sinteză a sistemului hidraulic :

$$\frac{\theta_m(s)}{u(s)} = \frac{\frac{q_m}{K_p \omega_p}}{s \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2J}{\omega_n} s + 1 \right)} \quad (17)$$

$$\frac{\theta_m(s)}{M_0(s)} = - \frac{\frac{\alpha_0}{q_m^2} \left(1 + \frac{V_0}{2E \alpha_0} s \right)}{s \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2J}{\omega_n} s + 1 \right)} \quad (18)$$

Considerind ca mărime de ieșire viteza unghiulară ω_m se obțin ușor funcțiile de transfer corespunzătoare.

Am prezentat modul în care se obține modelul matematic al sistemului hidraulic pompă-motor rotativ.

Utilizarea uneia dintre metodele prezentate este legată de scopul concret al analizei și de mijloace de calcul ce ne stau la dispoziție.

Cînd avem la dispoziție un calculator electronic iar subsistemul hidraulic este inclus într-o configurație mai complexă este util să folosim reprezentarea în spațiul variabilelor de stare sub forma matricial-vectorială deosebit de accesibilă analizei cu ajutorul calculatorului electronic numeric.

Atunci cînd dorim să facem o analiză prin simularea sistemului cu ajutorul unui calculator analogic cel mai indicat este să folosim metoda schemelor bloc care sugerează cel mai bine structura operațională a circuitelor de simulare. În fine atunci cînd dorim să stabilim rapid funcția de transfer corespunzătoare a unui sistem hidraulic este util să trasăm graful de semnal asociat sistemului și să aplicăm regula lui Masson.

Metodele de analiză prezentate aici se bazează pe comportarea liniară a componentelor, lucru care reprezintă o aproximație a comportării reale a sistemelor.

În cazul de față analiza liniarizată reprezintă o descriere destul de exactă, acest sistem se comportă în practică destul de liniar, fapt confirmat experimental.

7. Notații

În cuprinsul lucrării au fost folosite următoarele notații :

V_0 este volumul de ulei cuprins între pompă și servomotor pentru fiecare din cele două linii de transmitere a fluidului de lucru inclusiv volumele camerelor pompei și motorului ;

p_1 — presiunea din conducta de înaltă presiune ;

p_2 — presiunea din conducta de joasă presiune ;

$\alpha_p^i, \alpha_p^e, \alpha_m^i, \alpha_m^e$ — sînt coeficienți de pierderi ;

q_m, q_p — debitele specifice la pompă și motor ;

- ω_p, ω_m — viteza unghiulară a pompei și motorului hidraulic;
 α_0 — coeficientul total de pierderi din motor;
 J — momentul de inerție redus la arboarele motorului;
 f — coeficientul de frecări viscoase la sarcină;
 M_0 — cuplul rezistent la sarcină;
 A — matricea coeficienților;
 B_u, B_p — matrice de intrare;
 C — matricea de ieșire;
 $H_1(s)$ — funcția de transfer a sistemului față de mărimea de intrare;
 $H_2(s)$ — funcția de transfer a sistemului față de mărimea de perturbație.

Catedra de automatică I

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. S. Florea, M. Stănescu, I. Catană — Echipamente de automatizare hidraulice și pneumatice. Îndrumar de proiectare I.P.B. 1975.
2. H. Merritt — Hydraulic Control Systems. 1976.
3. I. Catană — Metode de analiză și sinteză a sistemelor electrohidraulice. Referat la teza de doctorat 1976.
4. S. Florea — Sisteme automate hidraulice și pneumatice, note de curs.

Analysis of the Hydraulic System: Pump-motor

This paper is dealing with the construction of the mathematical model of hydraulic systems consists of pumps and hydraulic motors.

In the first part is treated some theoretical aspects of mechanics of fluids which are employed in the dynamics of hydraulic systems.

Then is presented the classical procedures used in automatic control field for analysis and synthesis of systems.

Finally, for the first time in this field is employed the state variables method which offers to research workers and designers a synthetic treatment of such problems.

C.Z. : 621.311.2.004

ANALIZA STATISTICĂ A FIABILITĂȚII GRUPURILOR ENERGETICE DE MARE PUTERE*

N. DĂNILĂ, C. IONESCU

Lucrarea prezintă o metodă grafică și analitică pentru determinarea și testarea funcției de repartiție a timpului de funcționare și reparare neîntreruptă a echipamentelor energetice. Se prezintă un algoritm și un program de calcul aplicat unui grup turbo-generator de 300 MW. Programul testează următoarele funcții de repartiție: normală, log-normală, Weibull, exponențială și Stein-Ionescu cu ajutorul testului Kolmogorov.

1. Metodă de determinare a tipului de funcție de repartiție pentru duratele de funcționare și de restabilire

Echipamentele energetice reprezintă instalații complexe și eterogene a căror funcționare influențează direct toate ramurile economiei naționale consumatoare de energie electrică și termică. Comportarea lor în exploatare constituie de aceea obiectul unor analize atente pentru optimizarea exploatării lor.

Parametrul de bază care reflectă calitatea echipamentelor și exploatării este fiabilitatea.

Majoritatea echipamentelor energetice nu pot fi însă supuse testărilor pentru determinarea indicatorilor de fiabilitate deoarece :

- necesită instalații voluminoase și costisitoare;
- necesită durate de timp comparabile cu durata de viață sau cel puțin cu durata dintre două reparații capitale consecutive;
- nu reprezintă produse de mare serie (cazane, turbine, preîncălzitoare etc);
- durata uzurii morale este mai mică decât cea a duratei de viață.

Aceste considerate conduc la necesitatea utilizării unor informații privind comportarea în exploatare a unor echipamente energetice pentru estimarea comportării altora asemănătoare (provenite de la același firme și având în general aceeași parametri).

În acest fel se pot calcula indicatorii de fiabilitate pe tipuri de echipamente care să permită evaluări corespunzătoare în calculele de proiectare și prognoză. De asemenea, analiza comportării în exploatare din punct de vedere fiabilistic este necesară și pentru stabilirea politicii optime de întreținere și reparație și deci pentru funcționarea economică a lor.

Comportarea în exploatare a blocurilor energetice reprezintă o succesiune de stări de funcționare, avarie, reparații planificate, rezervă.

* Manuscris predat redacției la data de 2 februarie 1975.

Într-o primă aproximație se poate considera că perioadele de reparații planificate, întreținere și rezervă sînt mărimi deterministe. În acest caz se cunoaște din literatura de specialitate că perioadele de funcționare și reparare neîntreruptă, perioadele cumulate de funcționare, numărul de avarii sînt variabile aleatorii caracterizate de diferite funcții de repartiție.

Perioadele de funcționare și reparare neîntreruptă constituie perioadele de timp primare care structurează celelalte perioade de timp semnificative. De aceea determinarea funcțiilor lor de repartiție constituie obiectul general al cercetărilor. În prezent în calculele de fiabilitate la nivel de proiectare s-a considerat acceptabilă ipoteza exponențialității acestor funcții de repartiție.

Pentru analiza comportării blocurilor energetice, în scopul unor prognoze pe termen scurt sau pentru optimizarea politicii de reparații, această ipoteză nu este suficientă. Este necesară verificarea ei, stabilirea nivelului de risc în cazul acceptării ei sau în caz contrar utilizarea altor funcții de repartiție.

În acest scop se propune utilizarea unui algoritm și program de calcul numit TESTE — pentru determinarea tipului de funcție de repartiție a perioadelor de funcționare și reparare neîntreruptă. Schema logică a algoritmului este prezentată în fig. 1.

Secvențele $S_1, \dots, S_{10}$ au următoarele semnificații :

- S_1 — introducerea datelor primare sub forma selecției de volum n $X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ și a numărului de tipuri de funcții de repartiție ipotetice;
- S_2 — construirea funcției empirice de repartiție;
- S_4 — transpunerea funcției empirice de repartiție în sisteme de coordonate în care funcțiile de repartiție ipotetice reprezintă drepte;
- S_3 — aplicarea metodei celor mai mici pătrate pentru estimarea parametrilor funcțiilor de repartiție ipotetice;
- S_5 — vizualizarea valorilor funcției empirice de repartiție pe hîrțile de probabilitate a repartițiilor ipotetice (în cazul în care se consideră necesară și o analiză grafică);
- S_6 — aplicarea testului Kolmogorov pentru stabilirea funcției de repartiție ipotetice care reflectă cel mai fidel selecția;
- S_7 — vizualizarea statisticii D_n, D_n^+, D_n^- și $D_n(\alpha)$ a testului Kolmogorov.

2. Aplicarea programului TESTE pentru determinarea tipului de funcție de repartiție a perioadelor de funcționare și reparare neîntreruptă a unui bloc de 315 MW

Din analiza rapoartelor de exploatare au rezultat următoarele selecții :

- timp de reparare neîntreruptă (minute)

X_{52} (9565, 1407, 1305, 1940, 703, 382, 248, 245, 1201, 380, 1340, 455, 205, 277, 800, 430, 430, 320, 275, 660, 6826, 83196, 95, 3305, 355, 85, 5, 2, 19100, 19, 122, 290, 12760, 221, 5, 295, 9278, 845, 93, 1170, 13670, 426, 12045, 100, 105, 1965, 425, 303, 12, 236, 120, 3560)

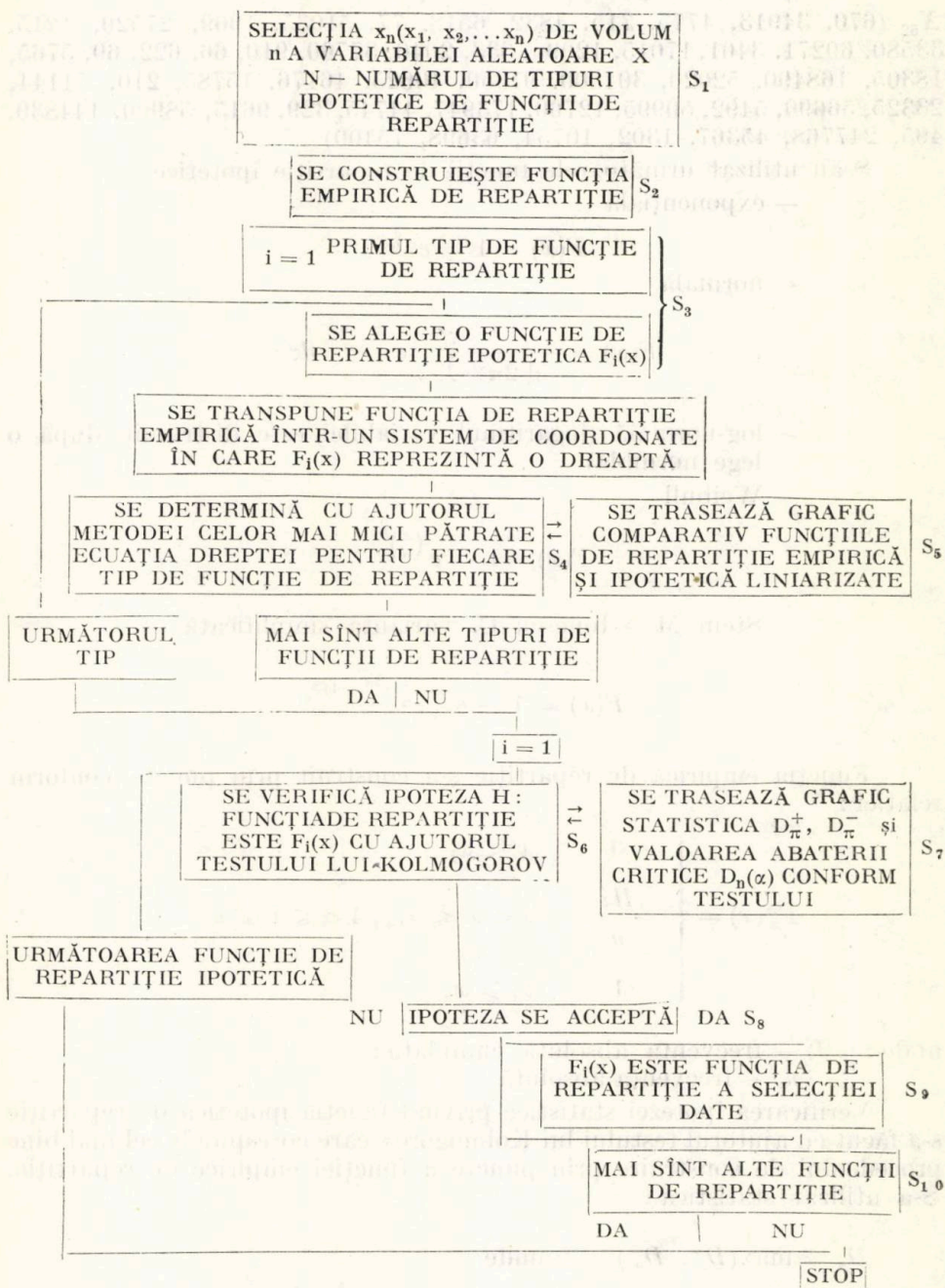


Fig. 1. SCHEMA LOGICĂ A ALGORITMULUI DE ESTIMARE A TIPULUI DE FUNCȚIE DE REPARTIȚIE

— timp de funcționare neîntreruptă (minute)

X_{52} (670, 34913, 4775, 715, 4832, 6518, 77, 51035, 1969, 27520, 1215, 33580, 60271, 3401, 17015, 12095, 333, 2040, 37760, 910, 66, 622, 60, 5765, 18305, 168490, 52020, 304500, 91350, 40625, 46176, 15785, 210, 51144, 23325, 56690, 5492, 50995, 12760, 173947, 44745, 329, 9615, 58900, 144830, 495, 247768, 45367, 1302, 10754, 63698, 75400)

S-au utilizat următoarele funcții de repartiție ipotetice :

— exponențială

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

— normală

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz$$

— log-normală (logaritmul variabilei este distribuit după o lege normală)

— Weibull

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$$

— Stein M — Ionescu C, varianta simplificată

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(e^{\beta x} - 1)}$$

Funcția empirică de repartiție s-a construit prin puncte conform relației :

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{H_i}{n} & x < x \leq x_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ 1 & x_i \geq x_n \end{cases}$$

unde : H_i — frecvența absolută cumulată ;

n_i — frecvența absolută.

Verificarea ipotezei statistice privind funcția ipotetică de repartiție s-a făcut cu ajutorul testului lui Kolmogorov care corespunde cel mai bine procedurii de construire prin puncte a funcției empirice de repartiție. S-a utilizat statistica :

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-) \quad \text{unde}$$

$$D_n^+ = \max_{1 \leq k \leq n} \left[\frac{H_k}{n} - F(x_k) \right]$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq k \leq x} \left[F(x_k) - \frac{H_{k-1}}{n} \right] \quad \text{unde}$$

D_n — abaterea funcției empirice de repartiție de la funcția de repartiție ipotetică.

Valoarea critică a abaterii s-a calculat cu relația :

$$D_n(\alpha) = \frac{K(z)}{\sqrt{n}} \quad (\text{valabilă în general pentru } n \geq 10).$$

$K_z(x)$ s-a considerat pentru nivelul de semnificație $\alpha = 0,001$

În urma aplicării testului Kolmogorov a rezultat că pentru selecțiile studiate funcțiile de repartiție care le reflectă cel mai fidel sînt :

- Weibull și log-normală pentru timpul de funcționare neîntre-ruptă
- Log-normală și Weibull pentru timpul de reparare neîntre-ruptă.

Concluzii

În lucrare se stabilește o metodă de determinare a tipului de funcție de repartiție pentru duratele de funcționare și respectiv pentru duratele de restabilire și se propune un algoritm grafo-analitic de testare.

Algoritmul propus a fost aplicat unei selecții rezultate din exploatarea unui grup de 300 MW. În urma analizei a rezultat că repartiția exponențială nu caracterizează selecția studiată și deci pentru folosirea ei este necesar să se precizeze riscul utilizării ei. Rezultatul obținut depinde de modul de înregistrare al evenimentelor în exploatare și de modul de selectare al lor.

Catedra de centrale electrice

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

L'analyse statistique de la fiabilité d'équipements energetiques de grande puissance

Le travail presente une méthode graphique et analytique pour determiner et tester la fonction de répartition du temps de fonctionnement et rétablissement des équipements energetiques. Se presente un algorithme et un program de calcul appliqué à un groupe turbogenerateur de 300 MW. Le program test les suivantes fonctions de répartition : normale, log-normale, Weibull, exponentielle et Stein-Ionescu avec le test Kolmogorov.

$$W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \quad \text{and} \quad \left[\frac{W}{n} \right]^{1/2} = \frac{1}{n^{1/2}} \left[\sum_{i=1}^n W_i \right]^{1/2}$$

where W_i is the i th component of the vector W and n is the number of components. The vector W is defined as follows:

$$W(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i(x) \quad \text{where } W_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n W_{ij}(x)$$

where $W_i(x)$ is the i th component of the vector W and n is the number of components. The vector W is defined as follows:

where $W_i(x)$ is the i th component of the vector W and n is the number of components. The vector W is defined as follows:

Conclusion

In this paper we have presented a method for determining the optimal number of components in a vector W . The method is based on the assumption that the components of W are independent and identically distributed. The method is applied to the data in Table 1. The results are shown in Table 2. The optimal number of components is 10.

The authors would like to thank the following people for their assistance in the preparation of this paper:

The authors would like to thank the following people for their assistance in the preparation of this paper:

The authors would like to thank the following people for their assistance in the preparation of this paper:

C.Z. : 621.64
532.5

OBSERVAȚII ASUPRA METODEI LUI RAYLEIGH A ANALIZEI DIMENSIONALE ȘI ASUPRA RELAȚIEI INTEGRALE A STRATULUI LIMITĂ

DAN GH. IONESCU

Se prezintă două noi demonstrații privind: 1) Metoda lui Rayleigh a analizei dimensionale; 2) Ecuația integrală a stratului limită.

Urmărind a contribui la îmbunătățirea formei cursurilor de *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice* predate în cadrul Institutului politehnic din București, propunem în cele ce urmează două prezentări, pe care le credem noi, privind metoda lui Rayleigh folosită în analiza dimensională și relația integrală a stratului limită.

1. Metoda Rayleigh a analizei dimensionale

De obicei, chiar în cărțile dedicate exclusiv analizei dimensionale, metoda lui Rayleigh este prezentată numai prin exemple concrete. Propunem următoarea prezentare generală a acestei metode.

Problema analizei dimensionale este următoarea: să se determine forma funcției

$$A_1 = f(A_2, A_3, \dots, A_p), \quad (1)$$

care exprimă, în cadrul unui anumit fenomen fizic, dependența mărimii fizice A_1 de mărimile fizice $A_2, A_3, \dots, A_p$. Metoda lui Rayleigh este bazată pe teorema de aproximare a lui Weierstrass: dacă funcția (1) este continuă pentru $\alpha_j \leq A_j \leq \beta_j$, ($0 < \alpha_j < \beta_j < 1$; $j = 2, 3, \dots, p$), atunci ea poate fi aproximată uniform prin polinoame algebrice în variabilele $A_2, A_3, \dots, A_p$. Vom admite deci că, pentru n suficient de mare,

$$A_1 = f(A_2, A_3, \dots, A_p) = \sum_{i=1}^n c_i A_2^{x_{i,2}} A_3^{x_{i,3}} \dots A_p^{x_{i,p}} \quad (2)$$

unde c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), sînt constante numerice (adimensionale)

Fie $[A_j] = [L]^{a_j} [M]^{b_j} [T]^{c_j}$ ($j = 1, 2, \dots, p$). Funcția (1) fiind dimensional omogenă prin ipoteză, înseamnă că dimensiunile lui A_1 sînt aceleași ca dimensiunile oricărui termen al dezvoltării. Astfel, pentru A_1 și pentru

* Manuscris predat redacției la data de 26 aprilie 1975

termenul general al dezvoltării (2) avem

$$[L]^{a_1} [M]^{b_1} [T]^{c_1} = \\ = ([L]^{a_2} [M]^{b_2} [T]^{c_2})^{x_{2,i}} ([L]^{a_3} [M]^{b_3} [T]^{c_3})^{x_{3,i}} \dots ([L]^{a_p} [M]^{b_p} [T]^{c_p})^{x_{p,i}}, \quad (3)$$

deci

$$\begin{aligned} a_2 x_{2,i} + a_3 x_{3,i} + a_4 x_{4,i} + a_5 x_{5,i} + \dots + a_p x_{p,i} &= a_1, \\ b_2 x_{2,i} + b_3 x_{3,i} + b_4 x_{4,i} + b_5 x_{5,i} + \dots + b_p x_{p,i} &= b_1, \\ c_2 x_{2,i} + c_3 x_{3,i} + c_4 x_{4,i} + c_5 x_{5,i} + \dots + c_p x_{p,i} &= c_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Vom presupune că $p \geq 4$ și că printre mărimile $A_2, A_3, \dots, A_p$ există întotdeauna trei mărimi, fie ele A_2, A_3, A_4 , care pot fi alese simultan ca mărimi fundamentale. Ca urmare, (cf. [1], p. 630),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_3 \\ b_2 & b_4 & b_3 \\ c_2 & c_4 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

deci sistemul (4) este compatibil. Dacă $p = 4$, sistemul (4) se reduce la sistemul compatibil determinat

$$\begin{aligned} a_2 x_{2,i} + a_3 x_{3,i} + a_4 x_{4,i} &= a_1, \\ b_2 x_{2,i} + b_3 x_{3,i} + b_4 x_{4,i} &= b_1, \\ c_2 x_{2,i} + c_3 x_{3,i} + c_4 x_{4,i} &= c_1, \end{aligned} \quad (5)$$

a cărui soluție $(x_{2,i}, x_{3,i}, x_{4,i})$ poate fi determinată cu regula lui Cramer. Raționamentul rămîne valabil pentru ceilalți termeni ai dezvoltării (2), puterile lui A_2, A_3, A_4 fiind determinate întotdeauna de un sistem de forma (5) și avînd aceiași coeficienți și termeni liberi ca (5). Rezultă

$$\begin{aligned} x_{2,0} &= x_{2,1} = x_{2,2} = \dots = x_{2,i} = \dots = x_{2,}, \\ x_{3,0} &= x_{3,1} = x_{3,2} = \dots = x_{3,i} = \dots = x_{3,}, \\ x_{4,0} &= x_{4,1} = x_{4,2} = \dots = x_{4,i} = \dots = x_{4,}, \end{aligned}$$

deci dezvoltarea (2) se mai poate scrie sub forma

$$A_1 = A_2^{x_2} A_3^{x_3} A_4^{x_4} \sum_{i=0}^n c_i = C A_2^{x_2} A_3^{x_3} A_4^{x_4} \quad (6)$$

unde $C = \sum_{i=0}^n c_i$ este o constantă adimensională.

Dacă $p > 4$, sistemul (4) este compatibil ($p - 4$) — nedeterminat și poate fi scris sub forma

$$\begin{aligned} a_2 x_{2,i} + a_3 x_{3,i} + x_4 x_{4,i} &= a_1 - a_5 x_{5,i} - \dots - a_p x_{p,i}, \\ b_2 x_{2,i} + b_3 x_{3,i} + b_4 x_{4,i} &= b_1 - b_5 x_{5,i} - \dots - b_p x_{p,i}, \\ c_2 x_{2,i} + c_3 x_{3,i} + b_4 x_{4,i} &= c_1 - c_5 x_{5,i} - \dots - c_p x_{p,i} \end{aligned} \quad (7)$$

Presupunind că $x_{5,i}, \dots, x_{p,i}$ sînt numere reale arbitrare, (7) este un sistem compatibil determinat de 3 ecuații cu 3 necunoscute $x_{2,i}, x_{3,i}, x_{4,i}$. Folosind regula lui Cramer, se observă ușor că soluția acestui sistem este de forma

$$x_{2,i} = x'_{2,i} + x''_{2,i}, \quad x_{3,i} = x'_{3,i} + x''_{3,i}, \quad x_{4,i} = x'_{4,i} + x''_{4,i}, \quad (8)$$

unde $x'_{2,i}, x'_{3,i}, x'_{4,i}$ sînt constante care se exprimă cu ajutorul lui $a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4, c_2, c_3, c_4$, iar $x''_{2,i}, x''_{3,i}, x''_{4,i}$ sînt funcții liniare de $x_{5,i}, \dots, x_{p,i}$. Dacă se presupune că $x_{5,i} = \dots = x_{p,i} = 0$, aceasta nu influențează valorile $x'_{2,i}, x'_{3,i}, x'_{4,i}$, iar (3) se reduce la

$$[L]^{a_1} [M]^{b_1} [T]^{c_1} = ([L]^{a_2} [M]^{b_2} [T]^{c_2})^{x'_{2,i}} ([L]^{a_3} [M]^{b_3} [T]^{c_3})^{x'_{3,i}} ([L]^{a_4} [M]^{b_4} [T]^{c_4})^{x'_{4,i}},$$

ceea ce arată că $[A_1] = [A_2]^{x'_{2,i}} [A_3]^{x'_{3,i}} [A_4]^{x'_{4,i}}$, deci că $A_1/A_2^{x'_{2,i}} A_3^{x'_{3,i}} A_4^{x'_{4,i}}$ este o mărime adimensională. Reluînd acum raționamentul pentru ceilalți termeni ai dezvoltării (2), se obțin expresii analoge cu (8), în care

$$x'_{2,0} = x'_{2,1} = x'_{2,2} = \dots = x'_{2,i} = \dots = x'_{2,}$$

$$x'_{3,0} = x'_{3,1} = x'_{3,2} = \dots = x'_{3,i} = \dots = x'_{3,}$$

$$x'_{4,0} = x'_{4,1} = x'_{4,2} = \dots = x'_{4,i} = \dots = x'_{4,}$$

astfel încît (2) se mai poate scrie sub forma

$$A_1 = A_2^{x'_{2,}} A_3^{x'_{3,}} A_4^{x'_{4,}} \sum_{i=0}^n A_2^{x''_{2,i}} A_3^{x''_{3,i}} A_4^{x''_{4,i}} A_5^{x_{5,i}} \dots A_p^{x_{p,i}}, \quad (9)$$

$A_1/A_2^{x'_{2,}} A_3^{x'_{3,}} A_4^{x'_{4,}}$ fiind o mărime adimensională. Conform cu teorema pi, relația (2) poate fi însă scrisă sub forma $\pi_1 = \varphi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{p-q})$, unde $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{p-q}$ sînt $p-q$ produse adimensionale ale mărimilor $A_1, A_2, \dots, A_p$, iar q este rangul matricei dimensionale a mărimilor $A_1, A_2, \dots, A_p$, (mai simplu, q este numărul mărimilor fundamentale). Luînd $\pi_1 = A_1/A_2^{x'_{2,}} A_3^{x'_{3,}} A_4^{x'_{4,}}$, rezultă că suma (din 9) poate fi scrisă sub forma unei funcții de $p-q-1$ produse adimensionale ale mărimilor $A_2, A_4, \dots$,

A_p . Relația (9) se poate deci scrie sub forma

$$A_1 = A_2^{x'_2} A_3^{x'_3} A_4^{x'_4} \varphi^*(\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_{p-q}). \quad (10)$$

2. Relația integrală a stratului limită

Relația integrală a stratului limită este obținută de obicei fie pornind de la ecuațiile stratului limită, fie aplicînd teorema cantității de mișcare. Ultima metodă are avantajul de a nu necesita deducerea prealabilă a ecuațiilor stratului limită. În acest sens, prezentăm în continuare o demonstrație bazată pe formula generală a cantității de mișcare,

$$\int_S \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_e, \quad (11)$$

demonstrație care ni se pare mai naturală și principial mai simplă decît cele cunoscute și bazate tot pe aplicarea teoremei cantității de mișcare, (cf. [2], pp. 623—624).

Să aplicăm deci formula (11) în cazul suprafeței de control $S = ABDEA$, unde BD este frontiera stratului limită, (fig. 1; linia de curent care trece prin D este CD). Pe BD nu există eforturi datorate vîscozității, deoarece lichidul din exteriorul stratului limită este considerat perfect.

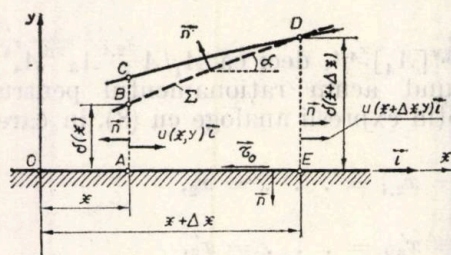


Fig. 1

Pe de altă parte, dacă se admite că în $ABDEA$ liniile de curent sînt practic paralele cu peretele, rezultă că pe AB și DE eforturile datorate vîscozității nu au componente după Ox ; iar mai jos nu vor interveni componentele după Oy ale acestor eforturi.

Neglijînd și forțele masice, (11) devine atunci

$$\begin{aligned} \int_{AB} \rho \vec{v}(x,y) [\vec{v}(x,y) \cdot \vec{n}] dA + \int_{BD} \rho \vec{V}(x) [\vec{V}(x) \cdot \vec{n}] dA + \int_{DE} \rho \vec{v}(x + \Delta x, y) [\vec{v}(x + \Delta x, y) \cdot \vec{n}] dA = \\ = \int_{AB} p(x) (-\vec{n}) dA + \int_{BD} p\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) (-\vec{n}) dA + \\ + \int_{DE} p\left(x + \Delta x\right) (-\vec{n}) dA + \int_{EA} p\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) (-\vec{n}) dA + \int_{EA} \tau_0 (-\vec{i}) dA. \end{aligned}$$

S-a notat cu $\vec{v}(x,y)$ viteza lichidului în stratul limită și cu $\vec{V}(x)$ viteza sa pe frontiera Σ a stratului limită, cu τ_0 valoarea medie a efortului unitar

tangential pe porțiunea AE care coincide cu suprafața corpului, iar cu $p(x + \Delta x/2)$ presiunea medie pe BD și AE ; (Δx fiind o lungime foarte mică, s-a presupus că presiunea variază liniar între secțiunile AB și ED).

Înmulțind scalar relația precedentă cu versorul $\vec{i}$ și observînd că $\vec{v} = u\vec{i}$, $\vec{V} = U\vec{i}$, $dA = dy \cdot 1$ pe AB și ED , $dA = ds \cdot 1$ și $\vec{n} \cdot \vec{i} = \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin \alpha$ pe BD , $dA = dx \cdot 1$ pe AE , iar $\rho = \text{const.}$, se obține

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^{\delta(x)} u^2(x, y) dy + \rho U^2(x) \int_{\delta(x)}^{\delta(x+\Delta x)} (-\sin \alpha) ds + \rho \int_{\delta(x+\Delta x)}^0 u^2(x + \\ & + \Delta x, y) (-dy) = \int_0^{\delta(x)} p(x) dy + \int_{\delta(x)}^{\delta(x+\Delta x)} p\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \alpha ds - \\ & - \int_{\delta(x+\Delta x)}^0 p(x + \Delta x) (-dy) - \int_{x+\Delta x}^x \tau_0 (-dx), \end{aligned}$$

sau încă, deoarece $ds \cdot \sin \alpha = dy$,

$$\begin{aligned} & \rho \frac{1}{\Delta x} \left[\int_0^{\delta(x+\Delta x)} u^2(x + \Delta x, y) dy - \int_0^{\delta(x)} u^2(x, y) dy \right] - \\ & - \rho U^2(x) \frac{\delta(x + \Delta x) - \delta(x)}{\Delta x} = - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_0^{\delta(x+\Delta x)} p(x + \Delta x) dy - \right. \\ & \left. - \int_0^{\delta(x)} p(x) dy \right] + p\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\delta(x + \Delta x) - \delta(x)}{\Delta x} - \tau_0. \end{aligned}$$

Făcînd ca $\Delta x \rightarrow 0$, rezultă

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u^2 dy - \rho U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} p dy + p \frac{\partial \delta}{\partial x} - \tau_0. \quad (12)$$

Dar, deoarece $\delta = \int_0^{\delta} dy$, avem

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} p dy = \frac{\partial}{\partial x} (p\delta) = \delta \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad (13)$$

iar din relația lui Bernoulli scrisă în B , $p + \rho V^2/2 = \text{const.}$, rezultă, deoarece $V^2 = U^2$,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (14)$$

În conformitate cu ecuația continuității, debitul care trece prin BD este egal cu diferența debitelor care trec prin ED și AB :

$$U \int_{\delta(x)}^{\delta(x+\Delta x)} dy = \int_0^{\delta(x+\Delta x)} u(x+\Delta x, y) dy - \int_0^{\delta(x)} u(x, y) dy,$$

deci

$$U \frac{\delta(x+\Delta x) - \delta(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_0^{\delta(x+\Delta x)} u(x+\Delta x, y) dy - \int_0^{\delta(x)} u(x, y) dy \right],$$

sau încă, făcând ca $\Delta x \rightarrow 0$,

$$U \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} u dy. \quad (15)$$

Ținând seamă de (13), (14), (15), precum și de faptul că diferitele mărimi care intervin sînt funcții numai de x , putem scrie relația (12) sub forma

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy - \rho U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u dy - \rho \delta U \frac{dU}{dx} = -\tau_0. \quad (16)$$

Deoarece $\delta = \int_0^{\delta} dy$, membrul stîng din (16) se mai poate scrie

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy - \rho \frac{d}{dx} \left(U \int_0^{\delta} u dy \right) + \rho \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} u dy - \rho \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} U dy = \\ = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(u - U) dy + \rho \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} (u - U) dy, \end{aligned}$$

deci (16) devine relația integrală a stratului limită:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(u - U) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} (U - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (17)$$

Catedra de hidraulică și mașini hidraulice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorgiu-Daj” București

BIBLIOGRAFIE

1. *Caius Iacob* — Mecanică teoretică. Editura didactică și pedagogică, București 1971.
2. *L. G. Loițianski* — Mehanika jidkosti i gaza, ed. a 3-a. Izdatelstvo „Nauka”, Moscova, 1970

Some Remarks Concerning Rayleigh's Method of Dimensional Analysis, and the Integral Momentum Equation for Boundary Layers

Two new proofs are presented, concerning: 1) Rayleigh's method of dimensional analysis; 2) The integral momentum equation for boundary layers.

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ**

apare trimestrial, în continuarea vechilor periodice științifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din București“ și Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rând activitatea științifică a corpului didactic din institut. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Correspondența privind articolele, schimburile de publicații și abonamentele se fac pe adresa institutului.

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
РАЗДЕЛ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

выходит четыре раза в год, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din București“, и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут публиковаться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SERIES OF ELECTROTECHNIQUE**

The Bulletin is issued quarterly, continuing the old scientific periodicals: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din București“ and Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the folwing address

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SÉRIE ELECTROTECHNIQUE**

paraît tous les trois mois, continuant les anciens periodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din București“ et Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnamants est:

Adresa:

**INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
ROMÂNIA**

Splaiul Independenței nr. 313
Căsuța Poștală nr. 2356
(pentru Buletinul Institutului)
Seria Electrotehnică

1971 DEC 9

Lei 20

F 1130/2

**BULETINUL
INSTITUTULUI
POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ”
BUCUREȘTI**

SERIA ELECTROTEHNICĂ

**TOMUL XXXIX NUMĂRUL 2 ANUL 1977,
APRILIE—IUNIE**

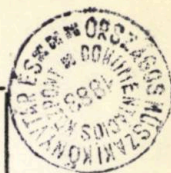
COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician Radu Voinea

MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Academician *Ecaterina Ciorănescu Nenițescu*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Călin Sergiu* (secretar științific); Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. docent ing. *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor: Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București,
Splaiul Independenței 313, Cod. 77206 Tel. 31.40.10, România, Căsuța poștală 2356
TELEX: 10.490 PIBUH

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ILEXIM
import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011226, Bucharest
ROMANIA



MATEMATICĂ

V. Prepeliță

Numărul sistemelor liniare peste corpuri finite 3

T. S. Nikolova, D. D. Bainov

On a Boundary Problem for a First Order Differential Equation of Superneutral Type with a Parameter 9

FIZICĂ

C. P. Cristescu, I. M. Popescu, A. M. Preda

Hollow Cathode He-Cd Laser 19

Maria Honciuc, Iuliana Cuculescu, Cornelia Moțoc, Eugenia Penția

Electrical and Optical Properties of SnO_2 thin Films Obtained by a Vapour Reaction Technique 27

D. Iordache, Luminița Daniello, M. Stan, I. Belciu

On Certain Logical Correlations of the Magnetic Permeability Dispersion Presented by Soft Ferrites 33

ELECTROTEHNICĂ

N. Galan

Cuplul electromagnetic la motorul cu histerezis 41

C. Ghiță

Metodică de proiectare a dubloarelor feromagnetice trifazate de frecvență . . 47

D. Stanciu

Metodică de proiectare a pompelor electromagnetice de curent continuu 55

ELECTRONICĂ

M. Săvescu, Ecaterina Vlădescu

Calecul răsponului circuitelor electrice la semnale cu modulație în impulsuri de fază 67

AUTOMATICĂ

M. Terțișco, G. Ionescu

Identificarea experimentală a sistemului de reglare a tensiunii unui grup generator de mare putere 79

I. Russ

Sensitivity Function Generation for Nonlinear Systems with Jump Discontinuities 91

ENERGETICĂ

D. Cristescu, P. Postolache

Protecția liniilor electrice aeriene împotriva trăsnetului. Modelul electrogeometrie 101

1	Introduction
2	1.1. Object and scope of the study
3	1.2. Methodology
4	1.3. Limitations
5	2. Literature review
6	2.1. Theoretical framework
7	2.2. Empirical studies
8	2.3. Synthesis
9	3. Research design
10	3.1. Study population
11	3.2. Sampling method
12	3.3. Data collection
13	3.4. Data analysis
14	4. Results
15	4.1. Descriptive statistics
16	4.2. Inferential statistics
17	4.3. Discussion of findings
18	5. Conclusion
19	5.1. Summary of findings
20	5.2. Implications for practice
21	5.3. Recommendations for future research
22	References
23	Appendix A
24	Appendix B
25	Appendix C
26	Appendix D
27	Appendix E
28	Appendix F
29	Appendix G
30	Appendix H
31	Appendix I
32	Appendix J
33	Appendix K
34	Appendix L
35	Appendix M
36	Appendix N
37	Appendix O
38	Appendix P
39	Appendix Q
40	Appendix R
41	Appendix S
42	Appendix T
43	Appendix U
44	Appendix V
45	Appendix W
46	Appendix X
47	Appendix Y
48	Appendix Z
49	Appendix AA
50	Appendix AB
51	Appendix AC
52	Appendix AD
53	Appendix AE
54	Appendix AF
55	Appendix AG
56	Appendix AH
57	Appendix AI
58	Appendix AJ
59	Appendix AK
60	Appendix AL
61	Appendix AM
62	Appendix AN
63	Appendix AO
64	Appendix AP
65	Appendix AQ
66	Appendix AR
67	Appendix AS
68	Appendix AT
69	Appendix AU
70	Appendix AV
71	Appendix AW
72	Appendix AX
73	Appendix AY
74	Appendix AZ
75	Appendix BA
76	Appendix BB
77	Appendix BC
78	Appendix BD
79	Appendix BE
80	Appendix BF
81	Appendix BG
82	Appendix BH
83	Appendix BI
84	Appendix BJ
85	Appendix BK
86	Appendix BL
87	Appendix BM
88	Appendix BN
89	Appendix BO
90	Appendix BP
91	Appendix BQ
92	Appendix BR
93	Appendix BS
94	Appendix BT
95	Appendix BU
96	Appendix BV
97	Appendix BW
98	Appendix BX
99	Appendix BY
100	Appendix BZ

M A T E M A T I C A

C.Z.: 512.83/86

NUMĂRUL SISTEMELOR LINIARE PESTE CORPURI FINITE*

VALERIU PREPELIȚA

Se consideră sistemele liniare peste un corp finit $GF(p)$, descrise prin aplicații intrare-ieșire, matrici de transfer și ecuații de stare și ieșire.

Se arată că numărul $I_{m,n}$ al aplicațiilor intrare-ieșire de dimensiune n , cu m intrări și o ieșire, verifică o relație de recurență și apoi se evaluează acest număr, în funcție de caracteristica p a corpului.

1. Introducere

Fie K un corp comutativ; vom numi spațiile vectoriale $X = K^n$, $U = K^m$ și $Y = K^r$ respectiv spațiul stărilor, intrărilor și ieșirilor. Elementele $x \in X$, $u \in U$, $y \in Y$ se vor numi stări, intrări și ieșiri.

Definiția 1.1.

Se numește *sistem liniar* ansamblul $\Sigma = (F, G, H)$ cu ecuațiile de stare și ieșire

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Hx(t) \quad (1.2)$$

unde F, G și H sînt matrici $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ peste K .

Dimensiunea n a spațiului stărilor se numește *dimensiunea sistemului* Σ și se notează $\dim \Sigma$.

În [1], [2] se dă „descrierea externă” a sistemului liniar, prin intermediul aplicației intrare-ieșire.

Definiția 1.2

Se numește *aplicație intrare-ieșire* o funcție $f \in \text{Hom}_K(K^m[z], K^r)$.

În [3] s-a arătat că în cazul în care corpul K este finit, orice aplicație intrare-ieșire este descrisă de un număr finit de invarianti.

Vom asocia unui șir de intrări $\{u(-k), u(-k+1), \dots, u(0)\} \subset U$ polinomul $\sum_{i=0}^k u(-i) z^i \in K^m[z]$.

* Manuscris predat redacției la data de 10 iulie 1976.

Acestui șir de intrări și stării inițiale $x(-k) = 0$ le va corespunde ieșirea la momentul 1 $y(1) = \sum_{i=0}^k H F^i G u(-i)$, deci sistemului Σ i se poate asocia aplicația intrare-ieșire f_{Σ} definită de

$$f_{\Sigma} \left(\sum_{i=0}^k u(-i) z^i \right) = \sum_{i=0}^k H F^i G u(-i)$$

Un sistem Σ se numește *realizare* a aplicației intrare-ieșire f dacă $f = f_{\Sigma}$. O realizare $\tilde{\Sigma}$ a lui f se numește *realizare minimală* dacă $\dim \tilde{\Sigma} \leq \dim \Sigma \forall \Sigma$ realizare a lui f . În [2] s-a arătat izomorfismul realizărilor minimale. Dimensiunea unei realizări minimale se numește *dimensiunea aplicației* f și se notează $\dim f$.

2. Matrice de transfer

Definiția 2.1

Se numește *matrice de transfer* a sistemului $\Sigma = (F, G, H)$ matricea

$$Z = H(zI - F)^{-1}G \quad (2.1)$$

Dacă Σ este o realizare a aplicației f , Z se va numi *matrice de transfer a aplicației intrare-ieșire* f .

Deci Z este o matrice $r \times m$ cu elemente funcții raționale ireductibile de forma

$$S_{ij}(z)/P_{ij}(z), \text{ cu } S_{ij}(z), P_{ij}(z) \text{ din } K[z] \text{ și } \text{grad } S_{ij} < \text{grad } P_{ij}.$$

Dacă notăm cu $\chi(z)$ polinomul caracteristic al matricii F și cu $P(z) = \text{c.m.m.m.c. } P_{ij}(z)$, din (2.1) rezultă

$$\text{grad } P(z) \leq \text{grad } \chi(z) = n$$

de unde, pentru Σ realizare minimală a lui f

$$\text{grad } P(z) \leq \dim f \quad (2.2)$$

Propoziția 2.1

Dacă $r = 1$ și matricea de transfer a aplicației intrare-ieșire f este

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{S_1(z)}{P_1(z)} & \dots & \frac{S_m(z)}{P_m(z)} \end{bmatrix}$$

cu $S_i(z)/P_i(z)$ funcții raționale ireductibile, atunci

$$\dim f = \text{grad c.m.m.m.c. } P_i(z) \quad (2.3)$$

$$1 \leq i \leq m$$

Demonstrație

Notăm $P(z) = \text{c.m.m.m.c. } P_i(z)$

Fie $P(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$ și

$$\bar{S}_i(z) = \frac{S_i(z) P(z)}{P_i(z)} = a_{n-1,i} z^{n-1} + \dots + a_{1,i} z + a_{0,i}$$

Un calcul direct arată că sistemul $\Sigma = (F, G, H)$ cu

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,m} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,m} \end{bmatrix}$$

$$H = [0 \dots 0 \ 1]$$

are matricea de transfer

$$\left[\frac{\bar{S}_1(z)}{P(z)} \dots \frac{\bar{S}_m(z)}{P(z)} \right] = \left[\frac{S_1(z)}{P_1(z)} \dots \frac{S_m(z)}{P_m(z)} \right] = Z$$

deci f are o realizare de dimensiune $n = \text{grad } P(z)$ adică

$$\dim f \leq \text{grad } P(z) \quad (2.3)$$

Din (2.2) și (2.3) rezultă

$$\dim f = \text{grad } P(z) \quad \text{c.c.t.d.}$$

Analog se demonstrează:

Propoziția 2.2

Dacă $m = 1$ și matricea de transfer a aplicației intrare-ieșire f este

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{S_1(z)}{P_1(z)} \\ \vdots \\ \frac{S_r(z)}{P_r(z)} \end{bmatrix}$$

cu $S_i(z)/P_i(z)$ funcții raționale ireductibile, atunci

$$\dim f = \text{grad c.m.m.m.c. } P_i(z) \quad (2.4)$$

$$1 \leq i \leq r$$

3. Aplicații intrare-ieșire peste corpuri finite

Vom considera corpul K finit, deci există $p_1, p_2 \in N$, cu p_1 număr prim, încît $K = GF(p)$, unde $p = p^{p^2}$. Notăm cu $I_{n,m}$ numărul aplicațiilor intrare-ieșire cu m intrări și o ieșire, de dimensiune n , peste corpul K .

Teorema 3.1

Numerele $I_{n,m}$ verifică relația de recurență

$$I_{n,m} = p^n (p^{mn} - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} I_{k,m} p^{n-k}, \quad n \geq 2, m \geq 1 \quad (3.1)$$

Demonstrație

Conform propoziției 2.1, matricea de transfer a oricărei aplicații intrare-ieșire f de dimensiune n se poate scrie sub forma

$$Z = \left[\frac{S_1(z)}{P_1(z)} \cdots \frac{S_m(z)}{P_m(z)} \right] \quad (3.2)$$

cu $S_i(z)/P_i(z)$ funcții raționale ireductibile, sau

$$Z = \left[\frac{\bar{S}_1(z)}{P(z)} \cdots \frac{\bar{S}_m(z)}{P(z)} \right] \quad (3.3)$$

unde $P(z) = \text{c.m.m.m.c. } P_i(z)$

$$1 \leq i \leq m$$

$\text{grad } \bar{S}_i(z) < \text{grad } P(z) = n$; $i = 1, 2, \dots, m$
și $P(z)$ este polinom unitar; $P(z)$ are forma

$$P(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$$

adică depinde de n parametri b_i din $GF(p)$, deci există p^n polinoame unitare $P(z)$ de grad n .

Analog, există p^n polinoame $\bar{S}_i(z)$ de grad cel mult $n-1$, deci în total $p^{mn} - 1$ posibilități de alegere a polinoamelor $\bar{S}_1(z), \dots, \bar{S}_m(z)$, nu toate nule, din (3.3).

Rezultă existența a $p^n(p^{mn} - 1)$ matrici de transfer de forma (3.3). Dintre ele trebuie eliminate matricile aplicațiilor intrare-ieșire de dimensiune mai mică decît n , deci matricile de transfer Z de forma (3.2) cu grad c.m.m.m.c. $P_i(z) < n$. Acestea se obțin amplificînd fracțiile raționale din cele $I_{k,m}$ matrici de transfer de forma (3.3) (cu grad $P(z) = i$) cu cele p^{n-k} polinoame unitare de grad $n-k$; numărul lor este deci

$$\sum_{k=1}^{n-1} I_{k,m} p^{n-k}.$$

Rezultă că numărul $I_{n,m}$ al sistemelor de dimensiune n este egal cu diferența

$$p^n (p^{mn} - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} I_{k,m} p^{n-k}, n \geq 2, m \geq 1$$

Teorema 3.2

Numărul aplicațiilor intrare-ieșire de dimensiune n , cu m intrări și o ieșire, peste $GF(p)$, este

$$I_{n,m} = (p^m - 1) p^{mn+n-m} \quad (3.4)$$

Demonstracție (prin inducție după n)

Pentru $n = 1$, matricile de transfer (3.3) sînt

$$Z = \left[\frac{a_1}{z+b} \cdots \frac{a_m}{z+b} \right]$$

cu $b \in GF(p)$, $a_i \in GF(p)$, unde a_i nu sînt toate nule.

Există p elemente b și $p^m - 1$ elemente $a_1, \dots, a_m$, nu toate nule, deci numărul matricilor de transfer ale aplicațiilor intrare-ieșire de dimensiune 1 este

$$I_{1,m} = p(p^m - 1)$$

Presupunem formula (3.4) adevărată pentru numerele $I_{k,m}$, $k \leq n-1$. Atunci conform teoremei 3.1,

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= p^n (p^{mn} - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} I_{k,m} p^{n-k} = \\ &= p^n (p^{mn} - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (p^m - 1) p^{mk+k-m} p^{n-k} = \\ &= p^n (p^m - 1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^{mk} - \sum_{k=1}^{n-1} p^{m(k-1)} \right) = \\ &= p^n (p^m - 1) p^{m(n-1)} = (p^m - 1) p^{mn+n-m} \end{aligned}$$

Corolar 3.1

Indicatorul mulțimii aplicațiilor intrare-ieșire de dimensiune n , cu m intrări și o ieșire, este

$$g(\alpha) = \frac{p(p^m - 1)\alpha}{1 - p^{m+1}\alpha} \quad (3.5)$$

Demonstrație

Se observă că dezvoltarea în serie de puteri a funcției $g(\alpha)$ este

$$g(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (p^m - 1) p^{mn+n-m} \alpha^n = \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,m} \alpha^n$$

Corolar 3.2

Numărul aplicațiilor intrare-ieșire de dimensiune n , cu intrări și ieșiri scalare ($m = r = 1$) este

$$I_n = (p - 1)p^{2n-1} \quad (3.6)$$

Analog, folosind propoziția 2.2, se demonstrează :

Teorema 3.3

Numărul aplicațiilor intrare-ieșire, de dimensiune n cu o intrare și r ieșiri, este

$$I_{n,r}^* = (p^r - 1) p^{rn+n-r} \quad (3.7)$$

Catedra de matematici I

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. R. E. Kalman. Algebraic Aspects of the Theory of Dynamical Systems. Differential Equations and Dynamical Systems. Academic Press. J. K. Hale and J. P. Lasalle (eds) p. 133-146. 1967.
2. R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib. Topics in Mathematical System Theory. Mc. Graw-Hill, 1969.
3. V. Prepeliță. Applications entrée-sortie sur un corps fini. Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle déc. 1972, R-3, p. 3-21.

Le nombre des systèmes linéaires sur un corps fini

On considère les systèmes linéaires sur un corps fini $GF(p)$, décrit par des applications entrée-sortie, fonctions de transfert ou par des équations d'état et de sortie.

On montre que le nombre $I_{n,m}$ des applications entrée-sortie de dimension n , avec m entrées et une sortie, vérifie une relation de récurrence et ensuite on donne l'expression de $I_{n,m}$.

C.Z.: 517.2

ON A BOUNDARY PROBLEM FOR A FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATION OF SUPERNEUTRAL TYPE WITH A PARAMETER*

T. S. NIKOLOVA, D. D. BAINOV
UNIVERSITY OF PLOVDIV-BULGARIA

A two-point boundary problem for a first order differential equation is considered, the latter being of superneutral type with a parameter. Theorems for existence and uniqueness have been proved, as well as a theorem for the existence of a solution of the considered boundary problem. Analogous theorems have been formulated for a more general boundary problem where the deviation of the argument depends on the independent variable t , on the unknown function $x(t)$ and its derivative $\dot{x}(t)$ by means of m iterations.

The great theoretical and practical importance of the boundary problems for differential equations with deviating argument has been the reason for these problems to become an object of investigation by a number of authors. Lately, the boundary problems with a parameter for the ordinary differential equations with deviating argument have been of a particular interest (see, for example, [1]—[4]).

Consider the boundary problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\tau^{x(t)}), \dot{x}(\tau^{x(t)}), \lambda), t \in I = [0, 1], \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = x_1, \quad (2)$$

where

$$\tau^{x(t)} = \tau(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

We will assume that the following group of conditions (A) holds:

A1. The functions $f: (t, u_1, u_2, v_2, \lambda) \rightarrow R$ and $\tau: (t, u_1, v_1) \rightarrow R$ are defined in the domains, respectively:

$$G_f = I \times G_1 \times G_1 \times G_2 \times \Lambda$$

and

$$G_\tau = I \times G_1 \times G_2,$$

where

$$G_1 = \left\{ \xi: |\xi| \leq M_1 = \int_0^1 M(t) dt \right\} \subset R \quad (R \text{ is the real axis}),$$

$$G_2 = \{ \xi: |\xi| \leq M_0 = \max \{ M(t): t \in I \} \} \subset R,$$

* Manuscript received 7 October 1976.

$\Lambda = \{\lambda : |\lambda| \leq \alpha\} \subset R$ (α is a fixed real number), while the function $M : I \rightarrow [0, +\infty)$ is continuous.

A2. In the domain G_f the function $f(t, u_1, u_2, v_2, \lambda)$ is continuous with respect to λ and satisfies the Lipschitz condition :

$$|f(t, u_1, u_2, v_2, \lambda) - f(\bar{t}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \lambda)| \leq \\ \leq T|t - \bar{t}| + N_1|u_1 - \bar{u}_1| + N_2|u_2 - \bar{u}_2| + N_3|v_2 - \bar{v}_2|;$$

In the domain G_τ the function $\tau(t, u_1, v_1)$ satisfies the Lipschitz condition

$$|\tau(t, u_1, v_1) - \tau(\bar{t}, \bar{u}_1, \bar{v}_1)| \leq \theta|t - \bar{t}| + K_1|u_1 - \bar{u}_1| + K_2|v_1 - \bar{v}_1|.$$

A3. In the domain G_f the function $f(t, u_1, u_2, v_2, \lambda)$ satisfies the inequality

$$|f(t, u_1, u_2, v_2, \lambda)| \leq M(t).$$

A4. In the domain G_τ the function $\tau^{x(t)}$ satisfies the inequalities :

$$0 \leq \tau^{x(t)} \leq 1.$$

$$A5. b = 1 - (\theta N_3 + K_1 N_3 M_0 + K_2 N_2 M_0) > 0$$

A6. $b^2 \geq 4ac$, where

$$a = K_2 N_3$$

$$c = T + N_1 M_0 + \theta N_2 M_0 + K_1 N_2 M_0^2$$

A7. $l > 0$, where

$$l = \inf \{l_0(t), t \in I\},$$

$$l_0(t) = \inf \{|\varphi(t, u_1, u_2, v_2, \lambda_1, \lambda_2)| : (u_1, u_2, v_2, \lambda_1, \lambda_2) \in$$

$$I \times G_1 \times G_1 \times G_2 \times (\Lambda^2 - \Delta(\Lambda))\},$$

and the function

$$\varphi(t, u_1, u_2, v_2, \lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} [f(t, u_1, u_2, v_2, \lambda_1) - f(t, u_1, u_2, v_2, \lambda_2)] \quad (\varphi \in R)$$

is defined in the set $I \times G_1 \times G_1 \times G_2 \times (\Lambda^2 - \Delta(\Lambda))$ ($\Delta(\Lambda)$ is a diagonal of the product Λ^2).

A8. $l^{-1}|x_1| + \beta \leq \alpha$, where

$$l\beta = \max \{|f(t, u_1, u_2, v_2, 0)| : (t, u_1, u_2, v_2) \in I \times G_1 \times G_1 \times G_2\}.$$

Denote by C the space of the continuous functions $y : I \rightarrow R$, where the norm

$$||y|| = \max \{ |y(t)| : t \in I \}$$

is introduced, and by Y denote the set of all functions $y \in C$, which satisfy the conditions

$$|y(t)| \leq M(t), \quad (3)$$

$$|y(t) - y(\bar{t})| \leq K|t - \bar{t}|, \quad (4)$$

where

$$K = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A solution of the boundary problem (1), (2) will be called each pair $[x(t), \lambda]$ satisfying equation (1) and boundary condition (2), where the function $x(t)$ possesses in the interval I a derivative, belonging to the set Y , and $\lambda \in \Lambda$.

Let the operator $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ be defined in the space $\Omega = Y \times \Lambda$ with the help of the formulae

$$\pi(z) = (\pi_1(z); \pi_2(z)),$$

$$\pi_1(z)(t) = f(t, x(t), x(\tau^{x(t)}), y(\tau^{x(t)}), \lambda),$$

$$\pi_2(z) = \lambda + \mu(x_1 - \int_0^1 f(t, x(t), x(\tau^{x(t)}), y(\tau^{x(t)}), \lambda) dt), \quad (5)$$

$$x(t) = \int_0^t y(s) ds,$$

where $Z = (y, \lambda)$, $y \in Y$, $\lambda \in \Lambda$,

$$\mu = 2(L + l)^{-1} \times \operatorname{sgn} \varphi(t, u_1, u_2, v_2, \lambda_1, \lambda_2) = \mu_1 \operatorname{sgn} \varphi(t, u_1, u_2, v_2, \lambda_1, \lambda_2)$$

$$L = \sup \{ L_0(t) : t \in I \},$$

while

$$L_0(t) = \sup \{ |\varphi(t, u_1, u_2, v_2, \lambda_1, \lambda_2)| : (u_1, u_2, v_2) \in G_1 \times G_1 \times G_2 \}.$$

It can be easily proved that the boundary problem (1), (2) is equivalent to the operator equation $\pi(z) = z$

THEOREM 1. If the conditions (A) are fulfilled, then the boundary problem (1), (2) has at least one solution.

Proof. From the condition A2 it follows that the operator π is continuous in the set Ω , while by the theorems of Tihonov, Ascoli and Bolzano-Weierstrass it follows that the set $\pi(\Omega) = \pi_1(\Omega) \times \pi_2(\Omega)$ is compact space in the corresponding induced topology.

We will show that $\pi(\Omega) \subset \Omega$.

From A3 it follows that the function $\pi_1(z)(t)$ satisfies the inequality (3).

From the conditions (5), A2, A5 and A6 the inequalities hold, as follows:

$$|x(t) - x(\bar{t})| \leq M_0 |t - \bar{t}|,$$

$$|\tau^{x(t)} - \tau^{x(\bar{t})}| \leq (\theta + k_1 M_0 + k_2 K) |t - \bar{t}|,$$

$$\begin{aligned} |\pi_1(z)(t) - \pi_1(z)(\bar{t})| &\leq \{k_2 N_3 K^2 - [1 - (\theta N_3 + k_1 N_3 M_0 + k_2 N_2 M_0)] K + \\ &+ T + N_1 M_0 + \theta N_2 M_0 + k_1 N_2 M_0^2\} |t - \bar{t}| = K |t - \bar{t}|. \end{aligned}$$

The last inequality shows that the function $\pi_1(z)(t)$ satisfies the condition (4) as well.

Therefore

$$\pi_1(\Omega) \subset Y \quad (6)$$

For $z \in \Omega$ by the mean value theorem it follows that

$$\pi_2(z) = \lambda + \mu(x_1 - f(\bar{t}, x(\bar{t}), x(\tau^{x(\bar{t})}), y(\tau^{x(\bar{t})}), \lambda)), \bar{t} \in I.$$

By applying A7 and A8, we obtain

$$\begin{aligned} |\pi_2(z)| &= |\lambda| |1 - \mu \varphi(\bar{t}, x(\bar{t}), x(\tau^{x(\bar{t})}), y(\tau^{x(\bar{t})}), \lambda, 0)| + \\ &+ |\mu_1| |x_1 - f(\bar{t}, x(\bar{t}), x(\tau^{x(\bar{t})}), y(\tau^{x(\bar{t})}), 0)| \leq \\ &\leq |\lambda| \frac{L-l}{L+l} + \mu_1 (|x_1| + |f(\bar{t}, x(\bar{t}), x(\tau^{x(\bar{t})}), y(\tau^{x(\bar{t})}), 0)|) \leq \\ &\leq |\lambda| \frac{L-l}{L+l} + \frac{2}{L+l} (|x_1| + l \beta) = \\ &= |\lambda| \frac{L-l}{L+l} + \frac{2l}{L+l} (|x_1| l^{-1} + \beta) \leq \\ &\leq \alpha \frac{L+l}{L+l} = \alpha \end{aligned}$$

Therefore

$$\pi_2(z) \in \Lambda \quad (7)$$

From (6) and (7) it follows that $\pi(\Omega) \subset \Omega$.

Therefore, according to the principle of Schauder for the fixed point, at least one fixed point of the operator π exists, i.e. at least one solution of the boundary problem (1), (2) exists.

THEOREM 2. Let

$$N_0 = \sup \{N_1 t + N_2 [M_0(k_1 t + k_2) + \tau^{x(t)}] + N_3 K(k_1 t + k_2) + N_3 :$$

$$(t, u_1, v_1) \in I \times G_1 \times G_2\}$$

Then, if the condition (A) and the inequality

$$q_0 = N_0 \left(1 + \frac{L}{l}\right) < 1,$$

hold, then the boundary problem (1), (2) has a unique solution,

Proof. Introduce in $C \times \Lambda$ the norm

$$\|Z\|_{C \times \Lambda} = \|y\| + q|\lambda|, \quad \|y\| = \max \{|y(t)| : t \in I\}, \quad (8)$$

$$\text{where } y \in C, \lambda \in \Lambda, z = (y, \lambda) \text{ and } q = \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{L}{l} + \frac{1}{N_0} - 1 \right).$$

$$\text{Let } z = (y, \lambda), \bar{z} = (\bar{y}, \bar{\lambda}) \in \Omega \text{ and } \bar{x}(t) = \int_0^t \bar{y}(s) ds.$$

Then, from (5), (3), A2, A4 and (4) the inequalities hold, as follows :

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \|y - \bar{y}\| t, \quad (9)$$

$$|\tau^{x(t)} - \tau^{\bar{x}(t)}| \leq k_1 \|y - \bar{y}\| t + k_2 \|y - \bar{y}\|, \quad (10)$$

$$|x(\tau^{x(t)}) - \bar{x}(\tau^{\bar{x}(t)})| \leq M_0(k_1 \|y - \bar{y}\| t + k_2 \|y - \bar{y}\|) + \|y - \bar{y}\| \tau^{x(t)}, \quad (11)$$

$$|y(\tau^{x(t)}) - \bar{y}(\tau^{\bar{x}(t)})| \leq K |\tau^{x(t)} - \tau^{\bar{x}(t)}|, \quad (12)$$

while from A2, (9), (10), (11), A7 and (12) it follows that

$$\|\pi_1(z) - \pi_1(\bar{z})\| \leq N_1 \|y - \bar{y}\| + L|\lambda - \bar{\lambda}|, \quad (13)$$

$$|\pi_2(z) - \pi_2(\bar{z})| \leq \mu_1 N_0 \|y - \bar{y}\| + \frac{\mu_1(L-l)}{2} |\lambda - \bar{\lambda}|. \quad (14)$$

By applying (13) and (14), for the norm (8) we obtain

$$\|\pi(z) - \pi(\bar{z})\|_{C \times \Lambda} \leq N_0 (1 + q \mu_1) \|y - \bar{y}\| + \left[L + q \frac{\mu_1(L-l)}{2} \right] |\lambda - \bar{\lambda}|$$

Since

$$N_0(1 + \mu_1 q) = \frac{N_0}{2} \left(\frac{L}{l} + \frac{1}{N_0} + 1 \right) = \frac{1}{2} (1 + q_0) < 1$$

and

$$L + q\mu_1 \frac{L-l}{2} = q \frac{\frac{L}{l} (1 + q_0) + q_0 - 1}{\frac{L}{l} (1 + q_0) + 1 - q_0} < q,$$

then π is a spin operator in the set Ω . According to the principle of Banach for the fixed point, there exists a unique fixed point on the operator π , i.e. there exists a unique solution of the boundary problem (1), (2).

THEOREM 3. Let the conditions (A) be fulfilled and let

$$0 \leq \tau_k^{x(t)} \leq t, \quad t \in I,$$

$$q_0^* = N(\rho_0) \left(1 + \frac{L}{l} \right) < 1,$$

where ρ_0 is the point at which the function

$$N(\rho) = \max \left\{ \frac{1}{\rho} N_1 + N_2 \left[M_0 \left(k_1 \frac{1}{\rho} + k_2 \right) + \frac{1}{\rho} \rho(\tau^{x(t)}) \right] + \right. \\ \left. + N_3 \left[K \left(k_1 \frac{1}{\rho} + k_2 \right) + 1 \right] : (t, u_1, v_1) \in I \times G_1 \times G_2 \right\}$$

reaches its minimum for $0 < \rho < +\infty$, i.e.

$$N(\rho_0) = \min \{N(\rho) : 0 < \rho < \infty\}$$

Then the boundary problem (1), (2) has a unique solution.

The proof of the theorem is accomplished analogously to that of theorem 2, by using the norm

$$\|z\|_{C_{\times\Lambda}}^* = \|y\|^* + q^* |\lambda|, \quad \|y\|^* = \max \{ |y(t)| e^{-\rho_0 t} : t \in I \},$$

where

$$q^* = \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{L}{l} + \frac{1}{N(\rho_0)} - 1 \right)$$

and the inequalities

$$|y(t)| \leq \|y\|^* e^{\rho_0 t},$$

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \|y - \bar{y}\|^* \frac{1}{\rho_0} l^{\rho_0 t},$$

$$|x(\tau^{x(t)}) - \bar{x}(\tau^{\bar{x}(t)})| \leq \left[M_0 \left(k_1 \frac{1}{\rho_0} + k_2 \right) e^{\rho_0 t} + \frac{1}{\rho_0} e^{\rho_0 \tau^{x(t)}} \right] \|y - \bar{y}\|^* ;$$

$$|y(\tau^{x(t)}) - \bar{y}(\tau^{\bar{x}(t)})| \leq \left[K \left(k_1 \frac{1}{\rho_0} + k_2 \right) e^{\rho_0 t} + e^{\rho_0 t} \right] \|y - \bar{y}\|^*.$$

A generalization of the boundary problem (1), (2) is the following boundary problem :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\tau_0^{x(t)}), \dot{x}(\tau_0^{x(t)}), \lambda), \quad t \in I = [0, 1], \quad (15)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = x_1, \quad (16)$$

where the transformed argument $\tau_0^{(t)}$ is defined by the recurrent relations

$$\tau_k^{x(t)} = \tau_k(t, x(t), \dot{x}(t), x(\tau_{k+1}^{x(t)}), \dot{x}(\tau_{k+1}^{x(t)}), k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (m \geq 1),$$

$$\tau_m^{x(t)} = \tau_m(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Let the functions $\tau_k : (t, u_1, v_1, u_2, v_2) \rightarrow R (k = 0, 1, \dots, m-1)$ and $\tau_m : (t, u_1, v_1) \rightarrow R$ be defined in the domains, respectively :

$$G_{\tau_k} = I \times G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2,$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1; \quad G_m = I \times G_1 \times G_2$$

We will assume that in the domains $G_{\tau_k} (k = 0, 1, \dots, m)$ the functions τ_k satisfy the conditions

$$\begin{aligned} |\tau_k(t, u_1, v_1, u_2, v_2) - \tau_k(\bar{t}, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2)| &\leq \theta |t - \bar{t}| + k_1 |u_1 - \bar{u}_1| + \\ &+ k_2 |v_1 - \bar{v}_1| + k_3 |u_2 - \bar{u}_2| + k_4 |v_2 - \bar{v}_2|, \\ k &= 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (17)$$

$$|\tau_m(t, u_1, v_1) - \tau_m(\bar{t}, \bar{u}_1, \bar{v}_1)| \leq \theta |t - \bar{t}| + k_1 |u_1 - \bar{u}_1| + k_2 |v_1 - \bar{v}_1|.$$

Introduce the notations

$$a' = k_4 + k_2 N_3,$$

$$b' = 1 - k_3 M_0 + k_4 (T + N_1 M_0) - N_2 M_0 k_2 - N_3 (\theta + k_1 M_0),$$

$$c' = (T + N_1 M_0)(1 - k_3 M_0) + N_2 M_0 (\theta + k_1 M_0),$$

$$K' = \frac{b' - \sqrt{b'^2 - 4a'c'}}{2a'}$$

THEOREM 4. Let

1. The function $f: (t, u_1, u_2, v_2, \lambda) \rightarrow R$ be defined in G_f (see A1).
2. In the domain G_f the function $f(t, u_1, u_2, v_2, \lambda)$ is continuous with respect to λ and satisfies the Lipschitz condition:

$$|f(t, u_1, u_2, v_2, \lambda) - f(\bar{t}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \lambda)| \leq$$

$$\leq T|t - \bar{t}| + N_1|u_1 - \bar{u}_1| + N_2|u_2 - \bar{u}_2| + N_3|v_2 - \bar{v}_2|.$$

3. The condition A3 is fulfilled;

4. In the domains G_{τ_k} ($k = 0, 1, \dots, m$) the functions $\tau_k^{(t)}$ satisfy the inequalities $0 \leq \tau_k^{(t)} \leq 1$ and (17);

5. $b' > 0$

6. $b'^2 \geq 4a'c'$

7. The condition A7 is fulfilled.

8. The condition A8 is fulfilled.

9. The inequality $k_3 M_0 + k_4 K' < 1$ is fulfilled.

Then, the boundary problem (15), (16) has at least one solution.

The proof is accomplished in an analogous way to that of theorem 1 by using the inequalities following from the conditions of the theorem

$$|y(\tau_{k+1}^{(t)}) - y(\tau_{k+1}^{(\bar{t})})| \leq K' |\tau_{k+1}^{(t)} - \tau_{k+1}^{(\bar{t})}|,$$

$$|x(\tau_{k+1}^{(t)}) - x(\tau_{k+1}^{(\bar{t})})| \leq M_0 |\tau_{k+1}^{(t)} - \tau_{k+1}^{(\bar{t})}|,$$

$$|\tau_m^{(t)} - \tau_m^{(\bar{t})}| \leq (\theta + k_1 M_0 + k_2 K') |t - \bar{t}|,$$

$$|\tau_k^{(t)} - \tau_k^{(\bar{t})}| \leq (\theta + k_1 M_0 + k_2 K') |t - \bar{t}| + (k_3 M_0 + k_4 K') |\tau_{k+1}^{(t)} - \tau_{k+1}^{(\bar{t})}|,$$

$$|\tau_0^{(t)} - \tau_0^{(\bar{t})}| \leq \frac{\theta + k_1 M_0 + k_2 K'}{1 - (k_3 M_0 + k_4 K')} \cdot |t - \bar{t}|.$$

THEOREM 5. Let the conditions of theorem 4 and the following inequality be satisfied :

$$q'_0 = N'_0 \left(1 + \frac{L}{l} \right) < 1,$$

where

$$N'_0 = \sup \left\{ N_1 t + N_2 \tau_0^{x(0)} + N_3 + (N_2 M_0 + N_3 K') \times \right. \\ \times \frac{(k_1 t + k_2 + k_3 + k_4) [1 - (k_3 M_0 + k_4 K')^{m+1}]}{1 - (k_3 M_0 + k_4 K')} : (t, u_1, v_1, u_2, v_2) \in I \times G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2 \left. \right\}.$$

Then, the boundary problem (15), (16) has a unique solution.

The proof may be carried out along the scheme of the proof of theorem 2, by using the inequalities following from the conditions of the theorem :

$$|x(\tau_{k+1}^{x(t)}) - \bar{x}(\bar{\tau}_{k+1}^{x(t)})| \leq M_0 |\tau_{k+1}^{x(t)} - \bar{\tau}_{k+1}^{x(t)}| + \|y - \bar{y}\| \tau_{k+1}^{x(t)};$$

$$|y(\tau_{k+1}^{x(t)}) - \bar{y}(\bar{\tau}_{k+1}^{x(t)})| \leq K' |\tau_{k+1}^{x(t)} - \bar{\tau}_{k+1}^{x(t)}| + \|y - \bar{y}\|;$$

$$|\tau_m^{x(t)} - \bar{\tau}_m^{x(t)}| \leq (k_1 t + k_2) \|y - \bar{y}\|;$$

$$|\tau_k^{x(t)} - \bar{\tau}_k^{x(t)}| \leq (k_1 t + k_2 + k_3 + k_4) \|y - \bar{y}\| + (k_3 M_0 + k_4 K') |\tau_{k+1}^{x(t)} - \bar{\tau}_{k+1}^{x(t)}|;$$

$$|\tau_0^{x(t)} - \bar{\tau}_0^{x(t)}| \leq \frac{(k_1 t + k_2 + k_3 + k_4) [1 - (k_3 M_0 + k_4 K')^{m+1}]}{1 - (k_3 M_0 + k_4 K')} \|y - \bar{y}\|$$

THEOREM 6. Let the conditions of theorem 4 and the following inequality hold :

$$\rho_0^{*1} = N'(\rho_0) \left(1 + \frac{L}{l} \right) < 1,$$

where ρ_0 is the point at which the function

$$N'(\rho) = \max \left\{ \frac{N_1}{\rho} + (N_2 M_0 + N_3 K') \left(\frac{k_1 + k_3 + k_2 + k_4}{\rho} \right) \frac{1 - (k_3 M_0 + k_4 K')^{m+1}}{1 - (k_3 M_0 + k_4 K')} + \right. \\ \left. + \frac{N_2}{\rho} e^{\rho(\tau_0^{x(t)} - t)} + n N_3 : (t, u_1, v_1, u_2, v_2) \in I \times G_1 \times G_2 \times G_1 \times G_2 \right\}$$

reaches its minimum for $0 < \rho < +\infty$ i.e.

$$N'(\rho_0) = \min\{N'(\rho) : 0 < \rho < +\infty\}.$$

Then the boundary problem (15), (16) has a unique solution.

The proof of the theorem is accomplished analogously to that of theorem 2, by using the norm

$$\|z\|_{C \times \Lambda}^* = \|y\|^* + q^*|\lambda|, \quad \|y\|^* = \max \{|y(t)|e^{-\rho_0 t} : t \in I\},$$

where

$$y \in C, \quad \lambda \in \Lambda, \quad z = (y, \lambda), \quad q^* = \frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{L}{l} + \frac{1}{N'(\rho)} - 1 \right)$$

and the inequalities

$$|y(t)| \leq \|y\|^* e^{\rho_0 t},$$

$$|x(\tau_0^{x(t)}) - \bar{x}(\bar{\tau}_0^{x(t)})| \leq M_0 |\tau_0^{x(t)} - \bar{\tau}_0^{x(t)}| + \|y - \bar{y}\|^* \frac{1}{\rho_0} e^{\rho_0 \tau_0^{x(t)}},$$

$$|y(\tau_0^{x(t)}) - \bar{y}(\bar{\tau}_0^{x(t)})| \leq K' |\tau_0^{x(t)} - \bar{\tau}_0^{x(t)}| + \|y - \bar{y}\|^* e^{\rho_0 t},$$

$$|\tau_m^{x(t)} - \bar{\tau}_m^{x(t)}| \leq \left(k_1 \frac{1}{\rho_0} + k_2 \right) \|y - \bar{y}\|^* e^{\rho_0 t},$$

$$|\tau_k^{x(t)} - \bar{\tau}_k^{x(t)}| \leq \left(\frac{k_1 + k_3}{\rho_0} + k_2 + k_4 \right) \|y - \bar{y}\|^* e^{\rho_0 t} +$$

$$+ (k_3 M_0 + k_4 K') |\tau_{k+1}^{x(t)} - \bar{\tau}_{k+1}^{x(t)}|,$$

$$|\tau_0^{x(t)} - \bar{\tau}_0^{x(t)}| \leq \left(\frac{k_1 + k_3}{\rho_0} + k_2 + k_4 \right) \frac{1 - (k_3 M_0 + k_4 K')^{m+1}}{1 - (k_3 M_0 + k_4 K')} \|y - \bar{y}\|^*$$

REFERENCES

1. Ahmerov K. T., Svarichevskaya N. A., Jagubov M. A. Priblizhenoe reshenie dvuhtocheynoi kraevoi zadachi s parametrom metodom osrednenia funktsionalnih popravok Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSR, v. 29, No 8, 1973.
2. Bensaad H., Norkin S., B. Kraevaia zadacha s upravleniem nachalnoi funktsii dlia nelineinikh sistem differentsialnih uravnenii s zapazdivaniem argumenta. Ukrainskii Mat. Zhurnal, v. 26, No. 1, 1974.
3. Israilov I. Ob odnoi kraevoi zadache s parametrom dlia diferentsialno ekstremalnih uravnenii s zapazdivaushtim argumentom. Uch. zap. Azerb. Gos. Univ., No. 4, 1968.
4. Seidov Z. B. Kraevaia zadacha dlia differentsialnih uravnenii s zapazdivaushtim argumentom. Ukrainskii Mat. Zhurnal, v. 25, No. 6, 1973.

Asupra unei probleme limită pentru o ecuație diferențială de ordinul 1 de tip superneutru, cu un parametru

Se consideră o problemă la limită cu două puncte pentru o ecuație diferențială de ordinul I, tip superneutru cu un parametru. S-au demonstrat teoreme pentru existență și unicitate, ca și o teoremă pentru existența unei soluții a problemei limită considerată.

S-au formulat teoreme analoage pentru o problemă limită mai generală unde deviația argumentului depinde de variabila independentă t , de funcția necunoscută $x(t)$ și de derivata $\dot{x}(t)$, prin m iterații.

HOLLOW CATHODE HE—CD LASER*

C. P. CRISTESCU, I. M. POPESCU, A. M. PREDA

The original construction of a He-Cd hollow cathode laser is presented. Studies carried out on the active medium parameters in order to optimize the output at the wavelength of 533.6 and 537.8 nm, are described.

1. Introduction

One can obtain laser oscillation on lines of metallic ions in three alternate configurations which differ from one another in the way the plasma which constitute the active medium is created.

A first configuration uses the positive column of an electric discharge in a capillary as a means of creating the population inversion [1]. The uniformity of the distribution of metallic ions along the active zone is insured by cataphoretic transport [2].

Another way of generating an active plasma consists in the evaporation and the excitation of the metal (cadmium) by laser irradiation. This can be achieved if a high power puls from a TEA CO₂ laser is focused on a target of solid cadmium [3].

A third configuration, which provided the best results so far, uses the negative glow of an electric discharge as laser active medium. The fact that the negative light is generated only in a restricted zone in the neighbourhood of the cathode wall it is necessary to utilize a cathode of appropriate geometry. The hollow cathode generates a negative glow which proved to be a very adequate medium for the creation of population inversion on the ionic lines of metallic vapours [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].

The most important lines of the Cd ion at 636.0, 537.8 and 441.6 nm can oscillate simultaneously in the hollow cathode structure so that the output of such a device has the appearance of white light [11].

In this work we present the realisation of a hollow cathode He—Cd laser with simultaneous oscillation on the 533.6 and 537.8 nm lines of the cadmium ion.

2. Negative glow as laser active medium

The homogeneity of the plasma which constitute the active medium is a factor of essential importance. In order to establish the optimum geometry we studied the transverse and the longitudinal distribution of the intensity of the spectral lines in a hollow cathode discharge. The

* Manuscript received Mars 2, 1977.

transverse distribution of the cadmium ions was analysed by measuring the intensity of the light originating in a cylindrical zone parallel to the cathode axis whose diameter was small in comparison with the diameter of the cathode tube. The sampling zone could be moved along a diameter of the cathode [12].

By this method we found out that for cathode diameters of 7 mm or more the curve of the intensity versus the distance from the cathode wall shows a dip at the cathode axis. This means that the cathodic space and the negative glow hardly exceed a distance of 3,5 mm from the cathode wall. In the case of a cathode tube with the diameter of 5 mm the negative glow from various directions will overlap in the neighbourhood of the cathode axis insuring optimum conditions for the excitation of the cadmium ions in this zone.

In order to obtain a homogeneous plasma of appreciable length one has to choose very carefully the way the anodes are placed in the configuration. We determined the suitable geometry by studying the variation of the intensity of the cadmium and helium lines inside the cathode as a function of the distance from the anode.

The experimental arrangement is showed in figure 1.

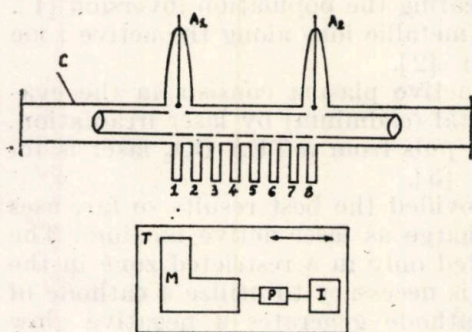


Fig. 1

The discharge tube of silica contained a stainless steel cathode C of 5 mm bore and 20 cm length and two lateral anodes 7 cm from one another.

The cathode had holes in front of the anodes which allowed the discharge to take place inside the cathode tube. The light emitted by the discharge was observed via lateral holes perforated in the cathode wall along a generator between the two anodes. The observation holes were small (≈ 1 mm) in comparison with the

diameter of the cathode. The silica tube was provided with lateral arms with windows in front of each observation hole which had sufficient length to prevent the cadmium deposition on the windows. The detection system consisted of a monochromator denoted by *M* in figure 1, a photomultiplier *P* and a recorder *I*, and was placed on a platform which could be displaced along the cathode axis. We measured the intensity of spontaneous radiation at 501.6 nm line of He I, 479.9 nm line of Cd I and 537.8 and 441.6 nm lines of Cd II at a constant temperature for various helium pressures and various discharge currents. The experimental results are presented in figures 2, 3, 4, and 5, respectively. The distance *z* is measured from the left hand side anode so that this anode was at $z = 0$ cm. The lines 501.6 and 479.9 nm emitted by neutral atoms show a decrease as the distance from the anode increases, this behaviour being very strong for the cadmium line (figure 3).

The ionic lines show a different variation increasing towards the middle of the distance between the two anodes.

The presented behaviour can be understood taking into account the various mechanisms which take place in the discharge. The plasma of the negative glow is supported by the primary electrons which come from the cathodic fall space. These electrons ionize the gas generating

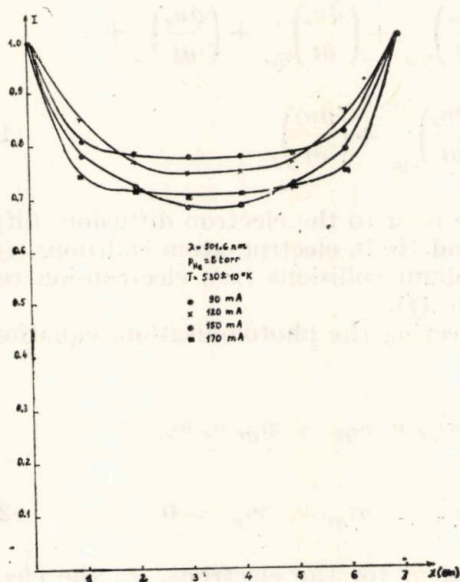


Fig. 2

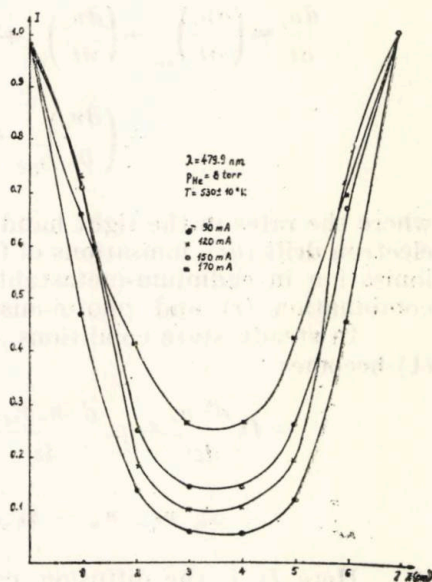


Fig. 3

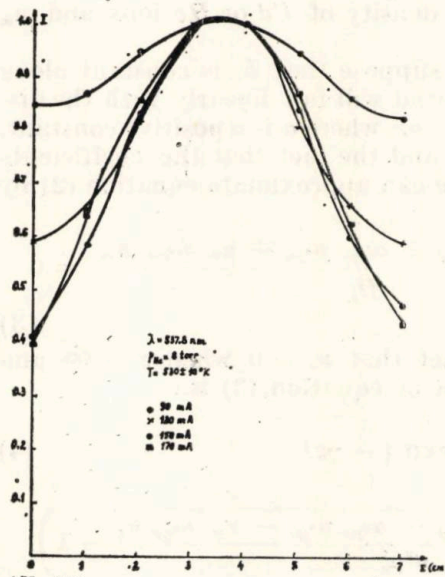


Fig. 4

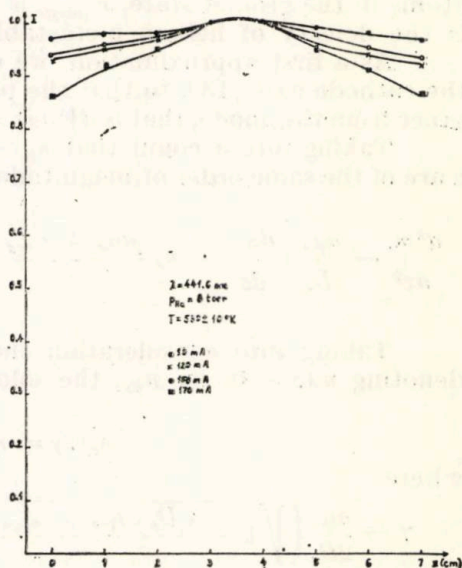


Fig. 5

at the same time secondary electrons which have less energy but enough to produce excitations and ionisations. So the existence of the cathodic plasma is conditioned by the electron density n_e . The time variation of n_e is due to many processes so that we can write

$$\begin{aligned} \frac{dn_e}{dt} = & \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{\text{dif}} + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{\text{dr}} + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{i_{Cd}} + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{i_{He}} + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_m + \\ & + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{r_{Cd}} + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_{r_{He}} + \left(\frac{\partial n_e}{\partial t} \right)_f \end{aligned} \quad (1)$$

where the rates in the right hand side refer to the electron diffusion (dif), electron drift (dr), ionisations of Cd and He in electron-atom collisions (i), ionisation in cadmium-metastable helium collisions (m), electron-ion recombination (r) and photoionisation (f).

In steady state conditions, neglecting the photoionisation, equation (1) becomes

$$\begin{aligned} -D_e \frac{d^2 n_e}{dz^2} + \mu_e \frac{d(n_e E_z)}{dz} + \alpha_{i_{Cd}} n_e n_{o_{Cd}} + \alpha_{i_{He}} n_e n_{o_{He}} + \\ + \alpha_m n_{o_{Cd}} n_m - \alpha_{r_{Cd}} n_e n_{i_{Cd}} - \alpha_{r_{He}} n_e n_{i_{He}} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Here D_e is the diffusion coefficient for the electrons, μ_e , the electron mobility, E_z is the z -component of the electric field, $\alpha_{i_{Cd}} n_e$ and $\alpha_{r_{Cd}} n_e$ are the ionisation and recombination coefficients for Cd or He, α_m is the Penning reaction coefficient, $n_{o_{Cd}} n_e$ is the density of Cd or He atoms in the ground state, $n_{i_{Cd}} n_e$ is the density of Cd or He ions and n_m is the density of helium metastables.

As a first approximation we can suppose that E_z is constant along the cathode axis [13], so that the potential will fall linearly with the distance from the anode, that is $dV_z/dz = -az$, where a is a positive constant.

Taking into account that $n_0 > n_i$, and the fact that the coefficients α are of the same order of magnitude, we can approximate equation (2) by

$$\frac{d^2 n_e}{dz^2} - \frac{a\mu_e}{D_e} \frac{dn_e}{dz} - n_e \frac{a\mu_e + \alpha_{i_{Cd}} n_{o_{Cd}} + \alpha_{i_{He}} n_{o_{He}} + \alpha_m n_{o_{Cd}} n_m}{D_e} = 0 \quad (3)$$

Taking into consideration the fact that $n_e = 0$ when $z \rightarrow \infty$ and denoting $n_e(z=0)$ by n_{e0} , the solution of equation (3) is:

$$n_e(z) = n_{e0} \exp[-\gamma z] \quad (4)$$

where

$$\gamma = \frac{a\mu_e}{2D_e} \left(\sqrt{1 + \frac{4D_e(a\mu_e + \alpha_{i_{Cd}} n_{o_{Cd}} + \alpha_{i_{He}} n_{o_{He}} + \alpha_m n_{o_{Cd}} n_m)}{a^2\mu_e^2}} - 1 \right) \quad (5)$$

The number of ions generated on a distance dz by the $n_e(z)$ electrons is given by [14]

$$\begin{aligned} dn_i &= bn_e(z) p (\bar{V} + V_z - V_i) dz = \\ &= b n_{eo} p (\bar{V} - az - V_i) \exp [-\gamma z] dz \end{aligned} \quad (6)$$

where $\bar{V}$ is the potential which corresponds to the mean kinetic energy of the electrons, V_i is the ionisation potential, p is the gas pressure and b a rate constant.

Integrating equation (6) we can write

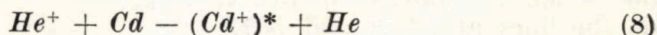
$$n_i(z) - n_{io} = A z \exp [-\gamma z] + B \exp [-\gamma z] \quad (7)$$

where n_{io} is the ion density for $z \rightarrow 0$ and

$$A = \frac{a b n_{eo} p}{\gamma} \text{ and } B = \frac{a b n_{eo} p}{\gamma^2} - \frac{b n_{eo} p (\bar{V} - V_i)}{\gamma}.$$

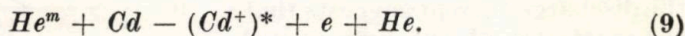
According to equation (4) the number of the free electrons is decreasing exponentially as the distance from the anode increases so that the light emitted in transitions that originate on atomic levels excited by direct electron collisions will show a similar variation with z . This satisfactorily explains the behaviour of the lines at 501.6 and 479.9 nm (figures 2 and 3). The stronger variation of the Cd I line indicates the fact that the cadmium concentration is not constant in the space between the anodes, supposing that the helium concentration (pressure) is practically constant.

In what concerns the behaviour of the ionic lines we observe that the excitation of the upper level of the line at 537.8 nm is by charge transfer reaction between the helium ions and the cadmium atoms



where by the notation $(\text{Cd}^+)^*$ we mean an excited ionic state of cadmium. Thus the intensity emitted in a transition whose upper level is excited by charge transfer will have the same variation with z as the ion density. According to equation (7) the ion density is increasing at first as the distance from the cathode is increasing and this will account for the behaviour of the line at 537.8 nm (figure 4).

The 441.6 nm line is excited primarily by Penning reactions



Because the helium metastable (He^m) density satisfies an equation of the same form (6) as the ion density in which V_i is replaced by the excitation potential of the metastable states V_m , we expect that the intensity of a line excited by reaction (9) will behave in the same way as a line excited by reaction (8). This conclusion is confirmed by the curves in figure 5. The slower variation of these curves we interpret as evidence for the fact

that besides the Penning reaction an important contribution to the populating of the upper level of the transition at 441.6 nm is given by the excitation indirect electron collisions.

3. Laser parameters

The conclusions of the presented experiment is that a distance of 7 cm between the adjacent anodes might be too long for a sufficiently homogenous plasma. According to the results of these experiments we

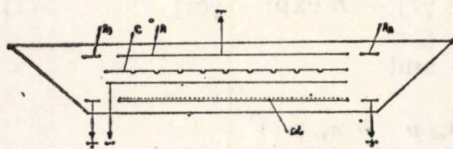


Fig. 6

choosed the following geometry of the laser. The cathode *C* was a 5 mm diameter stainless stell tube with a length of 80 cm provided with anodic holes made 4 cm apart along a generator. The anode *A* was a stainless steel tube as well with a 15 mm inner diameter placed coaxially with the cathode (figure 6). Ultrapure cadmium of natrual isotopic composition was placed inside the anode in the from of thin foil. The system was enclosed in a Pyrex glass tube porvided with Brewster windows. In order to avoid cadmium deposition on the windows we used two auxiliary discharges between the cathode ends and two auxiliary anodes *A*₁ and *A*₂. The voltage for the main discharge was obtained from a d.c. unfiltered source and the voltages for the auxiliary discharges, from two d.c. sources.

The temperature appropriate for the necessary partial pressure of the cadmium vajour was easily attained through the heat generated by the discharge. Its value was between 180°C and 320°C and was measured by a thermometer.

The range of the pressure for which the device oscillated on the lines at 533.6 and 537.8 nm was between 3 and 15 Torr.

The variation of the intensity of the laser oscillation versus the discharge current is given in figure 7. The curves psent no sign of saturation in the range of discharge currents covered in our experiments. The linear variation of the intensity of the line with the discharge current suggests that the excitation of the upper level of the transition is taking place by one step processes with electrons.

The thresholds and the slopes of the curves are different for the two oscillating lines.

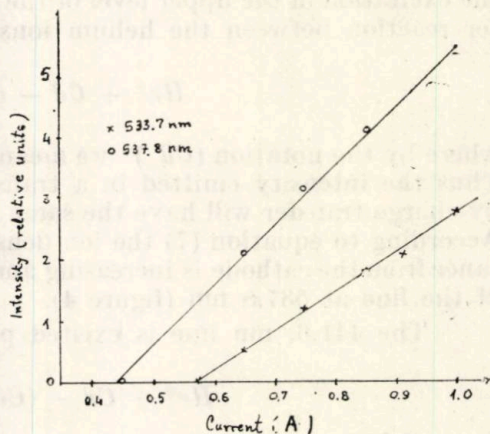


Fig. 7

REFERENCES

1. G. R. Fowler, W. T. Silfvat I.E.E.E.J. Quantum Electron QE-1, 131 (1965).
2. J. P. Goldsborough Appl. Phys. Lett. 15, 159 (1969).
3. K. Toyoda, M. Kobayama, S. Namba, Japan J. Appl. Phys. 15, 2033 (1976).
4. Y. Sugawara, Y. Tokiwa, Japan J. Appl. Phys. 9, 588 (1970).
5. W. K. Schuebel, I.E.E.E.J. Quantum Electron QE-6, 574 (1970).
6. J. A. Piper, C. E. Webb, J. Phys. D: Appl. Phys. 6, 400 (1973).
7. S. C. Wang A. E. Siegman, Appl. Phys. 2, 143 (1974).
8. J. R. Mc. Neil, W. L. Johnson, G. L. Collins, K. B. Persson, Appl. Phys. Lett 29, 172 (1976).
- 9 T. Salamon, L. Csillag, M. Janossy, K. Rozsa, Phys. Lett. 46 A, 17 (1973).
10. C. P. Cristescu, I. M. Popescu, A. M. Preda, Rev. Roum. Phys. 22 Nr. 4 (1977).
11. K. Fujii, T. Takahashi, Y. Asami, I.E.E.E.E J. Quantum Electron QE-11, 111 (1975).
12. C. P. Cristescu, G. F. Cone, I. M. Popescu, A. M. Preda, Rev. Roum. Phys 21, 153 (1976).
13. B. I. Moskalef, Proc. IX Internation. Conf. on Phenom. in Ionised Gases, Buch. p. 166 (1969).
14. G. Francis. Handbuch der Physik 22, 53 (1956).

Laser cu He-Cd cu catod cavitat

Se prezintă o construcție originală a unui laser cu He-Cd cu catod cavitat. De asemenea, se fac studii asupra parametrilor mediului activ laser pentru optimizarea puterii de ieșire pe lungimile de undă 533,6 nm și 537,8 nm.

C.Z.: 771.531:66.018:620.197

ELECTRICAL AND OPTICAL PROPERTIES OF SnO_2 THIN FILMS OBTAINED BY A VAPOUR REACTION TECHNIQUE*

MARIA HONCIUC, IULIANA CUCULESCU, CORNELIA MOȚOC, EUGENIA
PENȚIA

SnO_2 thin films were obtained by a vapour reaction technique from SnCl_4 or SnCl_2 alcoholic or water solutions. Resistivity measurements and thermal annealing in O_2 , N_2 or air were performed and two activation energies of 0,035 eV and 0,51 eV were determined indicating that O_2 vacancies are responsible for conduction mechanism. From the absorption studies an energy band gap of 3,95 eV is determined.

Introduction

As known, thin films of SnO_2 exhibit high electrical conductivities and this makes it possible to use them as transparent electrodes in electro-optic devices.

Some theoretical papers as well as experimental ones are devoted to topics concerning electrical properties of both single crystals and thin films of SnO_2 obtained by different techniques. As shown [1, 2, 3, 4] there is a large scatter of data with reference to the energy gap: values such as 3.50–4.00 eV were determined for thin films and 3.70–4.00 eV for single crystals.

With reference to electric resistivity values, it was experimentally proved that the method and the deposition conditions as well as post deposition treatments are of importance in changing the conduction mechanisms [5, 6].

It is the aim of this paper (1) to investigate both conductivities and optical absorption (transmission) in SnO_2 thin films obtained using different techniques, (2) to follow changes in electrical resistivities after thermal annealing in N_2 , O_2 and air and (3) to establish values for energy gap.

Experimental

Thin films of SnO_2 were obtained by vapour reaction sputtering techniques. These consist in: (a) spraying SnCl_4 in alcoholic solution to which HCl was added in order to avoid hydrolysis of Sn, (b) spraying SnCl_2 in a 50% aqueous solution.

In both cases different amounts of SbCl_3 were added to the spraying solutions in order to improve thin film conductivities.

The films were deposited on fused quartz or glass substrates heated to 500–550°C. After depositing the films were subjected to thermal treatments at 600°C in O_2 , N_2 or air during different periods of time. As shown by interferometric techniques, thicknesses varying between

* Manuscript received 10 January 1977.

300–900 Å were obtained when different amounts of solution were sputtered on the substrates. X-ray diffraction indicated an amorphous structure for thicknesses less than 800 Å. When the thickness exceeded 800–850 Å, the structure consisted in a mixture of tetragonal polycrystalline SnO_2 and an amorphous phase.

Scanning electron microscope as well as X-ray activation analysis techniques revealed a homogeneous repartition of the sprayed oxide as well as of the Sb obtained as a result of decomposition of the sputtered SbCl_3 .

Electrical properties

Values of resistance per square for thin films obtained using methods (a) or (b) are presented in Table I. As shown, lower resistances are obtained in the first case. We may conclude that this method is the best to use when good quality heating electrodes are required. In the second case, the films have higher resistivities and, as will be shown later, clearly semiconductive properties.

Resistivity per square of thin films obtained by using the two methods and changes occurring as a result of annealing.

Table 1

Procedure	Sb % by weight	sample	$R_{\square} (\Omega/\square)$			
			as obtained from vapour phase	after annealing 1/2h in		
				O_2	N_2	air
a	1.5	1	240	520	260	350
	1	2	320	690	311	428
	3	3	80	240	87	154
	2	4	52	190	54	102
b	1.5	3	1,300	1,420	1,306	1,350
	2	11	990	1,103	991	1,085
	3	20	590	698	590	624
	3	26	495	542	496	512

Such films may be used in electro-optical devices like photosensitive diodes, windows for solar cells etc. In both cases Sb additions increases film conductivities.

In order to explain the conduction mechanisms in the sprayed thin films, the temperature variation of the resistivity was determined. Measurements were performed using a Y-WTK 1 bridge; the samples were introduced into a furnace and the temperature was followed using thermocouples fixed to the quartz or glass substrate.

For the films obtained using procedure (a), the resistivity decreased linearly with temperature and the temperature coefficient of resistivity was approximatively equal to $3 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$ for all examined samples.

* In all cases thicknesses of 800 Å were considered.

The dependence of R (ohm/square) on temperature for samples obtained using procedure (b) is plotted in Fig. 1. These curves make it possible to determine activation energies for different conduction mechanisms. In all samples obtained using method (b) two activation energies: 0.035 eV and 0.15 eV are observed at low and high temperatures respectively. Similar activation energy values have been reported by Samson et al. [7] as occurring in SnO_2 single crystals and it was assumed and experimentally proved that O_2 vacancies are responsible for both of them.

Here we present another confirmation of this hypothesis: when the films were submitted to thermal treatments in vacuum or gases, changes in their resistivities occur as indicated in table I. If the thermal treatment is performed in O_2 , after 20 minutes an increase in resistance is produced and the temperature coefficient of resistivity is increased. No significant changes in resistivity are detected when the sample is heated in N_2 or vacuum during the same period of time.

High concentrations of electrons, as determined by Hall effect were obtained at room temperature (24°C). These results are indicated in Table II, for thin films differently doped with Sb an exhibiting resistivities per square varying between 0.003–0.001 Ωcm .

Values for conductivities at room temperature were determined for the same samples. This makes it possible to determine Hall mobilities. The results are shown in Table II; we notice a good agreement with the data obtained by other investigators [1].

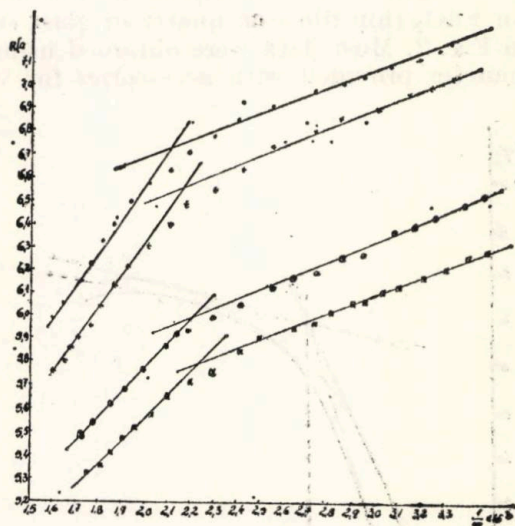


Fig. 1. Temperature dependence of $\ln R$ (ohm/square) for thin films obtained using procedure b)

Conductivities, Hall coefficients carrier concentrations and mobilities obtained at room temperature for samples sprayed using procedure (b)

Table 2

sample	$\sigma(\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1})$	$R \left(\frac{\text{cm}^2}{\text{C}} \right)$	$n (\text{cm}^{-3})$	μ_H
8	294	0.991	6.2×10^{18}	291
11	385	0.971	6.4×10^{18}	374
20	666	0.088	7.1×10^{19}	59
26	769	0.075	8.3×10^{19}	57

Optical properties

Optical transmission as a function of wavelength was determined for SnO_2 thin films on quartz or glass substrates and the data are shown in Fig. 2. Most data were obtained using an Unicam SP 700 spectrophotometer provided with accessories for visible and ultraviolet radiations.

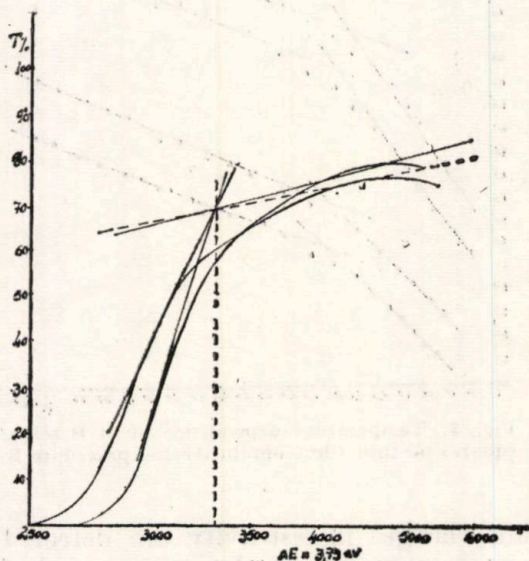


Fig. 2. Optical transmission as a function of wavelength for different thin films and determination of the conventional energy gap.

From these transmission curves, corresponding to samples obtained using method (b), the conventional absorption edge may be calculated. Using a method described in [8] the energy is equal to $E_0 = h\nu_0 = h \frac{c}{\nu_0}$ and, as shown in Fig. 2, this is equal to 3.73 eV. This value is in fairly good agreement with [5].

This result may be considered as a conventional energy gap for films on glass or quartz substrates containing different amounts of Sb. In order to determine the real energy gap for SnO_2 the method described in [9] has been used.

As known, the reflexion coefficient of SnO_2 is given by :

$$\mathfrak{R} = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \quad (1)$$

where n is the refraction index and k the absorption index for SnO_2 thin film*). Following the method described in [9], the reflexion coefficient corresponding to SnO_2 thin films deposited on quartz substrate is :

$$R = T^2 - \mathfrak{R}^2 + 2\mathfrak{R} - 1 - \frac{\sqrt{(T^2 - \mathfrak{R}^2 + 2\mathfrak{R} - 1)^2 + 4T^2}}{4 - 2\mathfrak{R}} \quad (2)$$

where T is the transmission for the system substrate-thin film and is determined from the transmission curves (Fig. 2). Then, the absorption coefficient is :

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \left\{ \frac{(1-R)^2}{2T} + \sqrt{\left(\frac{1-R^2}{2T} \right) + R^2} \right\} \quad (3)$$

where d is the film thickness.

* As in (1) we assumed $n = 1.96$.

Using (1), (2) and (3) the dependence of α on photon energy ($h\nu$) is determined. The results are shown in Fig. 3. Extrapolating for $\alpha=0$, in energy gap of 3.95 eV is obtained in agreement with the result indicated by [1] for SnO_2 .

Conclusions

SnO_2 thin films with resistivities of 50–2000 Ω/square were obtained using vapour reaction techniques and from temperature variation in resistivity impurity levels at 0.035 and 0.15 eV were determined, in very good agreement with the results obtained by Samson and Fonstad for SnO_2 single crystals.

The films are semiconductivve, with a wide energy gap and a value of 3.59 eV was determined from optical transmission data.

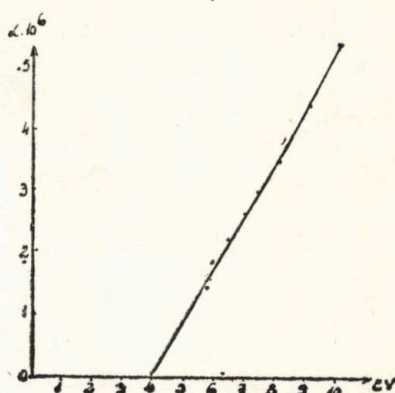


Fig. 3. Absorption coefficients as a function of photon energy ($h\nu$) and determination of the real energy gap.

Physics Department
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej“
Bucharest

REFERENCES

1. K. Ishigura, T. Sasaki, T. Arai, I. Inisi, J. Phys. Soc. Japan 13, 296 (1958).
2. T. Arai, J. Phys. Soc. Japan, 15, 916 (1960).
3. M. Nagassawa, Japanese J. Appl. Phys. 10, 472 (1971)
4. L. L. Kazmerski, D. M. Racine, Thin Solid Films 30, L 19 (1975).
5. H. J. van Daal, Solid State Commun. 6, 5 (1968).
6. M. Hagasawa, S. Shinoya, Jap. J. Appl. Phys. 10, 727 (1971).
7. S. Samson, C. G. Fonstad, J. Appl. Phys. 44, 10, 4618 (1973).
8. M. Kawamoto, T. Tsuchihashi, J. Amer. Ceram. Soc. 54, 141 (1971). R. Andreichin et al. J. Non. Cryst. Sol. 20, 101 (1976).
9. W. Paul, R. Grigorovici, Proc. 12 Int. Conf. Phys. Semic, Stuttgart (1974).

Proprietăți electrice și optice ale straturilor subțiri de SnO_2 obținute prin tehnica reacției în fază vapori

Filme subțiri de SnO_2 au fost obținute prin tehnica reacției în fază de vapori din soluții apoase sau alcoolice de SnCl_4 sau SnCl_2 — Au fost efectuate măsurători de rezistivitate și tratamente termice în O_2 , N_2 sau aer și s-au obținut două energii de activare de 0.035 eV și 0.15 eV, fapt care indică importanța vacanțelor de O_2 în mecanismul de conducție. Din măsurătorile de absorbție s-a determinat lărgimea zonei interzise ca fiind de 3.70 eV.

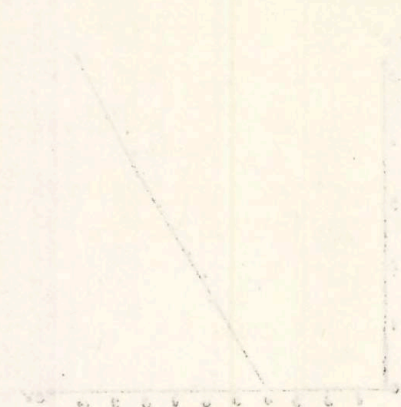


Fig. 1. Dependence of the parameter α on the wavelength λ for GaAs. The values of α are given in the text.

The data are summarized in Table 1. The values of α are given in the text.

Table 1. Dependence of the parameter α on the wavelength λ for GaAs.

TABLE 1

λ , μ	α
0.5	0.1
1.0	0.2
1.5	0.3
2.0	0.4
2.5	0.5
3.0	0.6
3.5	0.7
4.0	0.8
4.5	0.9
5.0	1.0
5.5	1.1
6.0	1.2
6.5	1.3
7.0	1.4
7.5	1.5
8.0	1.6
8.5	1.7
9.0	1.8
9.5	1.9
10.0	2.0

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

The values of α are given in the text.

C.Z.: 538.221

ON CERTAIN LOGICAL CORRELATIONS OF THE MAGNETIC PERMEABILITY DISPERSION PRESENTED BY SOFT FERRITES*

D. IORDACHE, LUMINIȚA DANIELLO, M. STAN, I. BELCIU

In order to study the dependence of the dynamic magnetic parameters of the soft ferrimagnetic materials on the frequency, in the magnetic permeability dispersion domain, complete determinations corresponding to several types of soft oxitic ferrimagnetic materials were effected. The obtained results prove the validity of the existing theoretical μ , $\tan \delta = f(\nu)$ correlations, and the possibilities of determining some structural parameters.

As it is known [1-8] the dispersion of the magnetic permeability is characterised (fig. 1) — practically for all the ferro and ferrimagnetic materials studied — by the presence of two maxima on the left and the right sides of the frequency of 1 GHz.

The theoretical studies [9-14] showed that the left side maximum corresponds to the magnetic resonance of the coupled spins, while the maximum on the right side is connected with resonance of the spins of the free atoms.

J.H. Van Vleck using the evolution quantum equation

$$\frac{d\hat{S}_j}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{S}_j] \quad (1)$$

and accepting for the hamiltonian in the presence of the magnetic field the expression :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & Bg \mu_B \sum_j S_{jB} + \sum_{j,k} I_{jk} \hat{S}_j \hat{S}_k + \\ & + \sum_{j,k} D_{jk} \left[\hat{S}_j \hat{S}_k - 3 \frac{(\vec{x}_{jk} \hat{S}_j)(\vec{r}_{jk} \hat{S}_k)}{r_{jk}^2} \right] + \end{aligned}$$

+ corrective terms due to the spin-orbit and quadrupolar interactions, (2) found an equation including the effective magnetic field

$$\vec{B}_{ef} = \vec{B} + f(\vec{M}_s, \nabla^2 \vec{M}_s, I_{jk}, k, a)$$

* Manuscript received 16 December 1975.

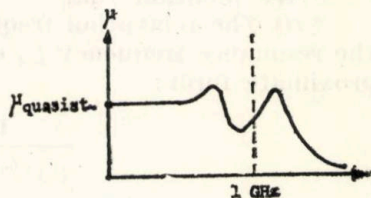


Fig. 8

the same that Landau and Lifschitz [9] deduced from classical arguments :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \left\{ (\vec{M} \times \vec{B}_{ef}) - \frac{M_{pd}}{M^2} \left[\vec{M} \times (\vec{M} \times \vec{B}_{ef}) \right] \right\} \quad (3)$$

In the course of the demonstration use was made of the relations :

$$S_{jx}, S_{jy} \ll S_{jz} \equiv S_{jB} \cong \frac{M}{g \mu_B n_0} \quad (4)$$

From the Landau-Lifschitz equation one obtains the way dependences of the initial permeability and of the tangent of the loss angle on the frequencies :

$$\frac{1}{\mu_{ri}^{(j)-1}} = \frac{1}{\chi_{i0}} - \frac{f^2}{\chi_{i0} f_0^2} \left[1 - \frac{f_0^2}{f_{rel}^2} \frac{1}{1 - \frac{f^2}{f_0^2}} \right] \quad (5)$$

$$\tan \delta_{ni}(f) = \frac{ff_0}{f_0^2 - f^2} \frac{f_0}{f_{rel}} \quad (6)$$

We mention that :

(i) The relaxation frequency being usually three times larger than the resonance frequency f_0 , equation (5) could be written also in the approximate form :

$$\frac{1}{\mu_{ri}(f) - 1} \cong \frac{1}{\chi_{i0}} - \frac{f^2}{\chi_{i0} f_0^2} \quad (7)$$

which is useful for the calculation of the zero order approximation of the resonance frequency and of the static susceptibility.

(ii) The relaxation and resonance frequencies f_0, f_{rel} in equations (5) and (6) represent statistical averages on the totality of the Bloch walls, and :

$$0,02 \ll \lim_{f \rightarrow f_0} \tan \delta_{ni}(f) = \text{finite number} \quad (8)$$

(iii) The frequencies f_0 and f_{rel} can be estimated in function of certain parameters of the Bloch walls, namely :

— in the case of the Doring-Becker model [10], [11] (oscillations of the Bloch walls + natural ferimagnetic resonance)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{m_{fr}}} ; f_{rel} = \frac{\alpha}{2\pi\beta} ; \beta = \frac{4\pi m_{fr} \gamma M_{pd}}{g_{fr}} \quad (9)$$

$$m_{fr} = \frac{m^2}{2\pi e^2} \frac{\rho_w}{M_s a^2 n \mu \sin^2 \theta}$$

— in the case of the Kittel model [12] (oscillations + wall displacements)

$$f_0 = \frac{gk}{\pi M_s} = \frac{gM_s}{3\pi\chi_{i0}^{rot}} ; f_{rel} = \frac{M_s S v / B}{\pi\chi_{i0}^{depl.}} \quad (10)$$

From the above we infer that the of study of the frequency dependence of the magnetic permeability and the loss angle tangent (for $f < \frac{f_0}{3}$) leads — in the case of a satisfactory precision of the measurements — to an estimate of the magnetic resonance parameters of the coupled spins. The precision of estimates can be appreciated by χ_{i0} test (comparison with the results obtained from static or low frequency measurements) and λ test (compatibility of the theoretical linearized correlations with the experimental data).

1. Experimental methods used for the determination of the low and high frequency dynamic magnetic parameters

a. Low frequency measurements

The low frequency measurements were performed according to the methods analysed in the works [15] and [16] using R.L.C. bridges and low frequency millivoltmeters (fig. 2). The initial permeability μ_i , the residual loss resistance R_{res} and the Rayleigh parameters R_t , R_{rev} , corresponding to the total permeability and to the reversible permeability respectively, are determined making use of the condition of „fitting” of the relations [17]:

$$I_m(I_0) = \frac{N^2 h}{2\pi} \mu_i \ln \frac{r_{ext}}{r_{int}} + \frac{\Delta L_m}{\Delta I_0} I_0, \quad (11)$$

$$\frac{\Delta L_m}{\Delta I_0} = \frac{\mu_0 R_t N^3 h}{2\pi^2} \left(\frac{1}{d_{int}} - \frac{1}{d_{ext}} \right), \quad (12)$$

$$R_m(I_0, f) = R_{res}(f) + \frac{4\mu_0 R_{res} N^3 h f}{3\pi^2} \left(\frac{1}{d_{int}} - \frac{1}{d_{ext}^*} \right) I_0 \quad (13)$$

Equations (11), (12) and (13) hold for the Rayleigh domain only.

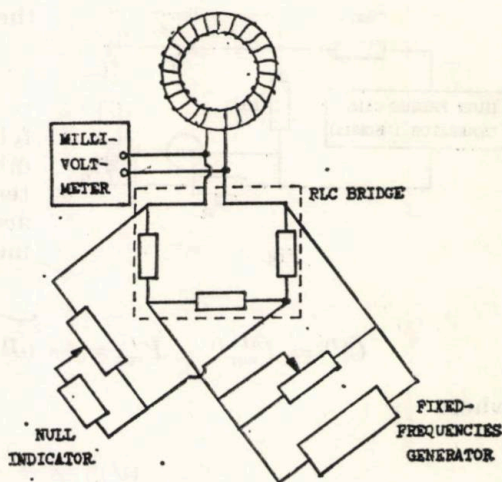


Fig. 2

b. Medium and high frequency measurements

Medium and high frequency measurements were made using a Q-meter according to the arrangement shown in fig. 3. The initial permeability and the loss angle tangent are calculated on the basis of eqs. (11 — 13). The inductance of the coiled torus and its magnetic losses are given by the following equations:

$$L_m = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{\underbrace{C_e + C_v}_{C_t}} - \frac{1}{C_c} \right) \quad (14)$$

$$\frac{R_m}{L_m} = \tan \delta_m = \frac{C_c Q_c - C_t Q_t [1 + R_{pd} C_{ad}(f) Q_c C_c]}{(C - C_t) \omega^2} \quad (15)$$

where C_c , Q_c and C_t , Q_t are the capacities and the quality factors at resonance corresponding to the empty frame and the frame holding the tours of the studied material, respectively.

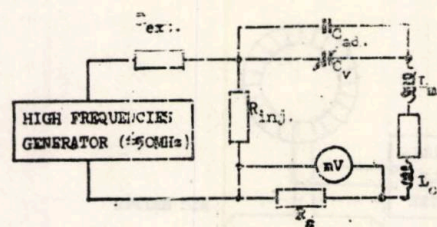


Fig. 3

2. Methods for the analysis of the experiments results

The analysis of the experimental results was made according to the following logical schema. The zero order approximation of the parameters χ_{i0} , f_0 and f_{rel} was corrected according to the iterative Jacobi method on the basis of the equations:

$$\bar{C}^{(I)} = \bar{P}_{cor}^{(I+1)} - \bar{P}_{cor}^{(I)} = - (\bar{J}^{(I)} \bar{W} \bar{J}^{(I)})^{-1} \bar{J}^{(I)} \bar{W} \bar{A}^{(I)} \quad (16)$$

where

$$(\bar{J})_{ij} = \frac{\partial P_{test,i}}{\partial P_{cor,j}} \quad (17)$$

$$(\bar{W})_{ij} = \frac{1}{D_{exp}(P_{t.st,i})} \delta_{ij}; \quad \bar{A}^{(I)} = \bar{P}_{test.exp}^{(I)} - \bar{P}_{test.calc}^{(I)} \quad (18)$$

$\bar{P}_{tes.}$ and $\bar{P}_{cor}$ are the column vectors of the tested parameters (initial permeabilities and loss angle tangents) and, respectively, correlation parameters (χ_{i0} , f_0 , f_{rel}) in the „I” iteration.

In the case of the polynomial correlations (of the type of : $P_{test,j} = \sum_{k=0}^s P_{cor.k} \cdot d_j^k$, where d_j is the value of the „determinative” parameter for the „j” studied state), the „exact” values of the unknown parameters (χ_{i0} , f_0 , f_{rel}) can be obtained by an unique iteration, the elements of the jacobian matrix :

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & \dots & d_1^s \\ 1 & d_2 & \dots & d_2^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & d_N & \dots & d_N^s \end{pmatrix} \quad (19)$$

being constant.

3. Obtained results

The results obtained after the analysis of the experimental data for 12 different types of soft ferrites are indicated in the following table 1.

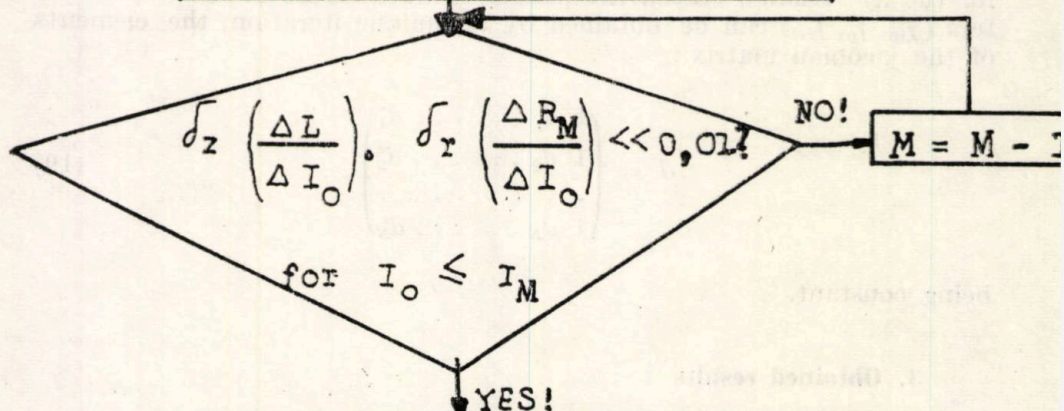
The values of some parameters of the magnetic permeability dispersion for several soft oxidic ferrimagnetic materials

Table 1

The type of the oxidic material	$\chi_{qua\ sst.}$	$\frac{\chi_{i0}}{\chi_{st}}$	$f_{max.}$ (MHz)	f_0 (MHz)	f_{rel} (MHz)	$\sqrt{\frac{s_{\mu}^2 + s_{lg\delta}^2}{2}}$
20 K Ferrite	$24 \pm 12 \%$	$1,00 \pm 5 \%$	40	100	200	0,2
„A”Mg-Zn Ferrite	$26 \pm 20 \%$	$1,05 \pm 10 \%$	22	104	200	0,3
„B”Mg-Zn Ferrite	$66 \pm 20 \%$	$0,90 \pm 20 \%$	16	80	180	0,6
80 K Ferrite	$80 \pm 20 \pm$	$1,00 \pm 5 \%$	12	73	180	0,3
„H”Mg-Zn Ferrite	$80 \pm 20 \%$	$1,20 \pm 20 \%$	16	25	60	0,3
Ni-Zn Ferrite	$90 \pm 30 \%$	$0,97 \pm 15 \%$	18	50	110	0,45
300 M Ferrite	$250 \pm 20 \%$	$1,00 \pm 10 \%$	2	8	18	0,5
„A”Mn-Zn Ferrite	$350 \pm 25 \%$	$1,05 \pm 16 \%$	6	10	20	0,6
Memory Ferrite	$450 \pm 20 \%$	$1,50 \pm 80 \%$	5	5	10	1,2
550 M Ferrite	$650 \pm 20 \%$	$0,90 \pm 15 \%$	1,6	3	9	0,75
„B”Mn-Zn Ferrite	$700 \pm 30 \%$	$1,10 \pm 15 \%$	0,2	0,2	0,5	0,7
1100 N Ferrite	$1300 \pm 20 \%$	$0,85 \pm 20 \%$	0,1	0,25	0,5	0,6

READ $C_c, Q_c, U_t, Q_t = f(U_{ef}), L, R_m = g(U_{ef})$
and the

CALCULATE $L, R_m, \tan \delta_m = f(L_0)$



CALCULATE $R_{res}, \tan \delta_{mi}, \mu_{ri}, R_t$
 $R_{rev} = h(f) + \text{errors (Jacobi method)}$

CALCULATE $\chi_{io}, f_{res} \equiv f_0, f_{rel} \equiv f_r$
+ errors (Jacobi method)

CALCULATE $\mu_{ri}^{calc}, \tan \delta_{mi}^{calc} = \varphi(I_0, f)$

$$S_\mu = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{(\mu_{rj} - \mu_{rj}^{calc})^2}{S^2(\mu_{rj})}}, \quad S_{\tan \delta}, \frac{\chi_{io}}{\chi_{st} - 1}$$

WRITE $\mu_{ri}^{calc}, \tan \delta_{mi}^{calc} = \varphi(I_0, f) +$
+ errors, $S_\mu, S_{\tan \delta}, \frac{\chi_{io}}{\mu_{st} - 1}$

4. Conclusions

The study of the results presented lead to the following conclusions :

(i) Since the frequency f_0 considerably depends on the specific surface of the powder used for the making of the studied samples (fig. 4), therefore f_0 depends also on the mass of the Bloch frontiers of the spontaneous magnetization domains, one results that the observed resonances (at frequencies between 0,2 and 100 MHz) correspond to the oscillation of the Bloch walls.

(ii) Because all the ratios $\frac{\chi_{i0}}{\chi_{quasist.}}$ are of the order of unity and $S_u, S_{\tan\delta}$ are smaller than unity, the observed correlations can be considered as significant. This fact demonstrates that :

a) the study of the main characteristics of the resonance oscillations of the Bloch walls at frequencies which differ from the resonance frequency with up to 70 percents is possible,

b) the envisaged procedure permits also useful evaluations of some parameters of physical interest (see equations (9)–(10)), as : average mass of the Bloch frontier of a certain material, saturation magnetization, anisotropy coefficient, coupling constant I_{jk} of the atomic spins, etc.

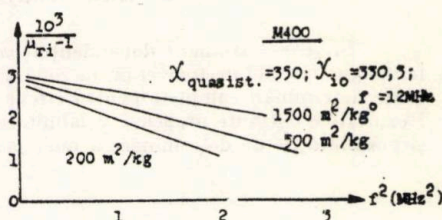


Fig. 4

Physics Department
Politechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej“
Bucharest

REFERENCES

1. a) P. Herrmann, Zs. f. Phys., 84, 565 (1933); b) R. Goldschmidt, Helv. Phys. Acta, 9, 40 (1935); c) E. Kreilscheimer, Ann. d. Phys., 17, 293 (1933); d) M. Strutt, K. Knoll, Physica, 7, 635 (1940).
2. J. L. Snoek, Physica, 8, 426 (1941).
3. G. T. Rado, R. W. Wright, W. H. Emerson, Phys. Rev., 80, 273 (1950).
4. A. J. E. Welch, P. F. Nicks, A. Fairweather, F. F. Roberts, Phys. Rev., 77, 403 (1950).
5. a) J. L. Snoek, Physica, 14, 207 (1948); b) J. L. Snoek, chap. 4 in New developments in Ferromagnetic Materials, New York, Elsevier Publ. Comp., 1947.
6. a) G. T. Eado, Phys. Rev., 89, 529 (1953); b) G. T. Rado, IRE Trans. Antennas Propagation, 4, 512 (1956).
7. D. Polder, J. Smith, Rev. Mod. Phys., 25, 89 (1953).
8. R. C. LeGraw, E. G. Spencer, IRE Conv. Record, 5, 66 (1956).
9. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Sow. Phys., 8, 153 (1935).
10. a) R. Becker, Phys. Zs., 39, 856 (1938); b) R. Becker, Ann. d. Phys., 36, 340 (1939).
11. W. Döring, Zs. f. Naturforsch., 3a, 373 (1948).
12. a) Ch. Kittel, Phys. Rev., 70, 281(1946); b) ibid., 71, 270(1947); c) ibid. 80, 918 (1950); d) Ch. Kittel, Journ. de phys. Rad., 12, 291 (1951).
13. a) J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 78, 266 (1960); b) J. M. Luttinger, Ch. Kittel, Helv. Phys. Acta, 21, 480 (1948); c) J. M. Richardson, Phys. Rev., 75, 1630 (1949). d) D. Polder, Phil. Mag., 40, 99 (1949).

14. E. Schlöman, J. Appl. Phys., 41, 204, 1350 (1970).
15. D. Iordache, Bul. Inst. Politehn. Buc., 29, 25 (1967).
16. D. Iordache, M. Stan, Bul. Inst. Politehn. Timișoara, 1976 (to be published).
17. a) L. Jánossy „Theory and Practice of the Evaluation of Measurements”, Oxford University Press, 1965; b) D. Iordache, Rev. Roum. Phys., 18, 1165 (1973).

**Asupra unor corelații logice ale dispersiei permeabilității magnetice, prezentat
de unele materiale ferimagnetice moi**

În scopul studierii dependenței parametrilor magnetici dinamici ai materialelor ferimagnetice moi de frecvență, în zona dispersiei permeabilității magnetice, au fost efectuate determinări complete pentru câteva tipuri de materiale ferimagnetice oxidice moi. Rezultatele obținute probează valabilitatea corelațiilor teoretice μ , $\tan \delta = f(\nu)$ existente, și posibilitățile de determinare a unor parametri structurali.

ELECTROTEHNICĂ

C.Z. : 621.313.8:621.313.392

CUPLUL ELECTROMAGNETIC LA MOTORUL CU HISTEREZIS*

NICOLAE GALAN

În lucrare se studiază cuplul electromagnetic la inducție magnetică în întrefier dată. Acest studiu se face atât pentru motorul cu cîmp radial cit și pentru motorul cu cîmp tangențial.

Se evidențiază influența caracteristicilor materialului utilizat asupra cuplului electromagnetic. Rezultatele obținute se pot aplica și motoarelor cu histerezis monofazate.

1. Introducere

Studiul cuplului electromagnetic prezintă interes atât în aprecierea performanțelor motorului cit și în analiza dependenței acestui cuplu de dimensiuni și caracteristicile materialului utilizat.

Pentru cuplul electromagnetic s-au stabilit relații în diferite ipoteze și funcții de diferite mărimi impuse, [1], [2], [4].

Este cunoscut faptul că una din mărimile impuse la proiectarea motorului este inducția magnetică în întrefier, din această cauză prezintă interes stabilirea expresiei cuplului electromagnetic la inducție magnetică în întrefier dată. De fapt în realitate motorul funcționează la o inducție magnetică impusă deoarece motorul funcționează la o tensiune nominală dată pentru care a fost proiectat.

În lucrările [2] și [3] s-a stabilit expresia potențialului magnetic vector la inducție în întrefier dată, această expresie va permite calculul cuplului electromagnetic.

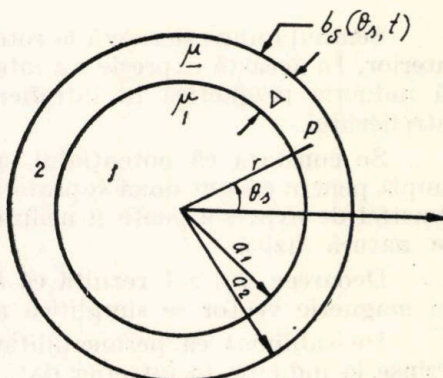
2. Potențialul magnetic vector la inducție dată

Pentru calculul potențialului magnetic vector s-a considerat modelul idealizat din figura 1 cu dimensiunile și caracteristicile materialului indicate pe figură.

Se presupune că inducția magnetică în întrefier este de forma :

$$b_s(\theta_s, t) = B_s e^{j(\omega t - p\theta_s)}$$

(1) Fig. 1. Modelul idealizat al motorului cu histerezis.



* Manuscris predat redacției la data de 26 ianuarie 1976

adică s-au neglijat armonicile de ordin superior. În cazul cîmpului magnetic plan-paralel potențialul magnetic vector are componentă nenulă numai după axa oz ($A_z \neq 0$); această componentă satisface ecuația diferențială de mai jos :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta_s^2} = 0 \quad (2)$$

ecuația diferențială (2) este scrisă în coordonate cilindrice.

Pentru fundamentală o soluție a ecuației (2) este de forma

$$A_z^{(i)} = [k_p^{(i)} r^p + I_p^{(i)} r^{-p}] e_{j(\omega t - p\theta_s)} \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

care poate fi particularizată pentru cele două zone; pentru zona 1 constanta $I_p = 0$. Se pun condițiile de trecere pe suprafețele de separație a zonelor :

$$A_z^{(1)} = A_z^{(2)}; \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial r} : er = a_1; \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial \theta_s} = b_s(\theta_s, t) : r = a_2 \quad (4)$$

și în urma efectuării calculelor rezultă expresia potențialului magnetic vector în zona 2, adică în zona activă a rotorului;

$$A_z^{(2)} = + jB_s a_2 \frac{(r/a_1)^p - h(a_1/r)^p}{p(\varepsilon_1' - h\varepsilon_1^{-p})} e^{j(\omega t - p\theta_s)} \quad (5)$$

unde :

$$h = (h_1 - 1)/(h_1 + 2); \varepsilon_1 = \frac{a_2}{a_1}; h_1 = \frac{\mu}{\mu_1}$$

Semnul minus se referă la rotorul exterior, iar semnul plus la rotorul interior. În această expresie nu intervine întrefierul deoarece se consideră că inducția magnetică în întrefier este impusă indiferent de valoarea întrefierului.

Se constată că potențialul magnetic vector are o expresie relativ simplă pentru că sînt două suprafețe pe care s-au pus condițiile de trecere. O astfel de expresie poate fi utilizată cu ușurință și permite și explicații de natură fizică.

Deoarece $|h_1| > 1$ rezultă că $h = 1$ în care caz expresia potențialului magnetic vector se simplifică mult.

De subliniat că permeabilitatea magnetică μ_m variază în limite restrinse la inducție în întrefier dată, mai ales că la grosimi mici ale zonei active variația inducției după rază este mică. Acest fapt permite să se poată considera cu o bună aproximație permeabilitatea magnetică constantă.

3. Cuplul electromagnetic

Fiind cunoscut potențialul magnetic vector se poate calcula cuplul electromagnetic [2].

Cuplul electromagnetic este dat de relația :

$$M = Re \frac{1}{2} \left\{ a_2^2 L \int_0^{2\pi} [H_\theta B_r]_{r=a_2} d\theta_s \right\} = - Re \frac{1}{2} \left\{ a_2 L \frac{1}{\mu} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial r} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial \theta_s} \right]_{r=a} d\theta_s \right. \\ \left. = \frac{\pi}{2\mu_0} B_8^2 a_2^2 L Re \left\{ j \frac{(h_1 + x)^*}{h_0^*(1 + h_1 x)^*} \right\} ; x = \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_1^{-p}}{\varepsilon_1^p + \varepsilon_1^{-p}} \right. \quad (6)$$

sau

$$m_s = \frac{M}{M_s} = Re \left[j \frac{(h_1 + x)^*}{h_0^*(1 + h_1 x)^*} \right] \quad (7)$$

În relația (7) s-a considerat drept cuplu de referință expresia $M_s = \frac{\pi}{\mu_0} B_8^2 a_2^2 L$, dacă se consideră fluxul pe pol și pe unitatea de lungime

a motorului $\Phi = \frac{2}{\pi} B_0 L \tau$ unde τ este pasul polar atunci cuplul de referință

$$\text{se poate pune sub forma } M_s = \frac{\pi}{4\mu_0 L} p^2 \Phi^2$$

Prin urmare la motorul cu histerezis cuplul este proporțional cu patratul inducției magnetice, respectiv cu patratul fluxului magnetic pe pol, adică cuplul se poate considera aproximativ proporțional cu patratul tensiunii aplicate la borne.

La variații mici ale tensiunii la borne cuplul acuză variații relativ mari. Menținerea tensiunii la valoarea nominală constituie un element necesar pentru obținerea unui cuplu util corespunzător.

Pe baza relației (7) se pot trasa familii de curbe care să evidențieze modul de variație al cuplului electromagnetic funcție de diferiți parametri.

În continuare se va studia variația cuplului electromagnetic funcție de grosimea relativă a zonei active $\frac{\Delta}{\tau}$ în corelație cu proprietățile materialului utilizat; de precizat că raportarea grosimii zonei active se face la pasul polar τ .

În cazul motorului cu cîmp radial $h_1 = 0$ și deci expresia cuplului electromagnetic devine :

$$m_s = Re \left\{ j \frac{x}{h_0^*} \right\} = \frac{\sin \gamma}{h_0} th \left(p \ln \frac{1}{1 - \frac{\pi}{p} \frac{\Delta}{\tau}} \right) \quad (8)$$

$$\text{unde } \tau = \pi a_2 / p, \text{ iar } x = th \left(p \ln \frac{1}{1 - \frac{\pi}{p} \frac{\Delta}{\tau}} \right), h_0 = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Expresia (8) permite trasarea curbelor de variație a cuplului electromagnetic funcție de $\frac{\Delta}{\tau}$. În figura 2 s-au trasat aceste curbe, de unde rezultă că valoarea cuplului electromagnetic la $\frac{\Delta}{\tau} \leq 0,1$ nu depinde de numărul perechilor de poli p , într-adevăr $m_s \cong \pi \frac{\Delta}{\tau} \frac{\sin \gamma}{h_0}$ pentru $\frac{\Delta}{\tau} \leq 0,1$. De asemeni nici valoarea maximă a cuplului, care se obține pentru $x = 1$, nu depinde de p , numai alura curbei depinde de p .

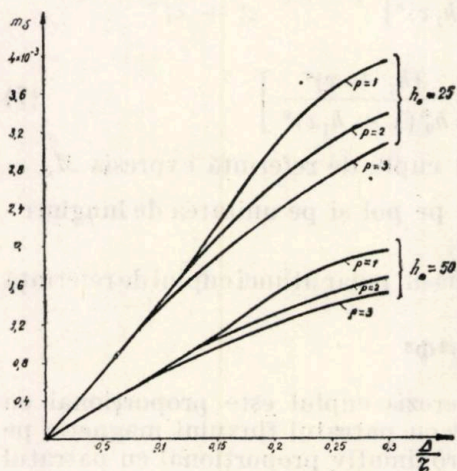


Fig. 2. Curbele $m_s = f\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)$ pentru $\sin \gamma = 0,8$ la motorul cu cimp radial.

Se constată că de la o anumită valoare a grosimii $\frac{\Delta}{\tau}$ creșterea cuplului (electromagnetic este nesemnificativă (de exemplu pentru $p = 1$ și pentru $\frac{\Delta}{\tau} > 0,2$ creșterea cuplului este neînsemnată).

Din relația (8) rezultă că cuplul electromagnetic este invers proporțional cu modulul permeabilității magnetice $|h_0|$ și proporțional cu $\sin \gamma$, acest fapt permite utilizarea curbelor din figura 2 și pentru calculul cuplului la alte permeabilități $|h_0|$ și alte unghiuri de histeresis γ .

Pentru obținerea unui cuplu electromagnetic mare ar fi indicat să se utilizeze materiale magnetice de permeabilitate scăzută, însă în acest caz curentul absorbit de motor are valori importante.

La alegerea materialului magnetic trebuie să se aibă în vedere atât valoarea cuplului electromagnetic cât și valoarea curentului absorbit. Un curent absorbit de valoare mare conduce la creșterea dimensiunilor înfășurării statorice și implicit a dimensiunilor jugului statoric.

În cazul motorului cu cimp tangențial $h_1 = h_0$ și relația (7) devine :

$$m_s = Re \left\{ j \frac{(h_0 + x)}{h_0(1 + h_0 x)} \right\} \quad (9)$$

Relația (9) se poate scrie sub o altă formă dacă se are în vedere faptul că $|h_0| > x$; în acest caz se obține;

$$m_s = Re \left\{ j \frac{1}{1 + h_0 x_2} \right\} = \frac{x h_0 \sin \gamma}{1 + 2x h_0 \cos \gamma + (x h_0)^2} \quad (10)$$

Valoarea maximă a cuplului se obține pentru $x = x_M = 1/h_0$, deoarece cuplul maxim se obține la valori mici ale parametrului x se poate scrie relația aproximativă, $x \cong \pi \frac{\Delta}{\tau}$, sau $\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)_M = 1/\pi h_0$, unde $\left(\frac{\tau}{\Delta}\right)_M$ corespunde lui x_M . Cu cât valoarea permeabilității magnetice relative h_0 este mai mare cu atât valoarea $\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)_M$ pentru care cuplul este maxim se deplasează spre valori mici.

Valoarea maximă a cuplului va fi:

$$m_{\delta M} = \sin \gamma / (2 + 2 \cos \gamma) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \quad (11)$$

se constată că valoarea maximă a cuplului depinde numai de unghiul de histerezis γ . Pe baza relațiilor de mai sus s-au trasat curbele din figura 3.

Se constată că valoarea cuplului este ridicată pe un interval mic al variabilei $\frac{\Delta}{\tau}$.

La valori mari ale lui x h_0 acest interval este dificil de atins, datorită faptului că aceste grosimi sînt mici și prin urmare inducția în întrefier trebuie să aibă valori mici, adică trebuie supradiimensionat statorul, însă pentru $h_0 < 20$ acest interval poate fi atins dacă se admit valori relativ mari pentru curentul absorbit care crește odată cu scăderea parametri-

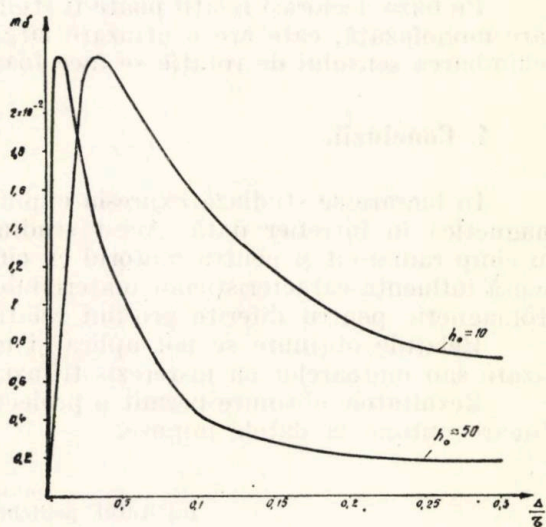


Fig. 3. Curbele $m = f\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)$ pentru $\sin \gamma = 0,8$ și $p = 1$ la motorul cu cimp tangențial.

lor h_0 și $\frac{\Delta}{\tau}$. Aceste precizări sînt utile la alegerea materialului.

Relațiile și concluziile stabilite se pot aplica și la motoarele monofazate dacă inducția magnetică în întrefier se poate considera că variază sinusoidal la periferia rotorului. De obicei această ipoteză este apropiată de realitate la majoritatea motoarelor monofazate. Aceste motoare fiind alimentate la o tensiune dată conduc la o inducție magnetică în întrefier, de variație sinusoidală.

Problema mai dificilă care se pune la motoarele monofazate constă în găsirea unei relații între curentul din înfășurarea statorică și inducția magnetică din întrefier. Această dificultate apare ca urmare a puternicii nealinearități a materialelor feromagnetice din componența motorului cu histerezis.

Datorită acestei nelinearități este dificil de a stabili o schemă echivalentă; parametrii schemei echivalente nu pot fi calculați suficient de precis. Reactanța de magnetizare, de exemplu, trebuie să fie calculată cu energia magnetică corespunzătoare întrefierului la care se adaugă energia magnetică a zonei active, energie magnetică ce nu poate fi neglijată în comparație cu cea a întrefierului așa cum se întâmplă la mașinile clasice.

Parametrii rotorici pot fi definiți la o inducție dată cu ajutorul relației (6) sau (7), considerind că puterea electromagnetică $P = M$, este egală cu puterea consumată într-o rezistență echivalentă. Partea imaginară a relației (6) înmulțită cu viteza unghiulară Ω reprezintă o putere reactivă care permite definirea reactanței rotorice. Acești parametri se pot defini la inducție magnetică unitate ($B = 1T$) și se pot calcula ușor și pentru alte inducții așa cum rezultă din relația (6).

Pe baza acelorasi relații poate fi studiat motorul trifazat cu alimentare monofazată, care are o utilizare largă avind în vedere și faptul că schimbarea sensului de rotație se face foarte comod.

4. Concluzii.

În lucrare se studiază expresia cuplului electromagnetic la inducție magnetică în întrefier dată. Acest studiu se face atât pentru motorul cu cimp radial cât și pentru motorul cu cimp tangențial. Se scoate în evidență influența caracteristicilor materialului utilizat asupra cuplului electromagnetic pentru diferite grosimi relative ale zonei active.

Relațiile obținute se pot aplica și motoarelor cu histerezis monofazate sau motoarelor cu histerezis trifaziate cu alimentare monofazată.

Rezultatele obținute permit o proiectare a rotorului pentru o funcționare optimă la datele impuse.

Catedra de mașini electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. Denis O'Kella, Eddy-current and Histeresis Effects in Retating Machines, Proc. IEE, nr. 3, 1969, vol. 116, p. 391—395.
2. Galan N., Determinarea caracteristicilor de funcționare la motoarele electrice cu histerezis pe baza modelului idealizat, St. cerc. energ. electr., tom 24, nr. 1, 1974, p. 155—177.
3. Galan N., Motorul electric cu histerezis, Ed. Tehnică, București, 1974.
4. P. H. Trickey, Test Analysis and Calculations of Polyphase Hystersis Motors, IEEE Trans., nr. 5, 1972, vol. PAS — 91 p. 1855—1862.
5. N. Z. Mastiaev, I. I. Orlov, Ghisterezisnie electrodvigateli, Moskva 1963.

Le couple electromagnetique au moteur a hysteresis

Dans l'ouvrage on étudie le couple électromagnétique à induction magnétique dans entrefer donnée. Cette étude est faite tant pour le moteur à champ radial que le moteur à champ tangeniel.

On met en évidence l'influence des caractéristiques du matériau employé sur le champ électromagnétique. Les résultats obtenus peuvent être appliqués aussi aux moteurs à hystérésis monophasés.

C.Z.: 621.314.263

METODICA DE PROIECTARE A DUBLOARELOR FEROMAGNETICE TRIFAZATE DE FRECVENȚĂ*

CONSTANTIN GHITĂ

În lucrare se prezintă o metodică de proiectare optimă a dubloarelor feromagnetice trifazate de frecvență. Pentru determinarea dimensiunilor principale și a numerelor de spire ale înfășurărilor dublorului se folosesc valorile experimentale ale principalelor criterii de similitudine ale acestuia. Aceste criterii sînt determinate cu ajutorul analizei dimensionale și a teoriei similitudinii. Pentru ilustrarea metodicii de proiectare se prezintă un exemplu de calcul al unui dublor feromagnetic trifazat de frecvență.

1. Introducere

Multiplicatoarele feromagnetice de frecvență reprezintă un mijloc important de obținere a unor surse de alimentare cu energie electrică de frecvență superioară celei de 50 Hz. Printre aceste multiplicatoare un loc deosebit îl ocupă dublorul feromagnetic de frecvență,

Dublorul feromagnetic trifazat este mai ieftin și are o greutate mai mică decît dublorul monofazat, deoarece în circuitul său de permagnetizare nu se mai pune filtru-dop pentru suprimarea armonicelor superioare ale curentului, întrucît acestea se anulează din însuși modul de realizare a conexiunilor.

În prezentul articol, pe baza rezultatelor obținute în lucrările [1] — [3], luînd în seamă și metoda de proiectare a transformatoarelor electrice [4] — [6], se abordează problema proiectării optime a dubloarelor feromagnetice trifazate de frecvență de medie și mică putere, cu răcire naturală în aer, de joasă tensiune.

2. Calculul dimensiunilor principale

Dublorul feromagnetic trifazat de frecvență a cărui schemă de principiu este prezentată în figura 1, este format din două miezuri feromagnetice trifazate identice M și N , trei circuite electrice; de alimentare, de permagnetizare, de sarcină și 6 șunturi magnetice transversale, necesare închiderii fluxului magnetic constant din coloane [7].

Prin tema de proiectare se impun de obicei următoarele mărimi nominale: S_n , f_1 , U_1 , I_0 , U_2 , $\cos \varphi_2$, B_s , $\operatorname{tg} \alpha$, indicîndu-se și grupa de

* Manuscris predat redacției la data de 25 septembrie 1974.

conexiuni și durata de funcționare. Cu ajutorul acestor mărimi se determină dimensiunile principale ale dublorului : D , L , F (Fig. 2).

Calcululele care urmează se referă la o coloană a dublorului trifazat. În tabelă se indică valorile uzuale ale principalilor coeficienți care se folosesc în continuare, arătându-se și relațiile lor de definiție.

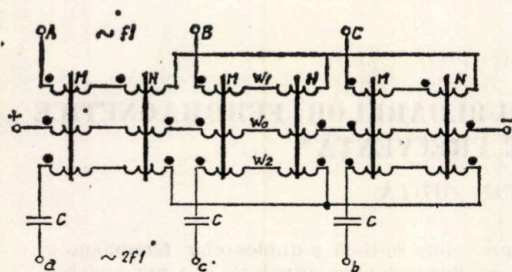


Fig. 1. Schema de principiu a dublorului fero-magnetic trifazat de frecvență.

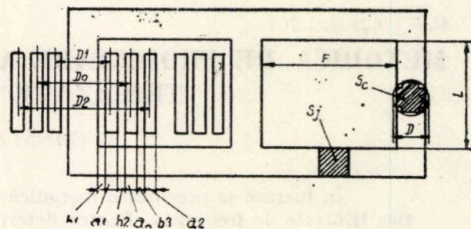


Fig. 2. Referitoare la dimensiunile geometrice ale dublorului.

Ținând seama de expresia criteriului saturației K_{Bs} prezentată în lucrarea [3]

$$K_{Bs} = \frac{U_1}{2\pi\sqrt{6} f_1 w_1 B_s S_c} \quad (1)$$

se poate afla expresia puterii aparente primare corespunzătoare unei coloane cu ajutorul relației

$$P_{col} = \frac{U_1 I_1}{2\sqrt{3}} = \pi\sqrt{2} K_{Bs} B_s S_c f_1 j_1 h_1 a_1 k_1. \quad (2)$$

Tabelă

Nr.	Definiția coeficientului	Valori uzuale [4], [6]
1	$k_i = w_i s_i / h_i a_i, \quad i = 0; 1; 2$	0,6–0,7
2	$k_{wi} = w_i I_i / w_1 I_1, \quad i = 0; 2$	figurile 3 și 4
3	$k_m = 4S_c / \pi D^2$	0,75–0,83
4	$k_f \cong 6 w_1 s_1 / LF$	0,2–0,35
5	$\lambda_i = j_i / j_1, \quad i = 0; 2$	1–1,4
6	$v_i = h_i / h_1, \quad i = 0; 2$	0,95–1
7	$\beta = \pi D / h_1$	1,2–1,8
8	$\xi_i = (A_i - A'_i) / A_i, \quad i = 0,1; 2$	0,7–0,9
9	$\psi = S_j / S_c$	1,1–1,2

Pierderile care se produc la funcționarea nominală în cele trei înfășurări ale dublorului dispuse pe o coloană se pot deduce după câteva calcule simple, folosind relația :

$$P_b = \sum_{i=0}^2 R_i I_i^2 = \pi \rho j_1^2 k_1 a_1 h_1 (k_D D + k_{a_1} a_1 + \varepsilon), \quad (3)$$

în care s-au făcut notațiile :

$$\begin{cases} k_D = 1 + \lambda_0 k_{w_0} + \lambda_2 k_{w_2} \\ k_{a_1} = 1 + 2 \left(\lambda_0 k_{w_0} + \lambda_2 k_{w_2} + \frac{k_1 k_{w_0} k_{w_2} \lambda_2}{k_0 v_0 \lambda_1} \right) + \frac{k_1 k_{w_0}^2}{k_0 v_0} + \frac{k_1 k_{w_2}^2}{k_2 v_2} \\ \varepsilon = 2 [b_1 + \lambda_0 k_{w_0} (b_1 + b_2) + \lambda_2 k_{w_2} (b_1 + b_2 + b_3)] \end{cases} \quad (4)$$

Între relațiile (2) și (3) se elimină dimensiunea radială a înfășurării primare a_1 și rezultă o ecuație de gradul 5 care are următoarea formă :

$$D^5 - \sigma k_D D^4 - \sigma \varepsilon D^3 - \sigma^2 \frac{P_b \beta k_{a_1}}{\pi^2 \rho k_1 j_1^2} = 0, \quad (5)$$

unde s-a notat :

$$\sigma = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{P_{col} \rho j_1}{P_b K_{B_s} B_s f_1 k_m}. \quad (6)$$

Diametrul coloanei se află rezolvînd prin încercări ecuația (5). Pentru aceasta trebuie cunoscute 21 de mărimi : P_{col} , P_b , ρ , j_1 , K_{B_s} , B_s , f_1 , k_m , λ_0 , λ_2 , k_{w_0} , k_{w_2} , k_1 , k_2 , k_0 , v_0 , v_2 , b_1 , b_2 , b_3 , β . Dintre acestea ρ , B_s , f_1 se dau prin tema de proiectare, k_1 , k_2 , k_0 , v_0 , v_2 , β , k_m , λ_0 , λ_2 , se aleg din tabelă, b_1 , b_2 , b_3 , j_1 se aleg conform cu lucrarea [4], iar K_{B_s} , k_{w_0} , k_{w_2} , P_b , P_{col} se calculează după cum urmează :

— Criteriul saturației K_{B_s} , ținînd cont de lucrarea [3], are valori optime în intervalul (0,8—0,9).

— Valorile optime ale coeficienților k_{w_0} și k_{w_2} se află din curbele prezentate în figurile 3 și 4, curbe determinate experimental cu ajutorul teoriei similitudinii [3], astfel încît randamentul dublorului să fie maxim.

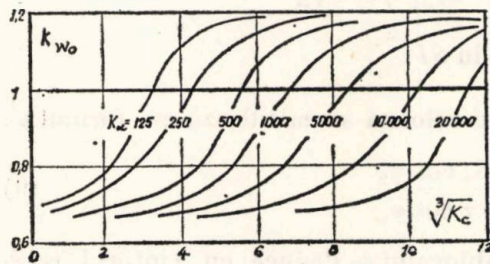


Fig. 3. Valori optime ale coeficientului k_{w_0} .

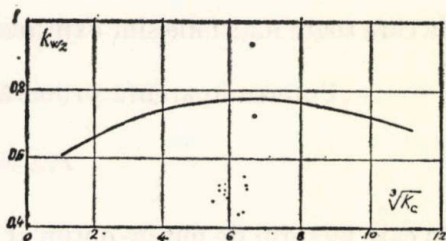


Fig. 4. Valori optime ale coeficientului k_{w_2} .

Criteriul constructiv K_α se află cu ajutorul diagramei din figura 5, ridicată pentru transformatoarele care se construiesc în prezent în țara noastră. Valorile optime ale criteriului capacității K_C pentru care randamentul dublorului este maxim, se deduc folosind curbele din figura 6, determinate

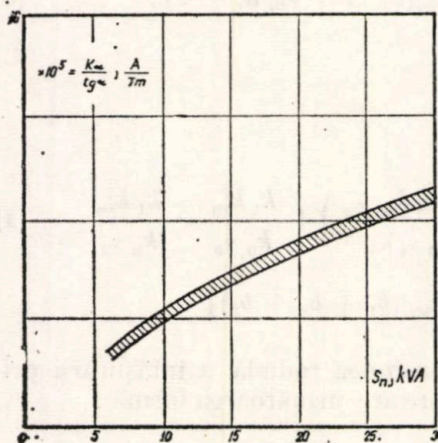


Fig. 5. Domeniul de valori al raportului $K_\alpha / \text{tg} \alpha$ pentru transformatoarele construite în R. S. R.

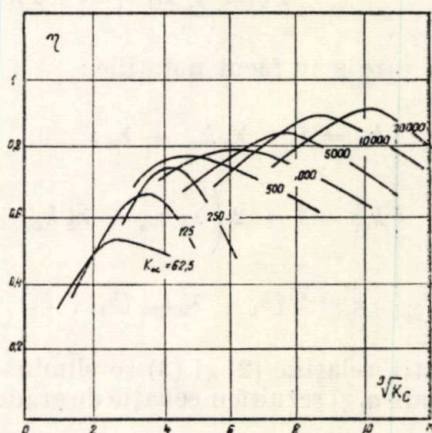


Fig. 6. Dependințele criteriile ale randamentului dublorului.

experimental pe baza teoriei similitudinii [3], pentru un dublor al cărui miez feromagnetic este confecționat din tablă laminată la rece.

— Pierderile în înfășurări P_b se calculează astfel :

$$P_b = \frac{1}{6} \left[\frac{S_n \cos \varphi_2 (1 - \eta)}{\eta} - P_{Fe} \right], \quad (7)$$

în care pierderile în fier se calculează cu ajutorul metodei prezentate în lucrarea [4], după ce se determină aproximativ diametrul coloanei cu formula lui Kehlslé [6] și după ce se determină cu aproximație lățimea ferestrei F cu ajutorul relației :

$$F \simeq \frac{4320 \sqrt{S_n} \cos \varphi_2}{L k_f k_m f_1 K_{Bs} B_s j_1 \eta \cos \varphi_{1e}} \quad (8)$$

în care toate mărimile sînt exprimate în SI.

— Puterea aparentă primară pe coloană se calculează cu formula :

$$P_{col} = \frac{S_n \cos \varphi_2}{6 \eta \cos \varphi_{1e}} \quad (9)$$

în care factorul de putere optim al dublorului se deduce cu ajutorul relației $\cos \varphi_{1e} = (0,54 - 0,58) \cos \varphi_2$; [1], [3].

3. Calculul numerelor de spire ale înfășurărilor

Numărul de spire al înfășurării de alimentare w_1 se determină cu ajutorul relației (1) iar numerele de spire w_0 și w_2 ale celorlalte înfășurări se determină folosind formulele :

$$w_0 = w_1 \frac{k_{w0} S_n \cos \varphi_2}{\sqrt{3} I_0 U_1 \eta \cos \varphi_{1e}}, \quad w_2 = w_1 \frac{k_{w2} U_2 \cos \varphi_2}{U_1 \eta \cos \varphi_{1e}} \quad (10)$$

Datorită valorilor ridicate ale inducției magnetice la care funcționează dublorul, circuitul magnetic al acestuia este nesimetric și de aceea mărimile corespunzătoare circuitului de ieșire sînt nesimetrice. Acest neajuns se elimină mărind cu w_s numerele de spire ale înfășurărilor primare de pe coloanele extreme.

Impunînd condiția ca la funcționarea nominală a dublorului fluxurile magnetice rezultante din coloana extremă și din cea din mijloc să fie egale și exprimînd reluctanțele jugurilor și coloanelor funcție de dimensiunile lor geometrice, se găsește după cîteva calcule simple, expresia numărului suplimentar de spire

$$w_s = w_1 \frac{2\mu_c S_c (F + D)}{L \mu_j S_j} \quad (11)$$

care pentru regimul optim de funcționare trebuie să ia valori în intervalul $(0,04 - 0,08)w_1$. Valoarea exactă a numărului de spire w_s se deduce după ce se calculează permeabilitățile magnetice relative μ_c și μ_i . Acest fapt este posibil folosind metoda descrisă în lucrarea [2].

Odată determinate dimensiunile principale și numerele de spire ale înfășurărilor, celelalte mărimi precum și caracteristicile funcționale ale dublorului se află asemănător transformatoarelor electrice. Capacitatea condensatorului de compensare longitudinală se deduce ușor, după ce se calculează rezistența înfășurării primare, folosind relația :

$$C = \frac{1}{2\pi f_1 K_c R_1} \quad (12)$$

4. Exemplu de calcul

Se cere să se determine parametrii constructivi optimi ai unui dublor feromagnetic trifazat de frecvență cunoscînd următoarele date nominale : $S_n = 10 \text{ kVA}$; $U_1 = 380 \text{ V}$; $f_1 = 50 \text{ Hz}$; $I_0 = 8,9 \text{ A}$; $U_2 = 380 \text{ V}$; $\cos \varphi_2 = 1$; $B_s = 2 \text{ T}$; $\text{tg } \alpha = 0,05 \text{ Tm/A}$; tolă laminată la rece, grupa de conexiuni Yy , regimul de funcționare de durată.

Cu ajutorul Graficului din figura 5 se aproximează valoarea criteriului constructiv $K_\alpha = 20\,000$. Corespunzător acestei valori, din figura 6 se deduce randamentul optim al dublorului $\eta = 0,92$ și valoarea optimă a criteriului capacității $\sqrt[3]{K_c} = 10,2$. Rezultă acum, folosind dependențele

criteriale din figurile 3 și 4, valorile coeficienților $k_{w0} = 0,75$ și $k_{w2} = 0,73$. Din tabelă se aleg, pentru coeficienții de mai jos, următoarele valori: $k_1 = k_2 = k_0 = 0,63$; $\lambda_0 = \lambda_2 = 1$; $\nu_0 = \nu_2 = 0,985$; $\beta = 1,37$; $k_m = 0,81$; $\psi = 1,2$; $k_f = 0,3$. Densitatea de curent primară se consideră egală cu $1,55 \text{ A/mm}^2$. Cu ajutorul formulei lui Kehlse se deduce valoarea aproxi-

mativă a diametrului coloanei $D = 0,0046 \sqrt[4]{10S_n} = 0,082 \text{ m}$. Înălțimea bobinajului primar este $h_1 = 0,188 \text{ m}$ și se alege înălțimea coloanei $L = 0,228 \text{ m}$. Folosind relația (8) se găsește valoarea aproximativă a înălțimii ferestrei $F = 0,11 \text{ m}$. Greutatea aproximativă a fierului dublorului rezultă $G_{Fe} = 117 \text{ kg}$. Alegînd valoarea pierderilor specifice în fier, corespunzătoare regimului optim de funcționare [1], $p_{Fe} = 3,5 \text{ W/kg}$, se găsește $P_{Fe} = 410 \text{ W}$ și cu ajutorul relației (7) rezultă $P_b = 76,5 \text{ W}$. Factorul de putere se alege $\cos \varphi_{1e} = 0,57$ și utilizînd relația (9) se calculează puterea aparentă primară pe coloană $P_{col} = 3180 \text{ VA}$.

Folosind ecuația (5), în care se alege $K_{Bs} = 0,89$, se găsește valoarea exactă a diametrului coloanei $D = 0,077 \text{ m}$. În continuare se calculează $S_c = 37,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; $w_1 = 73$ spire, $I_1 = 29,1 \text{ A}$; $w_0 = 180$ spire; $I_2 = 15,2 \text{ A}$; $w_2 = 101$ spire. Cu ajutorul relației (11) se găsește $w_s = 4$ spire. Se aleg $b_1 = 6 \text{ mm}$; $b_2 = b_3 = 10 \text{ mm}$ și rezultă $R_1 = 0,0296 \Omega$. Valoarea criteriului constructiv realizat este 19200 destul de apropiată de valoarea determinată inițial din figura 5. Capacitatea de compensare longitudinală se află cu ajutorul relației (12) și este $C = 101 \mu\text{F}$. Dublorul calculat mai sus s-a realizat practic și s-au măsurat pentru regimul nominal valorile $\eta = 0,904$ și $\cos \varphi_{1e} = 0,563$.

5. Concluzii

Metoda prezentată în lucrare permite proiectarea optimă a dubloanelor feromagnetice trifazate de frecvență.

Relațiile folosite s-au dedus cu ajutorul metodei modelizării fizice [3] și sînt obținute cu condiția ca dublorul să aibă randamentul maxim.

Catedra de mașini electrice

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București.

Notății folosite

indicile 0 — pentru mărimi ale circuitului de premagnetizare în c.c.

indicile 1 — pentru mărimi ale circuitului primar

indicile 2 — pentru mărimi ale circuitului secundar

indicile c — pentru mărimi corespunzătoare coloanei

indicile j — pentru mărimi corespunzătoare jugului

A_x — aria laterală a înfășurării „x” pe ambele fețe

A'_x — idem pentru aria penelor de consolidare

B_s — inducția magnetică de saturație a miezului

C — capacitatea de compensare longitudinală

D — diametrul coloanei

D_x — diametrul mediu al înfășurării „x”

h — înălțimea înfășurărilor

- I — valoarea efectivă a curentului de linie
- j — densitatea curentului electric de conducție
- K_x — criteriul de similitudine reprezentativ al mărimii „ x ”
- l_x — lungimea porțiunii „ x ” a circuitului magnetic
- P_{col} — puterea aparentă primară pe coloană
- P_b — pierderile în înfășurările dispuse pe o coloană
- P_{Fe} — pierderile în fier
- R — rezistența înfășurării de pe o coloană
- S_n — puterea aparentă nominală secundară.
- S_x — aria transversală a circuitului magnetic pe porțiunea „ x ”
- s — secțiunea conductorului înfășurării
- $tg\alpha$ — panta primei porțiuni liniare a caracteristicii magnetice a miezului [3]
- $\cos\varphi_{1e}$ — factorul de putere al dublorului feromagnetic
- $\cos\varphi_2$ — factorul de putere al sarcinii
- U — valoarea efectivă a tensiunii de linie
- m — numărul de spire al înfășurării de pe o coloană
- f_1 — frecvența tensiunii de alimentare.
- η — randamentul
- ρ — rezistivitatea conductorului înfășurării la 75°C
- μ_x — permeabilitatea relativă a porțiunii „ x ” din miez.

BIBLIOGRAFIE

1. A. M. Bamdas, I. V. Blinov, N. V. Zaharov, S. V. Sapiro, Feromagnitnie umnojiteli ciastotf, Moskva, Energhia, 198, 176 p.
2. C. Ghiță, Asupra calculului analitic al dublorului feromagnetic de frecvență, Electrotehnica, 1973, Nr. 2, p. 56—62.
3. A. Crăciuneascu, C. Ghiță, Criteriile de similitudine și calculul dublorului feromagnetic de frecvență, Electrotehnica, 1971, Nr. 7, p. 247—255.
4. C. Bălă, Proiectarea mașinilor electrice, București, Edit. did. și pedag., 1967, 246 p.
5. D. Dumitrache, C. Ghiță, Transformatorul, Indrumar de proiectare, Institutul politehnic din București, 1970, 170 p.
6. E. Jezterski, Z. Gogolevski, Z. Kopczynski, J. szmit, Transformatoare electrice, Ed. tehnică, București, 1966, 740 p.
7. I. S. Ghiorghiu, Al. Fransua, Tratat de mașini electrice, vol. 2, București, Ed. did. și pedag., 1970, 464 p.

Méthode de calcul des doubleurs ferromagnétiques triphasés de fréquence

On présente une méthode de calcul des doubleurs ferromagnétiques triphasés de fréquence. Pour la détermination des dimension principales et du nombre de tours du bobinages du doubleur on utilise les valeurs experimentales des principales critères de similitude du doubleur, ces critères sont déterminés a l'aide de la théorie de la similitude. La méthode de calcul que l'on propose est illustrée par un exemple numérique.

C.Z.: 621.313.2:621.65

METODICĂ DE PROIECTARE A POMPELOR ELECTROMAGNETICE DE CURENT CONTINUU *

DUMITRU STANCIU

În lucrare este prezentată o metodică pentru dimensionarea canalului și pentru calculul caracteristicilor unei pompe electromagnetice de conducție, de curent continuu, bazată pe soluționarea ecuațiilor satisfăcute de mărimile câmpului electromagnetic din masa de fluid aflată în mișcare.

Calculul caracteristicilor electromagnetice ale pompei s-a făcut pentru un model în care se cunoaște legea de variație spațială a inducției magnetice din întregul, atât în zona activă a pompei cât și în afara acesteia.

Este de asemenea prezentată o comparație între caracteristicile electromagnetice ale unei pompe reale și cele ale unei pompe ideale.

Tehnologia nucleară, metalurgia, industria chimică sînt ramurile economiei care pot beneficia de metodele de pompare electromagnetică a metalelor lichide, a topiturilor sau a soluțiilor de electroliți.

Siguranța mare în funcționare, uzura redusă și întreținerea ușoară (ca urmare a absenței pieselor în mișcare) sînt cîteva din dezideratele care reclamă utilizarea pompelor electromagnetice.

În literatura de specialitate o atenție deosebită se acordă pompelor electromagnetice de curent continuu. Principala problemă pe care o pune utilizarea unei astfel de pompe este cea a surselor de alimentare cu energie. Sînt necesare surse de curenți foarte intensi și tensiuni joase. Însă, față de celelalte tipuri, pompele electromagnetice de curent continuu au avantajul funcționării cu un randament ridicat. Dacă problema surselor de alimentare cu energie este rezolvată eficiența folosirii unei pompe electromagnetice de curent continuu este incontestabilă [4].

Sînt justificate așadar preocupările privind proiectarea acestor tipuri de pompe.

În lucrare este prezentată o metodică de dimensionare a canalului și de calcul a caracteristicilor unei pompe electromagnetice de curent continuu pornind de la rezolvarea ecuațiilor satisfăcute de mărimile câmpului electromagnetic din masa de fluid aflată în mișcare.

Model teoretic și ipoteze de calcul

Modelul teoretic pentru problema studiată este cel prezentat în figura 1.

* Manuscris predat redacției la data de 10 decembrie 1976.

S-au făcut următoarele ipoteze de calcul:

— s-a considerat cazul unei pompe plane având canalul cu pereți electroizolanți;

— au fost avute în vedere numai soluțiile constructive care elimină fenomenul de reacție a indusului. În acest fel, din punct de vedere al repartiției densității de curent în masa de fluid și a cîmpului magnetic în întrefier, problema prezintă simetrie față de axa Oy și în consecință poate fi studiată numai pe semiplanuri $x \geq 0$;

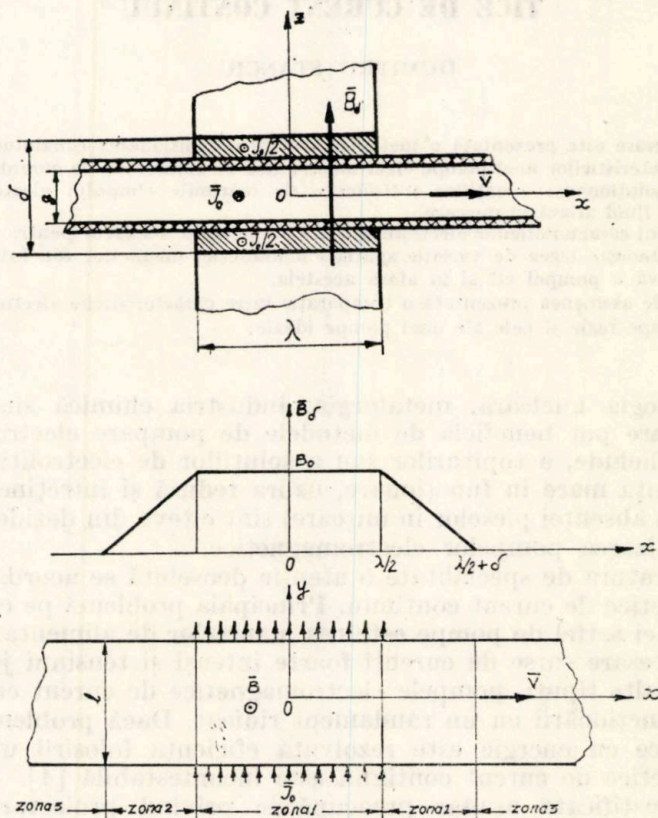


Fig. 1

— date fiind valorile mari ale inducției în întrefier și ale conductivității metalului fluid se poate considera mișcarea laminară cu viteză constantă pe întreaga secțiune a canalului (cazul numerelor Hartmann mari);

— s-a considerat fluidul ca fiind un mediu omogen și izotrop cu permeabilitatea magnetică μ_0 și conductibilitatea σ , ($\rho = 1/\sigma$);

— electrozii pompei au fost considerați echipotențiali deoarece conductivitatea lor este mult mai mare decât cea a mediului fluid;

— în studiul efectuat s-a presupus că între electrozi și metalul fluid există un contact perfect;

— dată fiind lungimea activă mică a canalului, în calcule au fost neglijate pierderile hidraulice din pompă ele fiind foarte mici în comparație cu puterea absorbită de aceasta (1 %);

— inducția magnetică din intrefier are numai componentă după axa Oz și este funcție numai de variabila x . Legea de variație a inducției B_δ cu această variabilă este următoarea;

$$B_\delta = B_0 \text{ cînd } 0 \leq x \leq \lambda/2;$$

$$B_\delta = B_0 \frac{\lambda + 2\delta}{2\delta} - B_0 \frac{x}{\delta} \text{ cînd } \lambda/2 < x \leq \lambda/2 + \delta; \quad (1)$$

$$B_\delta = 0 \text{ cînd } x > \lambda/2 + \delta$$

Calculul caracteristicilor pompei

Pornind de la sistemul ecuațiilor satisfăcute de mărimile cîmpului electromagnetic, din masa de fluid aflată în mișcare cu viteza v , scrise într-un sistem de referință antrenat;

$$\text{rot } \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \bar{J} = 0 \quad (2)$$

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$$

se poate arăta că pentru fiecare din cele trei zone densitatea de curent $\bar{J}$ satisface o ecuație de forma;

$$\Delta \bar{J} = 0 \quad (3)$$

Problema admite condițiile de regularitate:

$$J_{xi}(x, y) = -J_{xi}(x, -y);$$

$$J_{yi}(x, y) = J_{yi}(x, -y) \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

și următoarele condiții la limită;

$$J_{x1}(0, y) = 0;$$

$$J_{y1}(x, \pm l/2) = J_0;$$

$$J_{y2}(x, \pm l/2) = 0; \quad (5)$$

$$J_{y3}(x, \pm l/2) = 0;$$

$$J_{x3}(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0;$$

$$J_{y3}(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Condițiile de trecere la granița dintre două zone vecine au forma;

$$J_{xi}(x', y) = J_{xi+1}(x', y);$$

$$J_{yi}(x', y) = J_{yi+1}(x', y); \quad (6)$$

$$i = 1, 2.$$

Rezolvind ecuația (3) prin metoda separării variabilelor și impunând condițiile (4, 5, 6) se obține pentru componentele densității de curent din cele trei zone următorul sistem de soluții:

$$\begin{aligned} J_{x1}(x, y) &= \sum_{s=0}^{\infty} A_{1s} \operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi}{l} x \sin \frac{(2s+1)\pi}{l} y; \\ J_{y1}(x, y) &= \sum_{s=0}^{\infty} A_{1s} \operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi}{l} x \cos \frac{(2s+1)\pi}{l} y + J_0; \\ J_{x2}(x, y) &= \sum_{s=0}^{\infty} \left[A_{2s} e^{\frac{(2s+1)\pi}{l} x} + B_{2s} e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} x} \right] \sin \frac{(2s+1)\pi}{l} y - \frac{V}{\rho} \frac{B_0}{\delta} y; \\ J_{y2}(x, y) &= \sum_{s=0}^{\infty} \left[A_{2s} e^{\frac{(2s+1)\pi}{l} x} - B_{2s} e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} x} \right] \cos \frac{(2s+1)\pi}{l} y; \\ J_{x3}(x, y) &= \sum_{s=0}^{\infty} B_{3s} e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} x} \sin \frac{(2s+1)\pi}{l} y; \\ J_{y3}(x, y) &= - \sum_{s=0}^{\infty} B_{3s} e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} x} \cos \frac{(2s+1)\pi}{l} y. \end{aligned} \quad (7)$$

În aceste soluții constantele de integrare au următoarele semnificații:

$$\begin{aligned} A_{1s} &= 2A \left[e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + \delta\right)} - e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \frac{\lambda}{2}} \right] - M_0 e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \frac{\lambda}{2}}; \\ A_{2s} &= A e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + \delta\right)}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$B_{2s} = A \left[2 \operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2} - e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + \delta\right)} \right] - M_0 \operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \frac{\lambda}{2};$$

$$B_{2s} = 2A \left[\operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2} - \operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi}{l} \left(\frac{\lambda}{2} + \delta \right) \right] - M_0 \operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \frac{\lambda}{2};$$

unde :

$$A = \frac{l}{(2s+1)\pi} \frac{V}{\rho} \frac{B_0}{\delta};$$

$$M_0 = (-1)^s \frac{4J_0}{(2s+1)\pi}.$$

Cunoscînd repartitia densității de curent în masa de fluid s-a calculat presiunea dezvoltată de pompă :

$$p = \frac{4}{l} \int_0^\infty \int_0^{l/2} J_y B_s dx dy \quad (9)$$

(vezi anexa).

Diferența de potențial dintre electrozii pompei a fost calculată cu relația :

$$U = \int_{-l/2}^{+l/2} E_y(0, y) dy \quad (10)$$

s-a obținut astfel pentru această mărime expresia :

$$U = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^s \cdot 2 \cdot B_0 \cdot V \cdot l^2}{\pi^2 (2s+1)^2 \delta} \left[e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + \delta\right)} - e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \frac{\lambda}{2}} \right] - \frac{4\rho J_0 l}{(2s+1)^2 \pi^2} \cdot e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \cdot \frac{\lambda}{2}} \right\} + \rho J_0 l + v B_0 l \quad (10')$$

Au fost deasemenea calculate pierderile Joule în masa de fluid

$$P_J = 4 \cdot g \cdot \int_0^\infty \int_0^{l/2} \rho (J_x^2 + J_y^2) dx dy \quad (11)$$

avînd aceste mărimi determinate s-au mai calculat :

— puterea utilă a pompei :

$$P_U = p \cdot g \cdot l \cdot V ; \quad (12)$$

— puterea absorbită de pompă :

$$P_{ab.} = U \cdot J_0 \cdot g \cdot l ; \quad (13)$$

— randamentul electromagnetic al pompei :

$$\eta = \frac{P_U}{P_{ab.}} \quad (14)$$

În calculul randamentului pompei nu s-au luat în considerație pierderile din înfășurarea de excitație a electromagnetului.

Aplicație numerică

Pentru un canal avînd dimensiunile $g = 10^{-2} \text{ m}$; $l = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; $\lambda = 10^{-1} \text{ m}$; pentru $B_0 = 1 \text{ T}$, $\rho = 10^{-6} \Omega \text{ m}$ (mercur) și pentru $\delta = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ s-a întocmit un program de calcul cu ajutorul căruia s-au trasat caracteristicile :

$$P_{ab.}, P_U, p, I, \eta = f(v) \quad (15)$$

În scopul determinării acestor caracteristici pentru o pompă funcționînd cu tensiunea la borne constantă s-a procedat astfel :

— s-a trasat caracteristicile $U = f(v)$ și $F = f(v)$ pentru diverse valori constante ale curentului absorbit I (vezi fig. 2, 3) ;

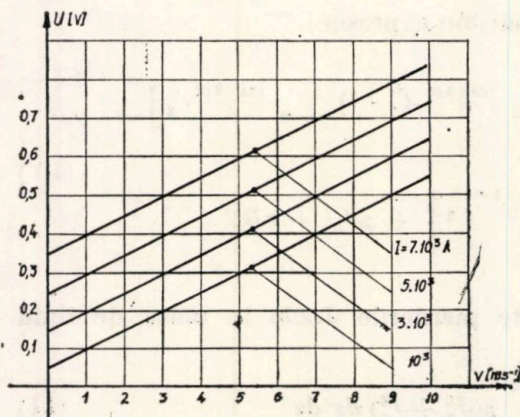


Fig. 2

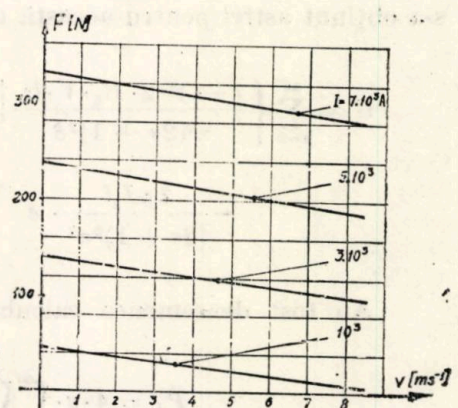


Fig. 3

— cu ajutorul caracteristicilor $U = f(v)$ s-au dedus dependențele funcționale $I = f(v)$ pentru diverse valori constante ale tensiunii de alimentare (vezi fig. 4);

— pentru un cuplu de valori ale curentului de alimentare și ale vitezei dedus de pe caracteristica $I = f(v)$ se deduce o valoare pentru presiunea dezvoltată de pompă;

— având presiunea dezvoltată de pompă pentru anumită valoare a vitezei se pot calcula: puterea utilă (P_U); puterea absorbită de pompă ($P_{abs.}$) și randamentul pompei (η).

În figura 5 sînt prezentate caracteristicile unei pompe reale calculate cu metodică prezentată alături de caracteristicile unei pompe ideale avînd aceleași dimensiuni geometrice ale canalului, aceeași inducție în întrefier și aceeași tensiune aplicată la borne ca pompa reală.

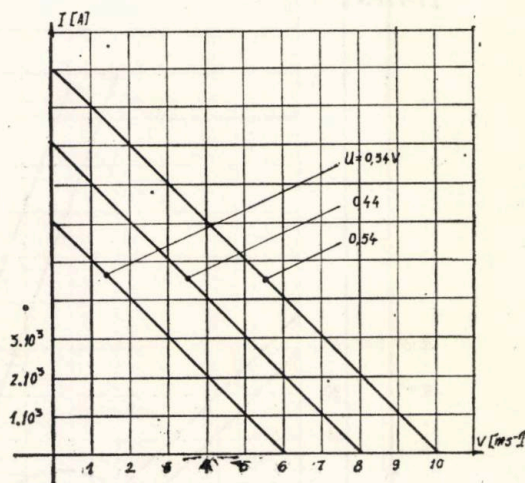


Fig. 4

Pompa ideală este un model de pompă în care nu există efect de margine și prin urmare liniile densității de curent sînt paralele și traversează numai zona activă (de sub polul magnetic) a pompei.

Din analiza celor două categorii de caracteristici prezentate în figura 5 au rezultat următoarele:

— în ambele cazuri (și cel real și cel ideal) presiunea dezvoltată de pompă variază liniar cu viteza. Pentru cazul real panta dreptei $p = f(v)$ este mai mare, aceasta pantă depinde de raportul λ/l ;

— datorită repartiției dezavantajoase a curentului în masa de fluid din zona activă a pompei reale ca urmare a efectului de margine, pentru anumite viteze, pompa nu mai dezvoltă presiune deși curentul absorbit este diferit de zero;

— randamentul pompei reale este mult mai mic decît cel al pompei ideale în timp ce la pompa ideală, pe măsură ce crește viteza, randamentul se apropie de unitate la pompa reală odată cu creșterea vitezei crește în intensitate efectul de margine și randamentul scade tinzînd la zero. Trebuie remarcat faptul că dacă pompa calculată prezintă totuși un randament maxim ridicat $\eta = 0,45$ aceasta se datorește faptului că raportul $\lambda/l = 2$ și pentru anumită viteză efectul de margine este mai puțin intens decît la o pompă avînd acest raport subunitar;

— datorită curbării puternice a liniilor densității de curent rezistența corespunzătoare zonei active a pompei este mai mare în cazul real decît în cazul ideal.

Aceasta face ca la aceeași tensiune de alimentare curentul absorbit de pompa reală să fie sensibil mai mic decît cel absorbit de pompa ideală.

Astfel la aceeași configurație geometrică, aceeași inducție în întreg și aceeași tensiune de alimentare pompa reală produce o putere utilă mai mică decât cea ideală ceea ce o face să fie mai puțin economică.

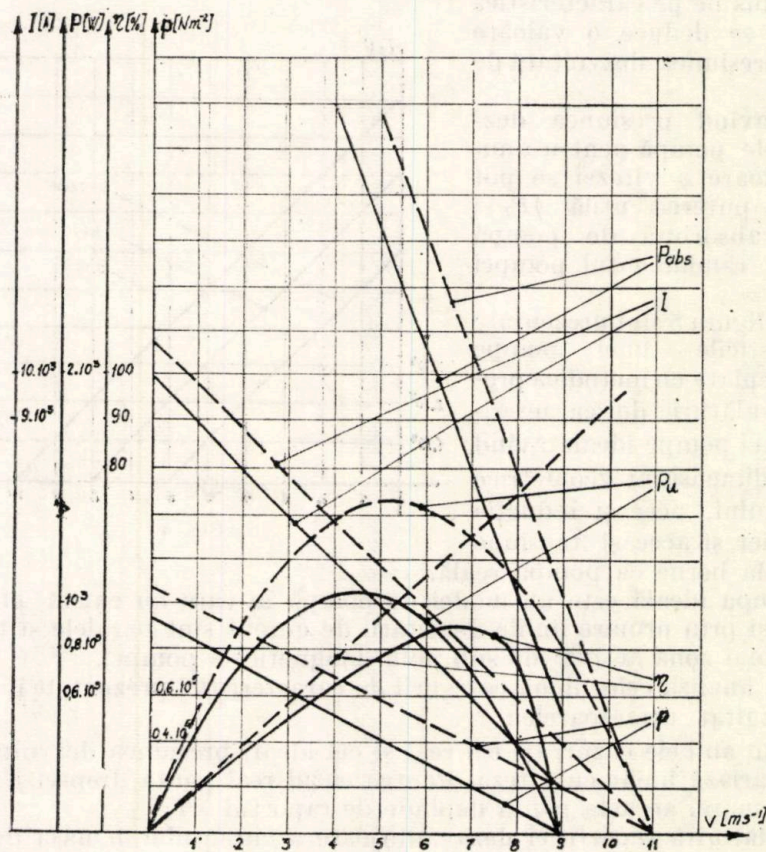


Fig. 5

În cazul modelului de pompă proiectat s-a considerat că inducția magnetică variază, în zonele de intrare și de ieșire, liniar cu variabila x . Soluții pentru componentele densității de curent se pot găsi pentru orice lege de variație $B_z = f(x)$, prin liniarizarea ei pe porțiuni și rezolvarea ecuației (3) în fiecare zonă rezultată, după modelul prezentat anterior.

În prezenta lucrare s-a urmărit punerea la punct a unei metodici de proiectare a pompei electromagnetice de curent continuu ținând seama de cimpul magnetic din zonele de intrare și de ieșire ale pompei dar indiferent de legea de variație.

Influența legii de variație $B_z = f(x)$, a vitezei și a configurației geometrice a canalului asupra performanțelor pompei a constituit obiectul unei alte lucrări.

Despre schema echivalentă a pompei

În lucrările [1, 2, 3] se propune pentru pompa electromagnetică de curent continuu următoarea schemă echivalentă (vezi fig. 6a) unde :

E — este tensiunea electromotoare indusă în masa de fluid în mișcare ;

R — este rezistența mediului fluid din zona activă (de sub polul magnetic) ;

R_e — este rezistența mediului fluid din afara zonei active ;

R_p — rezistența pereților conductei de curgere a fluidului ;

U — este tensiunea dintre electrozii pompei.

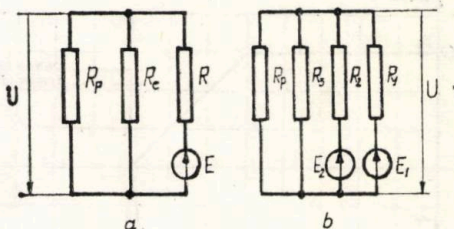


Fig. 6

În lucrare s-a făcut un studiu privind influența efectului de margine asupra elementelor schemei echivalente a pompei electromagnetice de curent continuu.

În acest scop au fost calculate rezistențele corespunzătoare celor trei zone cu următoarele relații ;

$$R_1 = \frac{(U - B_0 l v)^2}{P_{J1}} ;$$

$$R_2 = \frac{(U - B_0 l v / 2)^2}{P_{J2}} ;$$

$$R_3 = \frac{U^2}{P_{J3}} .$$
(16)

În aceste relații P_{J1} , P_{J2} ; P_{J3} sînt pierderile Joule din cele trei zone. Schema echivalentă pentru o pompă de curent continuu, care ține seama de efectul de margine are configurația din figura 6b.

Elementele acestei scheme au următoarea semnificație :

E_1 — este tensiunea electromotoare indusă în masa de fluid din zona 1 ;

E_2 — este tensiunea electromotoare indusă în masa de fluid din zona 2 ;

R_1 , R_2 , R_3 — sînt rezistențele fluidului corespunzătoare celor trei zone ;

R_p — este rezistența pereților canalului (în prezenta lucrare este considerat cazul în care $R_p = 0$).

În scopul înțelegerii fenomenelor care au loc în masa de fluid, în zonele de intrare și de ieșire, ca urmare a efectului de margine a fost prezentată în figura 7 dependența $J_y(x; 0,001) = f(x)$

În figura 8 au fost prezentate variațiile rezistențelor relative ale celor trei zone cu viteza. Rezistența relativă a unei zone s-a obținut raportînd rezistența zonei respective calculată cu relațiile (16) pentru o anumită viteză la rezistența aceleiași zone calculată cu aceleași relații pentru viteză nulă.

Analizînd dependențele funcționale amintite rezultă că :

— datorită efectului de margine rezistențele schemei echivalente a pompei electromagnetice de curent continuu nu sînt constante pentru

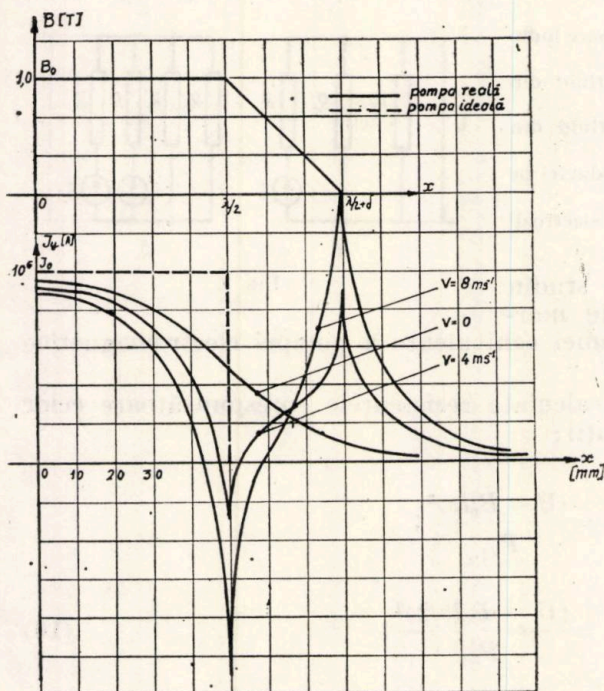


Fig. 7

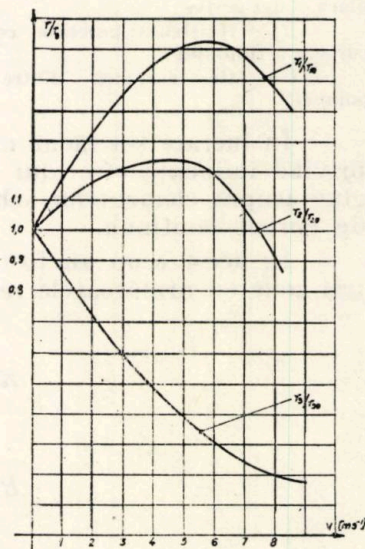


Fig. 8

o configurație geometrică a canalului precizată ci depind puternic de viteză (vezi fig. 8) ;

— cea mai însemnată variație cu viteza o prezintă rezistența corespunzătoare zonei 3. Odată cu creșterea vitezei crește efectul de șuntare al acestei zone. Se poate pune în evidență acest lucru și cu ajutorul figurii 7. Din această figură se observă că dacă la $v = 0$ curentul care se închide prin zona 3 este însemnat, la $v = 8$ m/s o mare parte din curentul absorbit de pompă ocolește zona activă ;

— cu ajutorul figurii 7 se poate pune în evidență și faptul că curenții induși ca urmare a efectului de margine nu modifică din punct de vedere cantitativ curentul absorbit de pompă ci numai repartitia acestuia în masa de fluid.

Faptul că rezistențele electrice care intervin în schema echivalentă a pompei sînt funcție de debit face ca întocmirea unei asemenea scheme conformă cu realitatea să fie foarte dificilă.

Predeterminarea caracteristicilor de funcționare cu ajutorul unei scheme echivalente avînd parametri constanți este eronată mai ales în cazul pompelor funcționînd cu debite mari.

Concluzie

Analizând cele două categorii de caracteristici trasate în figura 5 rezultă că în proiectarea pompelor electromagnetice de curent continuu trebuie să se țină seama de fenomenele secundare care apar în aceste pompe. Ignorarea acestor fenomene conduce la erori cu atât mai însemnate cu cât raportul λ/l este mai mic și debitul pompei mai mare.

Catedra de mașini electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. Watt D. A., The Design of Electromagnetic Pumps for Liquid Metals; Proceedings I.E.E., Paper Nr. 2698 U, April, 1959, (106A, p. 77).
2. Blake, L. R., Conduction and Induction Pumps for Liquid Metals, Proceedings I.E.E., Paper Nr. 2111 U, July, 1956 (104 A, p. 49).
3. Birzvalk, I. A., Konduktionie jidcometaliceskie M.H.D. — nasosi postoianovo toka, Magnitanaia Ghidrodinamica, 1971, 2 (p. 75—87).
4. Golodov, N. N., Krautia, V. M., Iankop, E. K., Ispolzovnie konduktionovo nasosa postoianovo toka dlia cernih metalov v stopornom rejime, Magnitanaia Ghidrodinamica, 1971, 4 (p. 118—128).

The Calculation Method for the d.c. Electromagnetic Pumps.

In this paper is presented a method for the dimension of the channel and the calculation of d. c. electromagnetic pump characteristics starting from the solution of the equations satisfied by the electromagnetic field sizes of the moving fluid mass.

The calculation of the electromagnetic pump characteristics was made for a model having a special variation low of the magnetic induction in the air gap, so in the active zone as more it's exterior.

Also, is presented a comparison between the characteristics of a real pump and the characteristics of an ideal pump.

ANEXĂ

$$\begin{aligned}
 p = \frac{4 B_0}{l} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s/2}}{(2s+1)^2 \pi^2} A_{1s} \operatorname{sh} \frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2} + \right. \\
 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s/2}}{(2s+1)^2 \pi^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\delta} + 1 \right) \cdot A_{2s} \cdot \left[e^{\frac{(2s+1)\pi}{l} \left(\frac{\lambda}{2} + \delta \right)} - e^{\frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2}} \right] + \\
 \left. + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s/2}}{(2s+1)^2 \pi^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{2\delta} + 1 \right) \cdot B_{2s} \cdot \left[e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \left(\frac{\lambda}{2} + \delta \right)} - e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2}} \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^s l^3}{(2s+1)^3 \pi^3} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot B_{3s} \cdot \left\{ e^{\frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2}} \left[\frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2} - 1 \right] - \right. \\
& \left. - e^{\frac{(2s+1)\pi}{l} \left(\frac{\lambda}{2} + \delta \right)} \cdot \left[\frac{(2s+1)\pi}{l} \left(\frac{\lambda}{2} + \delta \right) - 1 \right] \right\} + \\
& + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s l^2}{(2s+1)^3 \pi^3} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot B_{3s} \cdot \left\{ e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2}} \left[\frac{(2s+1)\pi}{l} \frac{\lambda}{2} + 1 \right] - \right. \\
& \left. - e^{-\frac{(2s+1)\pi}{l} \left(\frac{\lambda}{2} + \delta \right)} \left[\frac{(2s+1)\pi}{l} \left(\frac{\lambda}{2} + \delta \right) + 1 \right] \right\}
\end{aligned}$$

C.Z. : 621.396.619
621.394.61
621.395.61

CALCULUL RĂSPUNSULUI CIRCUITELOR ELECTRICE LA SEMNALE CU MODULAȚIE ÎN IMPULSURI DE FAZĂ *

M. SĂVESCU, ECATERINA VLĂDESCU

În articol este prevăzută o metodă de calcul a răspunsului circuitelor electrice liniare la semnale cu modulație în impulsuri de frecvență sau de fază aplicată la intrare; s-a considerat că oscilația modulatorie este alcătuită dintr-o succesiune de trepte aplicate la momente arbitrare de timp, eventual aleatoare. Relațiile obținute sînt interesante și utile în special pentru reprezentarea explicită a expresiei răspunsului de fază.

1. Introducere

Semnalele cu manipulație de fază, adică semnalele a căror fază este modulată în salturi, au fost și sînt utilizate în sistemele telegrafice iar, mai recent, au fost introduse în sistemele de radiocomunicații spațiale.

În lucrările (1), (2), (3), (4) este folosită metoda de determinare a răspunsului unui semnal MP a cărei fază variază la un moment dat ($t = 0$) de la nivelul θ_1 la nivelul θ_2 , prin însumarea răspunsului la semnalul $A \cos(\omega_0 t + \theta_1)$ care încetează de a mai exista în momentul $t = 0$, cu răspunsul la semnalul $A \cos(\omega_0 t + \theta_2)$ care începe să acționeze din același moment $t = 0$.

Alte metode se dau în lucrările (5), (6), (7), (8) bazate pe echivalențe de joasă frecvență pentru determinarea răspunsului circuitelor electrice la semnale modulate cu impulsuri de fază sau de frecvență.

În cele ce urmează se va prezenta o metodă simplă și exactă care pune sub o formă explicită faza răspunsului circuitului.

2. Expresia generală a fazei răspunsului

Lucrarea prezentă introduce noi comodități de calcul în cazul semnalelor modulate în impulsuri de fază. După cum se va vedea, metoda poate fi aplicată cu multă ușurință pentru un circuit oarecare și pentru o variație arbitrară a fazei; multe dintre rezultatele obținute în literatura de specialitate se pot obține prin particularizări.

* Manuscrit predat redacției la data de 10 noiembrie 1975

S-a arătat (6), (7), (8) că faza $\varphi(t)$ a răspunsului unui circuit electric liniar căruia i se aplică un semnal cu modulație de fază sau de frecvență poate fi calculată cu formula

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\int_0^t A'(t - \tau) \sin \theta(\tau) d\tau}{\int_0^t A'(t - \tau) \cos \theta(\tau) d\tau} \quad (1)$$

în care $\theta(\tau)$ este faza semnalului aplicat iar $A'(t)$, derivata amplitudinii tranzitorii corespunzătoare circuitului. Prin definiție, amplitudinea tranzitorie reprezintă amplitudinea răspunsului circuitului la semnalul sinusoidal aplicat circuitului — la momentul $t=0$ — și a cărei frecvență este egală cu frecvența semnalului modulat.

Formula (1) se aplică direct cu condiția ca amplitudinea tranzitorie să fie o funcție reală de timp. Condiția este satisfăcută de circuitele selective, acordate pe frecvența purtătoare a semnalului modulat; acesta este cazul care interesează în practică și de care ne vom ocupa în cele ce urmează.

Dacă amplitudinea tranzitorie este complexă este necesar să se complice puțin expresia (1), fără, însă, ca prin aceasta să intervină dificultăți importante.

Dacă modulația se face în fază, cu un semnal modulator de forma dată în figura 1 se scrie pentru integrala de la numitorul formulei (1), expresia

$$\begin{aligned} \int_0^t A'(t - \tau) \sin \theta(\tau) d\tau &= \sin \theta_1 \int_0^{t_1} A'(t - \tau) d\tau + \sin \theta_2 \int_{t_1}^{t_2} A'(t - \tau) d\tau + \dots \\ &\dots + \sin \theta_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} A'(t - \tau) d\tau + \sin \theta_{k+1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} A'(t - \tau) d\tau + \dots \\ &\dots + \sin \theta_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} A'(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Făcînd schimbarea de variabile $t - \tau = \lambda$ se obține

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} A'(t - \tau) d\tau = - \int_{t-t_k}^{t-t_{k-1}} A'(\lambda) d\lambda = A(\lambda) \Big|_{t-t_k}^{t-t_{k-1}} = A(t - t_{k-1}) - A(t - t_k)$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} \int_0^t A'(t - \tau) \sin \theta(\tau) d\tau &= \sin \theta_1 [A(t) - A(t - t_1)] + \sin \theta_2 [A(t - t_1) - \\ &- A(t - t_2)] + \dots + \sin \theta_k [A(t - t_{k-1}) - A(t - t_k)] + \\ &+ \sin \theta_{k+1} [A(t - t_k) - A(t - t_{k+1})] + \dots + \sin \theta_n [A(t - t_{n-1}) - A(t - t_n)] \end{aligned}$$

Termenii pot fi grupați

$$\int_0^t A'(t - \tau) \sin \theta(\tau) d\tau = A(t) \sin \theta_1 + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) A(t - t_1) + \\ + (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) A(t - t_k) \dots = A(t) \sin \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) A(t - t_k)$$

Pe o cale cu totul asemănătoare se calculează și numitorul expresiei (1):

$$\int_0^t A'(t - \tau) \cos \theta(\tau) d\tau = A(t) \cos \theta_1 + \\ + \sum_{k=1}^n (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) A(t - t_k)$$

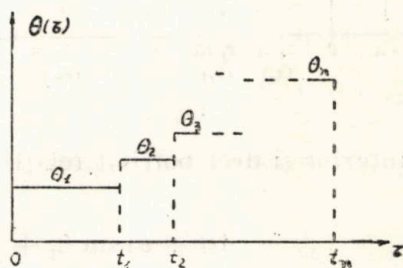


Fig. 1.

Se obține faza răspunsului sub forma

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A(t) \sin \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) A(t - t_k)}{A(t) \cos \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) A(t - t_k)} \quad (2)$$

Relația (2) poate fi pusă sub o formă mai compactă și anume

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\sum_{k=0}^n (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) A(t - t_k)}{A(t) + \sum_{k=0}^n (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) A(t - t_k)} \quad (3)$$

dacă se introduc simbolurile θ_0, t_0 care sînt considerate nule: $\theta_0 = t_0 = 0$. Trebuie observat că mărimile θ_0, t_0 nu au nici o realitate fizică. Ar fi greșit să se considere că θ_0 reprezintă valoarea fazei înainte de aplicarea saltului θ_1 din figura 1 sau că t_0 reprezintă momentul conectării sursei de semnal. Indiferent de valoarea acestui moment sau de nivelul fazei din intervalul care precede saltul θ_1 , trebuie considerat $\theta_0 = 0, t_0 = 0$ în scrierea corectă a formulei (3).

În cele de mai sus s-a presupus că sursa de semnal se conectează la intrarea circuitului în momentul $t = 0$. Din această cauză expresia (2) conține și influența regimului tranzitoriu care apare în circuit imediat după momentul $t = 0$. Este, desigur, interesant să eliminăm influența regimului tranzitoriu de conectare și să exprimăm variațiile de fază ale

răspunsului $\varphi(t)$ care sînt datorate exclusiv variațiilor de fază $\theta(t)$ ale semnalului. Cu acest scop vom concepe că θ_1 reprezintă faza inițială a semnalului și că momentul în care se produce primul salt de fază

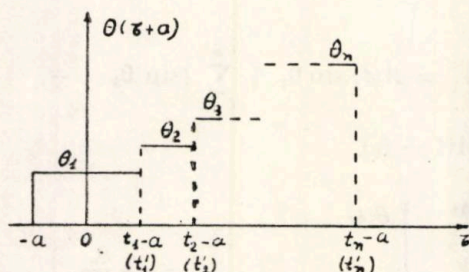


Fig. 2.

este t_1 (vezi figura 1); dacă vom considera că t_1 este suficient de mare — teoretic $t_1 \rightarrow \infty$ — atunci răspunsul care apare în circuit pentru $t > t_1$ nu va conține influența regimului de conectare a sursei de semnal.

Putem alege o nouă origine de măsurare a timpului în punctul $t = a$ ($0 < a < t_1$). În noul sistem de referință (vezi figura 2) semnalul de modulație se obține printr-o translație $\theta(t+a)$ a semnalului

anterior și deci potrivit relației (2) răspunsul va fi dat de expresia

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A(t+a) \sin \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) A[t - (t_k - a)]}{A(t+a) \cos \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) A[t - (t_k - a)]} \quad (4)$$

Notînd $t_k - a = t'_k$ și apoi revenind la notația t_k se înțelege că la un semnal de forma din figura 3 se obține un răspuns care în raport cu timpul t se exprimă printr-o funcție $\varphi(t)$ dată de formula

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A(t+a) \sin \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) A(t - t_k)}{A(t+a) \cos \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) A(t - t_k)} \quad (5)$$

În formula (5) și în figura 3 timpul $t = -a$ corespunde momentului conectării sursei de semnal la intrarea circuitului a cărui amplitudine tranzitorie este $A(t)$. Presupunînd că $a \rightarrow \infty$, se elimină influența regimu-

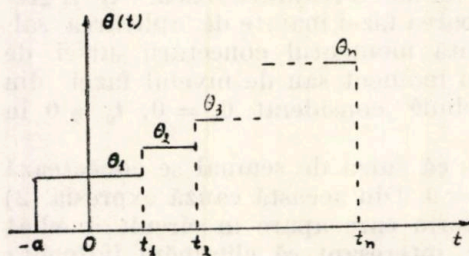


Fig. 3.

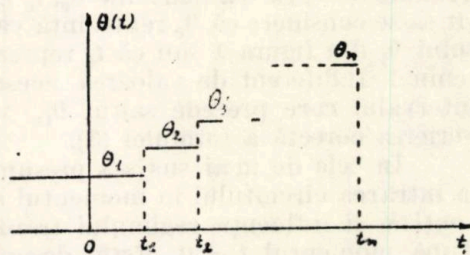


Fig. 4.

lui tranzitoriu de conectare a semnalului și se obține variația fazei răspunsului datorată exclusiv variației fazei semnalului. Trecînd la limită ($a \rightarrow \infty$) se deduce din (5) formula

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A(\infty) \sin \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) A(t - t_k)}{A(\infty) \cos \theta_1 + \sum_{k=1}^n (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) A(t - t_k)} \quad (6)$$

care reprezintă faza răspunsului la semnalul care posedă modulația de fază din figura 4.

De multe ori se poate considera nulă faza θ_1 pe care o are semnalul înaintea producerii primului salt de fază; în aceste cazuri faza răspunsului rezultă din formula

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\sum_{k=1}^n (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) A(t - t_k)}{A(\infty) + \sum_{k=1}^n (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) A(t - t_k)} \quad (7)$$

Este important să se observe că asupra momentelor $t_1, t_2, \dots$ și asupra nivelurilor $\theta_1, \theta_2, \dots$ nu s-au făcut restricții; ele pot să se succedă oricum, după o lege oarecare, deterministă sau întîmplătoare.

O situație interesantă este aceea în care nivelurile fazei sînt egale (vezi figura 5). Acesta este cazul semnalelor modulate codificat cu impulsuri de fază, folosite — între altele — în sistemele cele mai recente de radiocomunicații spațiale.

Deoarece $\theta_1 = 0$, se poate aplica formula (7) și rezultă

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi(t) &= \frac{(\sin \theta_s - 0) A(t - t_1) + (0 - \sin \theta_s) A(t - t_2) + \dots}{A(\infty) + (\cos \theta_s - 1) A(t - t_1) + (1 - \cos \theta_s) A(t - t_2) + \dots} = \\ &= \frac{\sin \theta_s \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A(t - t_k)}{A(\infty) + (\cos \theta_s - 1) \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A(t - t_k)} \end{aligned} \quad (8)$$

Dacă nivelul inferior al fazei n-ar fi nul ci ar avea o valoare $\theta_1 = \theta_s = \dots = \theta_i$ s-ar găsi răspunsul

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A(\infty) \sin \theta_i + (\sin \theta_s - \sin \theta_i) \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A(t - t_k)}{A(\infty) \cos \theta_i + (\cos \theta_s - \cos \theta_i) \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A(t - t_k)} \quad (9)$$

În ipoteza unor salturi simetrice $\theta_s = -\theta_i = -\theta$, se obține

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi(t) &= \frac{\left[A(\infty) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A(t - t_k) \right] \sin \theta}{A(\infty) \cos \theta} = \\ &= \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A_1(t - t_k) \right] \operatorname{tg} \theta \end{aligned} \quad (10)$$

unde $A_1(t - t_k) = \frac{A(t - t_k)}{A(\infty)}$.

Formula (10) nu poate fi aplicată, desigur, decît dacă $A(\infty) \neq 0$ și $\theta_s \neq 90^\circ$ (putînd fi oricît de apropiat de 90°).

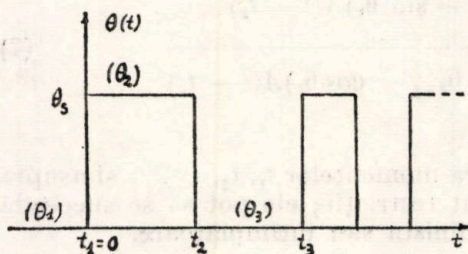


Fig. 5.

Presupunînd că este vorba de o succesiune periodică de impulsuri de fază, se poate pune $t_k = kT$ unde T este perioada iar k este un număr întreg, pozitiv. Se pot retranscrie ușor relațiile de mai sus; ca exemplu, relația (10) devine

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi(t) &= \\ &= \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A_1(t - kT) \right] \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

În numeroase și importante cazuri amplitudinea tranzitorie $A_1(t)$ se exprimă prin intermediul unor exponențiale și din această cauză suma care apare în relația (11) poate fi efectuată și pusă sub o formă concisă. Ca exemplu, dacă semnalul se aplică unui circuit oscilant, amplitudinea tranzitorie este

$$A(t) = A_0(1 - e^{-\alpha t})$$

unde A_0 și α depind de parametrii circuitului. Pentru acest caz formula (11) conduce la expresia

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} [1 - e^{-\alpha(t-kT)}] \quad (12)$$

în care s-a notat

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi(t)}{\operatorname{tg} \theta} - 1 \right]. \quad (13)$$

Se deduce

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} - e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} e^{\alpha k T} \quad (14)$$

și se constată că prima sumă este egală cu zero sau cu 1 după cum n este par sau impar; a doua sumă din (14) conduce la o serie geometrică cu rația $e^{-\alpha T}$ și cu termenii extremi egali cu $e^{\alpha T}$ și $(-1)^{n+1} e^{\alpha n T}$. Însușind seria geometrică, se obține relația

$$\Phi(t) = \delta - e^{-\alpha(t-T)} \frac{1 + (-1)^{n+1} e^{\alpha n T}}{1 + e^{\alpha T}} \quad (15)$$

în care δ ia valorile 0 sau 1 în funcție de paritatea numărului n .

Mai explicit pentru n par rezultă

$$\Phi(t) = - \frac{1 - e^{\alpha n T}}{1 + e^{-\alpha T}} e^{-\alpha} \quad (16)$$

iar pentru n impar

$$\Phi(t) = 1 - \frac{1 + e^{\alpha n T}}{1 + e^{-\alpha T}} e^{-\alpha t} \quad (17)$$

Pentru un circuit oarecare și pentru un semnal de tipul dat în figura 5 faza răspunsului se reduce la însumarea unor amplitudini tranzitorii întârziate pe axa timpului (vezi formulele 9 și 10). Se poate vedea că datorită faptului că în circuitele reale amplitudinea tranzitorie ajunge repede la valoarea de regim permanent este posibil ca în sumele care apar în relațiile (9), (10) să se ia în considerație un număr foarte redus de termeni. În adevăr din relațiile (10), (13) rezultă

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A_1(t - t_k) \quad (18)$$

și se constată că funcția $\Phi(t)$ se obține la un moment oarecare t prin însumarea tuturor valorilor pe care amplitudinile tranzitorii $\pm A_1(t - t_k)$ le capătă în acest moment. Afirmația, bazată pe relația (18), este ilustrată în figura 6. Se constată că se poate considera cu o bună aproximație că în momentul t se poate scrie $A(t - t_k) \simeq A(\infty)$, $A_1(t - t_k) \simeq 1$ dacă momentele t și t_k sînt suficient de îndepărtate. Cu aceasta se scrie suma din relația (18) sub forma

$$\sum_{k=1}^{k_0} (-1)^{k+1} + \sum_{k=k_0}^n A_1(t - t_k) = \delta + \sum_{k=k_0}^n A_1(t - t_k) \quad (19)$$

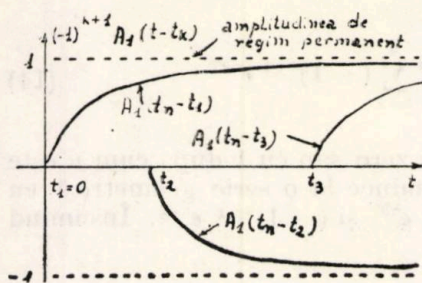


Fig. 6.

în care δ este simbolul folosit mai înainte, egal cu unitatea sau cu zero.

Determinarea numărului k_0 poate fi făcută ușor în unele cazuri. Ca exemplu, pentru un circuit oscilant la care amplitudinea tranzitorie este $A(t) = A_0(1 - e^{-\alpha t})$ se scrie

$$A(\infty) = A_0, \quad A_1(t - t_k) = 1 - e^{-\alpha(t-t_k)}$$

și condiția de determinare a numărului k_0 , în cazul unei erori de 1 %, este

$$1 - e^{-\alpha(t-t_{k_0})} = 0,99$$

Rezultă, astfel, t_{k_0} și deci k_0 , atunci cînd sînt precizate mărimile α și t . Este posibil deci să se scrie (18) sub forma

$$\Phi(t) = \delta + \sum_{k=k_0}^n (-1)^{k+1} A_1(t - t_k) \quad (20)$$

în care a fost restrîns numărul termenilor care trebuie însumați.

Dacă saltul de fază θ este mic, se poate aproxima $\tan \theta \simeq \theta$ și din relația (10) rezultă

$$\begin{aligned} \tan \varphi(t) &= \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A_1(t - t_k) \right] \theta \simeq \\ &\simeq \left[1 + 2\delta + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A_1(t - t_k) \right] \theta. \end{aligned}$$

Aproximînd $\tan \varphi(t) \simeq \varphi(t)$ rezultă răspunsul de fază al unui circuit oarecare

$$\varphi(t) \simeq \left[1 + 2\delta + 2 \sum_{k=k_0}^n (-1)^{k+1} A_1(t - t_k) \right] \theta \quad (21)$$

la semnalul din figura 7. Relația (21) este deosebit de simplă și comodă în aplicații.

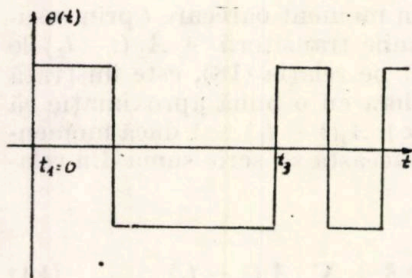


Fig. 7.

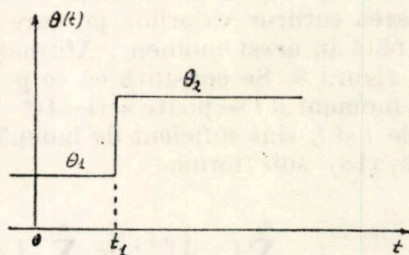


Fig. 8.

3. Aplicații ale metodei propuse

În cele ce urmează, cu scopul de a compara rezultatele obținute prin metoda propusă mai sus, cu rezultatele obținute în literatura de specialitate și — totodată — pentru a studia noi cazuri neabordate încă, se vor face aplicații ale relațiilor demonstrate.

1°. Circuitul oscilant L, C (serie sau derivație) căruia i se aplică saltul de fază din figura 8. Aplicând formula (6) pentru calculul fazei dintr-un moment $t = t_1$ și ținând cont că $A(t) = A_0(1 - e^{-\alpha t})$ rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\sin \theta_1 + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)[1 - e^{-\alpha(t-t_1)}]}{\cos \theta_1 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)[1 - e^{-\alpha(t-t_1)}]}. \quad (22)$$

Dacă se presupune $t_1 = 0$, $\theta_1 = -\theta_2 = -\theta$ se găsește expresia

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{-\sin \theta + (\sin \theta + \sin \theta)(1 - e^{-\alpha t})}{\cos \theta} = (1 - 2e^{-\alpha t}) \operatorname{tg} \theta \quad (23)$$

care coincide cu expresia stabilită de Vinițki în lucrarea (2).

2°. Circuitul oscilant L, C (serie sau derivație) căruia i se aplică un semnal cu variație dreptunghiulară a fazei, ca în figura 9. Folosind formula (6) rezultă că

— pentru $t_1 < t < t_2$ rămâne valabilă formula (22),
— pentru $t > t_2$ trebuie adăugată contribuția saltului de fază din momentul t_2 .

La numărătorul expresiei (22) contribuția este

$$(\sin \theta_3 - \sin \theta_2)[1 - e^{-\alpha(t-t_2)}] = -(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)[1 - e^{-\alpha(t-t_2)}]$$

iar la numitor trebuie adăugat termenul

$$(\cos \theta_3 - \cos \theta_2)[1 - e^{-\alpha(t-t_2)}] = -(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)[1 - e^{-\alpha(t-t_2)}].$$

Rezultă, astfel, formula

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi(t) &= \frac{\sin \theta_1 + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)[(1 - e^{-\alpha(t-t_1)}) - (1 - e^{-\alpha(t-t_2)})]}{\cos \theta_1 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)[(1 - e^{-\alpha(t-t_1)}) - (1 - e^{-\alpha(t-t_2)})]} = \\ &= \frac{\sin \theta_1 - (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)(e^{-\alpha(t-t_1)} - e^{-\alpha(t-t_2)})}{\cos \theta_1 - (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)(e^{-\alpha(t-t_1)} - e^{-\alpha(t-t_2)})}. \end{aligned} \quad (24)$$

Relația (24) capătă forme variate atunci când se schimbă poziția impulsului dreptunghiular din figura 9. Ca exemplu, presupunând $t_1 = 0$, $t_2 = \tau$, $\theta_1 = -\theta_2 = -\theta$ se obține relația

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi(t) &= \frac{-\sin \theta - 2 \sin \theta (e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(t-\tau)})}{\cos \theta} = \\ &= (-1 - 2e^{-\alpha t} + 2e^{-\alpha(t-\tau)}) \operatorname{tg} \theta \end{aligned} \quad (25)$$

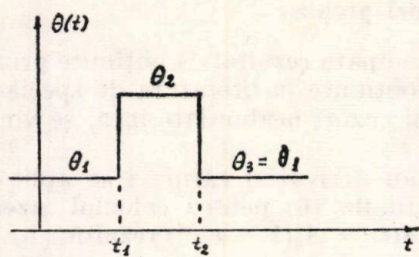


Fig. 9.

care coincide cu expresia obținută, după îndelungate calcule, în lucrarea [9].

3°. Pereche de circuite cuplate sau amplificator cu două etaje cu circuite decalat și simetric dezacordate, la intrarea căruia se aplică saltul de fază din figura 8.

În acest caz amplitudinea tranzitorie (10) este de forma

$$A(t) = A_0[1 - e^{-at}(a \sin bt + \cos bt)]$$

în care A_0 , α , a și b depind de parametrii circuitului. Se poate scrie

$$A(t) = A_0[1 - \beta e^{-at} \cos(bt + \gamma)]$$

mărimile β și γ fiind dependente de a și b . Aplicând formula (6) rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\sin \theta_1 + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)\{1 - \beta e^{-\alpha(t-t_1)} \cos[b(t-t_1) + \gamma]\}}{\cos \theta_1 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)\{1 - \beta e^{-\alpha(t-t_1)} \cos[b(t-t_1) + \gamma]\}} \quad (26)$$

Dacă se consideră saltul simetric produs în originea sistemului de referință, trebuie ca în formula precedentă să se scrie $t_1 = 0$, $\theta_1 = -\theta_2 = -\theta$ și se obține

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{-\sin \theta + 2 \sin \theta[1 - \beta e^{-at} \cos(bt + \gamma)]}{\cos \theta}$$

sau

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = [1 - 2\beta e^{-at} \cos(bt + \gamma)] \operatorname{tg} \theta. \quad (27)$$

Determinarea răspunsului pentru semnalul din figura 9 poate fi făcută prin procedura simplă arătată în cazul anterior (2°).

4°. Amplificator cu n circuite derivație acordate și identice la intrarea căruia se aplică modulația treaptă din figura 8.

Ținând cont că amplitudinea tranzitorie (11) are în acest caz expresia

$$A(t) = A_0 \left[1 - e^{-at} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(\alpha t)^m}{m!} \right]$$

în care A_0 și α sînt parametrii ai sistemului iar N este numărul etajelor, se aplică formula (6) și se găsește relația

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\sin \theta_1 + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \left[1 - e^{-\alpha(t-t_1)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\alpha^m (t-t_1)^m}{m!} \right]}{\cos \theta_1 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \left[1 - e^{-\alpha(t-t_1)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\alpha^m (t-t_1)^m}{m!} \right]} \quad (28)$$

Pentru saltul de fază simetric, la care $t_1 = 0$, $\theta_2 = -\theta_1 = -\theta$, rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \left(1 - 2e^{-\alpha t} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\alpha^m t^m}{m!} \right) \operatorname{tg} \theta. \quad (29)$$

Deoarece termenii sumei din formula (29) scad rapid odată cu creșterea numărului de etaje, se trage concluzia că variația fazei răspunsului este dependentă de numărul etajelor numai dacă acesta este mai mic decât 3—4.

4. Concluzii

Metoda propusă pentru calculul fazei răspunsului circuitelor electrice liniare la semnale cu modulație de fază este exactă și totodată deosebit de comodă în aplicații. Ea permite rezolvarea unor probleme practice inabordabile prin metodele cunoscute. Problema complexă a analizei circuitelor care lucrează cu semnale MP este redusă la o problemă simplă, aceea a determinării răspunsului circuitelor la semnalul sinusoidal, conectat la intrarea circuitului la un moment dat, $t = 0$; această problemă este larg studiată în literatură iar rezolvarea ei în cazurile în care nu pot fi preluate direct soluții existente poate fi făcută ușor, de exemplu, prin metoda calculului operațional.

Catedra de radio-comunicații

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Cartianu, *Modulation de fréquence*, Dunod, Paris, 1968.
2. A. S. Vinițkii, P. I. Evdochimov, *Osobnosti perehodnih proțessov v rezonansnom konture pri manipuliații fazl kolebanii i pri manipuliații parametrov kontura*, Radiotekhnika, tom 14, nr. 7, 1959.
3. A. P. Molcianov, *Vozdeistvie na rezonansnii usiliteli napriajenia, ciastota i faza kotorogo skacikoobrazno izmeniautsia*, Radiotekhnika, tom 16, nr. 4, 1961.
4. J. M. Ivison, *The Transient Response of Linear Passive Networks to Phase-Modulated Signals*, Electronic Engineering, Febr., 1962.
5. M. Săvescu, *O metodă de calcul al răspunsului rețelelor liniare la semnale modulate în frecvență*, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București, ianuarie-martie, 1959.
6. M. Săvescu, *Determinarea răspunsului rețelelor electrice liniare la semnale modulate în frecvență sau în fază cu impulsuri*, Telecomunicații, nr. 5, 1963.
7. M. Săvescu, *Determinarea răspunsului circuitelor electrice la semnale modulate cu oscilații discontinue*, Telecomunicații, nr. 9, 1971.
8. M. Săvescu, *Distorsiunile introduse de rețelele electrice în cazul oscilațiilor modulate în frecvență*, Lucrare de doctorat, Biblioteca Institutului Politehnic București, 1958.

9. *Ec. Vlădescu*, Răspunsul circuitelor la oscilații MF și MP modulate în impulsuri, Referat de doctorat, martie 1975.
10. *M. Săvescu*, Circuite electrice liniare, EDP, 1968.
11. *I. Teumin*, Îndreptar privind regimurile electrice tranzitorie, Editura Tehnică, București, 1956.

Computing Response of the Electrical Circuits by Signals with Phase-Shift-Keying Modulation

In the paper it is presented a method for computing response of linear electrical circuits by signals with frequency — or phase — shift — keying modulation applied at input; it is considered that the modulating oscillation is made up from a step train applied at arbitrary moments in time, eventually aleatory. The relations obtained are interesting and useful specially for explicit representing of the phase response, expression.

AUTOMATICĂ

C.Z.: 621.312.2—8

IDENTIFICAREA EXPERIMENTALĂ A SISTEMULUI DE REGLARE A TENSIUNII UNUI GRUP GENERATOR DE MARE PUTERE*

M. TERTIȘCO, G. IONESCU

Această lucrare reprezintă o parte dintr-un program de cercetări privind identificarea experimentală a sistemelor energetice. Scopul lucrării este acela de a prezenta rezultatele obținute în determinarea funcțiilor de transfer ale excitației generatorului și buclei de reglare a tensiunii.

1. Introducere

Lucrarea face parte dintr-un program de cercetări în vederea stabilirii unor modele matematice cât mai fidele, care să reflecte comportarea reală a sistemului energetic în diverse regimuri dinamice.

În felul acesta pe baza studiilor efectuate cu ajutorul calculatoarelor a multitudinii de situații critice ce pot apărea în sistem, se pot elabora măsuri care să conducă la evitarea funcționării sistemului energetic în regimuri critice, eliminarea stărilor anormale, a avariilor și extinderii acestora. Datorită interconectării grupurilor energetice într-un sistem unic, funcționarea corectă a sistemului automat de reglaje a excitației are implicații nu numai asupra regimului grupului energetic ci și asupra funcționării în ansamblu a sistemului energetic.

Complexitatea problematicei impuse de influența reglajului automat al excitației asupra generatorului, reclamă studiarea dinamicii procesului de reglare în contextul diverselor regimuri de funcționare, care determină totodată modul de apreciere al stabilității sistemului energetic referitor la nodul respectiv. Se subliniază ca aspect principal al tematicii lucrării, determinarea cu exactitate a caracteristicilor obiectului reglat, adică a generatorului sincron debitând în nodul considerat. Dacă se consideră ipotetic schema electrică a transportului, corespunzătoare celei din figura 1 atunci, din punct de vedere structural, rezultă sistemul multivariabil (corespunzător procesului de excitație) prezentat în figura 2 și 3.

Din punct de vedere al reglajului excitației este esențial de caracterizat tranziția parțială excitație/tensiune, mai exact implicația $e_q \rightarrow u$

* Manuscris predat redacției la data de 10 februarie 1977.

unde e_q este t.e.m. în unități relative. Se obțin atunci în regim staționar ecuațiile mașinii,

$$a) \quad u_d = x_q \cdot i_q \quad u_q = -x_d i_d + e_q \quad (1)$$

și ecuațiile transportului,

$$b) \quad u_d = v_d - x \cdot i_q \quad u_q = v_q + x \cdot i_d \quad (2)$$

unde :

x — este reactanța echivalentă de legătură

$u = \sqrt{u_d^2 + u_q^2}$ — tensiunea la borne

$v = \sqrt{v_d^2 + v_q^2}$ — tensiunea barei

Ipotezele care se fac sînt :

1) $v = ct.$ → $dv = 0$ — tensiunea este constantă

2) $p = ct.$ → $dp = 0$ — variație nulă a puterii active deitate.

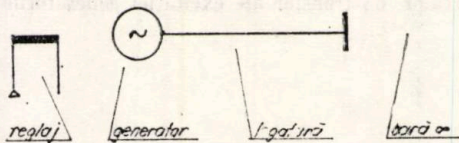


Fig. 1

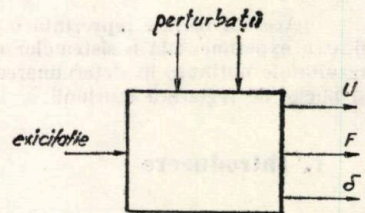


Fig. 2

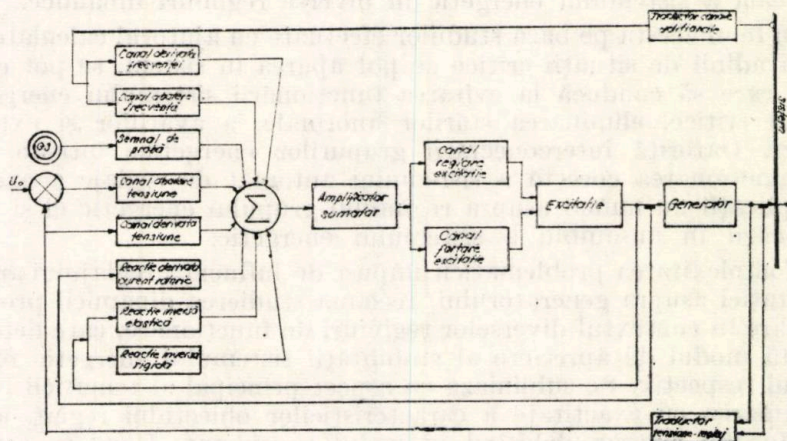


Fig. 3

Factorul de amplificare al obiectului, din punct de vedere al regulatorului de excitație este :

$$K = \left. \frac{du}{de_q} \right|_{v=ct, p=ct, z=ct} \quad (3)$$

Un calcul de detaliu, pe baza relațiilor a), b) și (1)–(3) conduce la expresia :

$$K = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \left(\frac{x+x_d}{x_d} \dot{u}_q + \frac{x}{x_d} \right) \left[\frac{x}{x_d} \left(+ \frac{\dot{e}_q}{x_d} + \frac{x_d-x_q}{x_d x_q} \dot{u}_2 \right) \dot{u}_q - \left(\frac{x+x_d}{x_d^2} + \frac{x(x_d-x_q)}{x_d^2 x_q} \right) \dot{u}_d^2 \right] + \frac{x+x_q}{x_d x_q} \dot{u}_d^2 \dot{u}_q \quad (4)$$

$$- \frac{x+x}{x_d} \left(\frac{\dot{e}_q}{x_d} + \frac{x_d-x_q}{x_d x_q} \dot{u}_q \right) \left(\frac{x+x_d}{x_d} \dot{u}_q - \frac{x}{x_q} \dot{e}_q \right) - \frac{x_d-x_q}{x_d x_q} \left(\frac{x+x_q}{x_d} \right)^2 \dot{u}_d^2$$

unde cu indicele superior (0) s-au reprezentat mărimile (în unități relative) de regim. Așa dar :

$$K = f(\dot{e}_q, \dot{u}_d, \dot{u}_q, x) \quad (5)$$

2. Metoda de identificare

Pentru identificare s-a utilizat o metodă activă folosind ca semnal de probă semnalul sinusoidal.

Datorită valorii medii nule, semnalul sinusoidal poate fi utilizat și cu generatorul în funcționare normală, prin suprapunerea lui peste mărimile curente de la intrarea regulatorului.

Trebuie însă observat că pentru a putea folosi direct răspunsul la semnale sinusoidale de frecvență variabilă este necesar să fie asigurată condiția că în afara semnalului de testare să nu mai acționeze alte mărimi perturbatoare. Dacă respectarea acestei restricții este simplă pentru experimentările cu generatorul în gol și cu reacția principală întreruptă, problema se complică la funcționarea cu generatorul cuplat la sistem și cu circuitul de reacție închis, în acest caz impunându-se menținerea constantă a regimului de încărcare al generatorului pe toată durata probei.

În figura 4 este reprezentată schema cu aparatura de testare și înregistrare utilizată la identificarea cu semnale sinusoidale a ansamblului regulator automat de tensiune, sistem de excitație, generator.

În cazul în care nu există mărimi perturbatoare, sau ele sînt de așa natură încît pot să fie filtrate de filtrele F , caracteristica amplitudine — pulsație $H(\omega_k)$ poate fi ridicată direct din citirea sincronă a amplitudinilor semnalului de testare $x(t) = A \sin \omega_k t$ și mărimii de ieșire $X_e(t) = X_e(\omega_k) \sin [\omega_k t + \varphi(\omega_k)]$ înregistrate de către oscilograf pentru diverse valori ω_k :

$$H(\omega_k) = \frac{X_e(\omega_k)}{A}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Caracteristica fază-pulsație $\varphi(\omega_k)$ rezultă din citirea defazajului între cele două curbe înregistrate.

Atunci cînd se constată existența unor mărimi perturbatoare ce nu pot fi rejectate prin filtrare, pentru deducerea caracteristicilor de frecvență se recurge la utilizarea unor procedee de prelucrare a datelor prin corelații care se pot aplica relativ simplu întrucît implică efectuarea de operații de corelație polară.

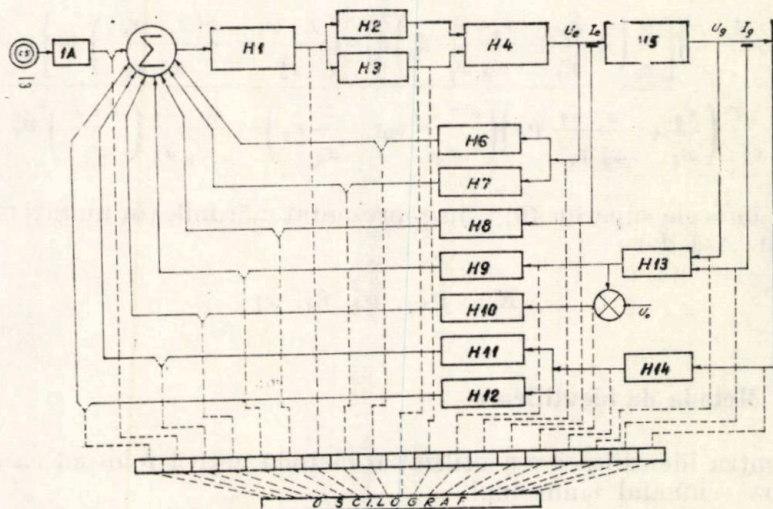


Fig. 4

Prin definiție funcția de corelație polară a două semnale $x_1(t)$ și $x_2(t)$ este de forma :

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{sign } x_1(t) \cdot \text{sign } x_2(t + \tau) dt \quad (7)$$

Dacă unul dintre semnale se ia ca atare, iar pentru celălalt se introduce numai semnul, rezultă funcția de corelație semipolară.

$$\hat{R}_{x_1 x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) \text{sign } x_1(t + \tau) dt \quad (8)$$

Echivalind semnalul de probă cu $x_1(t)$ și cel măsurat la ieșire, care include și componenta perturbatoare, cu $x_2(t)$ se poate scrie :

$$x_1(t) = x(t) = A \sin \omega t \quad (9)$$

$$x_2(t) = x_c(t) = X_e \sin(\omega t + \varphi) + x_n(t) \quad (10)$$

Avind în vedere variația sinusoidală a semnalului $x(t)$, funcția sign $x(t)$ va fi de forma unei unde periodice rectangulare din care, prin descompunere în serie Fourier se obține :

— pentru $\tau = 0$

$$\text{Sign } x_1(t + \tau) = \text{sign}[A \sin \omega t] = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\omega t}{2k+1} \quad (11)$$

— pentru $\tau = 2\pi/\omega$

$$\text{Sign } x_1(t + \tau) = \text{sign}[A \cos \omega t] = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)\omega t}{2k+1} \quad (12)$$

Perturbația nefiind corelată cu semnalul de probă și ținând seama de relațiile precedente introduse corespunzător în expresia funcției de corelație polară rezultă :

$$\begin{aligned} \dot{R}_{xx}(0) &\cong \frac{1}{T} \int_0^T X_e \sin(\omega t + \varphi) \text{Sign}[A \sin \omega t] dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{AX_e}{2} \cos \varphi = \frac{2A^2}{\pi} R_e[H(j\omega)] \end{aligned} \quad (13)$$

și

$$\begin{aligned} \hat{R}_{xx}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) &\cong \frac{1}{T} \int_0^T X_e \sin(\omega t + \varphi) \text{sign}[A \cos \omega t] dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{AX_e}{2} \sin \varphi = \frac{2A^2}{\pi} I_m[H(j\omega)] \end{aligned} \quad (14)$$

Se observă ușor că pentru diverse pulsații ω_k , funcțiile de corelație semipolare de mai sus dau direct caracteristicile de frecvență în coordonate carteziene. Semnalele fiind periodice timpul de mediere T se ia evident, egal cu perioada corespunzătoare frecvenței la care se face testarea (fig. 5).

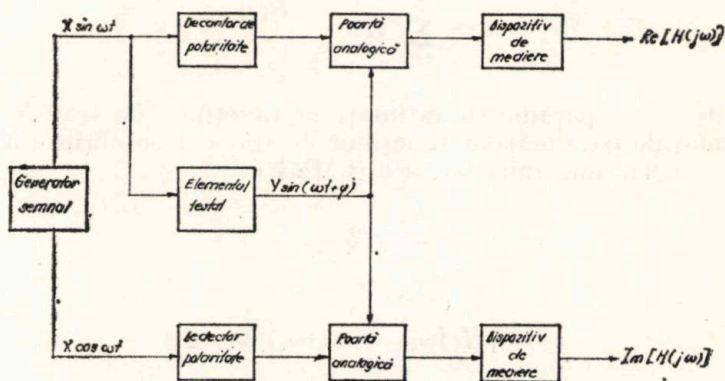


Fig. 5

Una dintre problemele puse de metoda de testare cu semnale sinusoidale a constituit-o necesitatea aplicării de semnale de frecvențe foarte joase (spectru de frecvențe cuprins între 10^{-3} și 10^2 Hz). Generarea de semnale cu frecvențe ultrajoase, cu undă sinusoidală nedistorsionată, cu posibilitatea de variație continuă a frecvenței și cu putere suficientă pentru a acționa asupra regulatorului de tip amplificator magnetic, alături de durată lungă a probelor și de asigurarea în aceste intervale a unor regimuri convenabile de funcționare pentru generator, au constituit principalele dificultăți întâmpinate pe parcursul experimentărilor.

3. Prelucrarea datelor experimentale

În cazul utilizării semnalelor de probă sinusoidale, informația obținută privind comportarea dinamică a elementelor sistemului identificat constă în valorile amplitudinilor semnalelor de intrare $A(\omega_k)$, de ieșire $A_e(\omega_k)$ și defazajului $\varphi(\omega_k)$ dintre semnale, pentru diverse pulsații ω_k de testare. Pe baza datelor experimentale s-au determinat pentru elementele sistemului caracteristicile de frecvență :

$$\begin{aligned} R_e[H(j\omega_k)] &= \frac{A_e(\omega_k)}{A(\omega_k)} \cos \varphi(\omega_k) = R_e(\omega_k) \\ I_m[H(j\omega_k)] &= \frac{A_e(\omega_k)}{A(\omega_k)} \sin \varphi(\omega_k) = I_m(\omega_k) \\ H(j\omega_k) &= R_e(\omega_k) + j I_m(\omega_k) \end{aligned} \quad (15)$$

în care ω_k — pulsațiile semnalului de probă ; $K = 1, 2, \dots, p$

Funcțiile de transfer ale elementelor sistemului au fost estimate prin funcții de forma suficient de generală :

$$\hat{H}(s) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m s^m}{1 + \sum_{n=0}^N b_n s^n} = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad s = j\omega \quad (16)$$

în care : a_m, b_n — parametrii estimați ai funcțiilor de transfer.

Estimațiile parametrilor funcțiilor de transfer se obțin din condiția de minim a celor mai mici pătrate (CMMP) :

$$E = \sum_{k=0}^p e_k^2 \quad (17)$$

$$e_k = |H(j\omega_k) - A(j\omega_k)/B(j\omega_k)| \quad (18)$$

în care $H(j\omega_k)$ sint valori măsurate ale caracteristicii de frecvență.

Acest criteriu prezintă dezavantajul că sistemul de ecuații normale, care rezultă din condiția de minim a CMMP,

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_m} = 0 & m = 0, 1, \dots, M \\ \frac{\partial E}{\partial b_n} = 0 & n = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (19)$$

este neliniar în raport cu coeficienții funcțiilor de transfer și ca atare dificil de rezolvat.

S-a încercat un criteriu al CMMP ponderat, de forma :

$$E = \sum_{k=0}^p |B(j\omega_k)|^2 \epsilon_k^2 = \sum_{k=0}^p |B(j\omega_k)H(j\omega_k) - A(j\omega_k)|^2 \quad (20)$$

Folosind următoarele notații :

$$R_e[B(j\omega_k)] = \sum_{n=0}^{n_1} (-1)^n b_{2n} \omega_k^{2n}; b_0 = 1 \quad (21)$$

$$I_m[B(j\omega_k)] = \sum_{n=0}^{n_2} (-1)^n b_{2n+1} \omega_k^{2n+1} \quad (22)$$

$$R_e[A(j\omega_k)] = \sum_{n=0}^{n_3} (-1)^n a_{2n} \omega_k^{2n} \quad (23)$$

$$I_m[A(j\omega_k)] = \sum_{n=0}^{n_4} (-1)^n a_{2n+1} \omega_k^{2n+1} \quad (24)$$

în care :

$$n_1 = \begin{cases} M/2 & \text{— pentru } M \text{ — par} \\ \frac{M-1}{2} & \text{— pentru } M \text{ — impar} \end{cases} \quad n_2 = \begin{cases} \frac{M}{2} - 1 & \text{— pentru } M \text{ — par} \\ \frac{M-1}{2} & \text{— pentru } M \text{ — impar} \end{cases}$$

$$n_3 = \begin{cases} N/2 & \text{— pentru } N \text{ — par} \\ \frac{N-1}{2} & \text{— pentru } N \text{ — impar} \end{cases} \quad n_4 = \begin{cases} \frac{N}{2} - 1 & \text{— pentru } N \text{ — par} \\ \frac{N-1}{2} & \text{— pentru } N \text{ — impar} \end{cases}$$

Se poate scrie criteriul (20) sub forma :

$$E = \sum_{k=0}^p |[R_e(\omega_k) + jI_m(\omega_k)][R_e[B(j\omega_k)] + jI_n[B(j\omega_k)]] - \\ - \{R_e[A(j\omega_k)] + jI_n[A(j\omega_k)]\}|^2 \quad (25)$$

În cazul acestui criteriu sistemul de ecuații normale (19) este liniar în raport cu coeficienții a_m și b_n ai funcției de transfer și poate fi scris în forma matricială :

$$V Y = W \quad (26)$$

în care Y este vectorul paarmetrilor funcției de transfer,

$$Y = [b_2 b_4 b_6 \dots b_{2n_1}; b_1 b_3 \dots b_{2n_2+1}; a_0 a_2 \dots a_{2n_3}; a_1 a_3 \dots a_{2n_4+1}]^T \quad (27)$$

iar V este matricea iar W este vectorul următoarelor mărimi măsurate

$$P_x = \sum_{k=0}^p \omega_k^x; \quad S_x = \sum_{k=0}^p R_e(\omega_k) \omega_k^x \quad (28)$$

$$T_x = \sum_{k=1}^p I_m(\omega_k) \omega_k^x; \quad U_x = \sum_{k=0}^n [R_e^2(\omega_k) + I_m^2(\omega_k)] \omega_k^x \quad (29)$$

Forma matricei V și vectorului W este :

$$V = \begin{bmatrix} \{(-1)^{i+1} U_{2(i+l)}\}_{li} & \{0\}_{li} & \{(-1)^i S_{2(i+l)}\}_{li} & \{(1)^i T_{2(i+l)+1}\}_{li} \\ i = 1, \dots, n_1 & i = 1, \dots, n_2 & i = 0, \dots, n_3 & i = 0, \dots, n_4 \\ l = 1, \dots, n_1 & l = 0, \dots, n_1 & l = 1, \dots, n_1 & l = 0, \dots, n_1 \\ \{0\}_{li} & \{(-1)^i U_{2(i+l)+1}\}_{li} & \{(-1)^i T_{2(i+l)+1}\}_{li} & \{(1)^{i+1} S_{2(i+l)+1}\}_{li} \\ i = 1, \dots, n_1 & i = 1, \dots, n_2 & i = 0, \dots, n_2 & i = 0, \dots, n_4 \\ l = 0, \dots, n_2 & l = 0, \dots, n_2 & l = 1, \dots, n_2 & l = 0, \dots, n_2 \\ \{(-1)^i S_{2(i+l)}\}_{li} & \{(-1)^i T_{2(i+l)+1}\}_{li} & \{(-1)^i P_{2(i+l)}\}_{li} & \{0\}_{li} \\ i = 1, \dots, n_1 & i = 1, \dots, n_2 & i = 0, \dots, n_3 & i = 0, \dots, n_4 \\ l = 0, \dots, n_3 & l = 0, \dots, n_3 & l = 0, \dots, n_3 & l = 0, \dots, n_3 \\ \{(-1)^{i+1} T_{2(i+l)+1}\}_{li} & \{(-1)^{i+1} S_{2(i+l)+1}\}_{li} & \{0\}_{li} & \{(-1)^i P_{2(i+l)+1}\}_{li} \\ i = 1, \dots, n_1 & i = 1, \dots, n_2 & i = 0, \dots, n_3 & i = 0, \dots, n_4 \\ l = 0, \dots, n_4 & l = 0, \dots, n_4 & l = 0, \dots, n_4 & l = 0, \dots, n_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$W = [U_2 U_4 \dots U_{2n_1} \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{n_2+1} S_0 S_2 \dots S_{2n_2} T_1 T_2 \dots T_{2n_4+1}] \quad (31)$$

în care Y este vectorul parametrilor funcției de transfer.

În cazul în care se cunoaște exact gradul funcției de transfer a procesului se poate aplica acest algoritm, sintetizat în ecuația (26). În caz contrar trebuie încercate diverse combinații posibile de valori M și N (folosind informația apriorică) și aleasă acea funcție de transfer pentru care criteriul (25) prezintă un minimum—minimum.

S-a constatat însă că folosind criteriul (25) eroarea nu este repartizată uniform pe spectrul de pulsații, explicația acestui neajuns fiind ponderea în funcție de frecvență a erorii, ceea ce determină o slabă precizie a metodei în domeniul frecvențelor joase.

Pentru a elimina acest neajuns s-a propus un alt mod de ponderare a erorii, care conduce la o metodă iterativă a celor mai mici pătrate. În acest caz criteriul de eroare ales este :

$$E = \sum_{k=0}^p \frac{|B(j\omega_k)|^2}{|B(j\omega_k)|^2} e_k^2 = \sum_{k=0}^p \left| B_i(j\omega_k) \frac{\hat{H}(j\omega_k)}{B_{i-1}(j\omega_k)} + \frac{A_i(j\omega_k)}{B_{i-1}(j\omega_k)} \right|^2 \quad (32)$$

în care i este numărul iterațiilor iar,

$$|B(j\omega_k)|_0 = 1 \quad \forall K \quad (33)$$

Este evident că prima iterație în acest ultim caz conduce la aceleași rezultate ca și estimarea folosind criteriul (20) continuând însă iterativ calculele criteriului (32) converge (după maximum 3—4 iterații) la criteriul (18) deoarece factorul de pondere din (32) tinde către unitate.

În cazul criteriului (32) algoritmul de calcul nu diferă mult de cel care rezultă din (20) deoarece în acest caz pentru calculul vectorului coeficienților la iterații i rezultă relația :

$$Y_i = V_i^{-1} W_i \quad (34)$$

în care V_i și W_i se obțin prin înlocuirea în relațiile (28—30) a valorilor ω_k^x cu valorile ponderate $\omega_{ki}^x = \omega_k^x / |B(j\omega_k)|_{i-1}^2$.

Pentru calculul coeficienților funcției de transfer pe baza criteriului (32) se rezolvă sistemul (34) folosind subrutina IDENTIF, descrisă amănunțit în [1]. În figura 6 este prezentată organigrama de principiu a programului principal de prelucrare a datelor experimentale, în care este încadrată subrutina IDENTIF.

Această subrutină este rulată în cadrul programului principal pentru diverse grade $M = I_A$ și $N = I_B$ ale

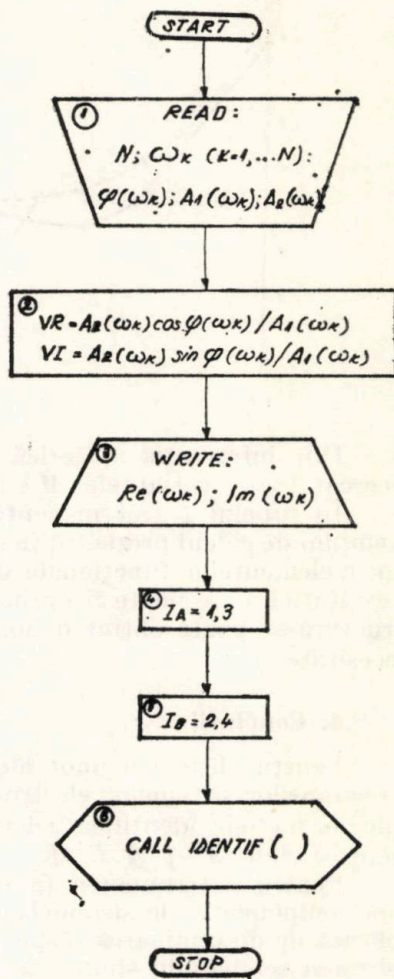


Fig. 6

numărătorului și numitorului funcției de transfer, alegînd în final alți coeficienți și aceea structură a funcției de transfer care asigură minimum — minimorum al criteriului (32).

Pentru exemplificare, în figura 7 este prezentat hodograful procesului și cel corespunzător funcției de transfer (al modelului) estimată prin metoda descrisă. Hodograful determinat experimental este distorsionat de zgomotele industriale existente și erorile de măsurare.

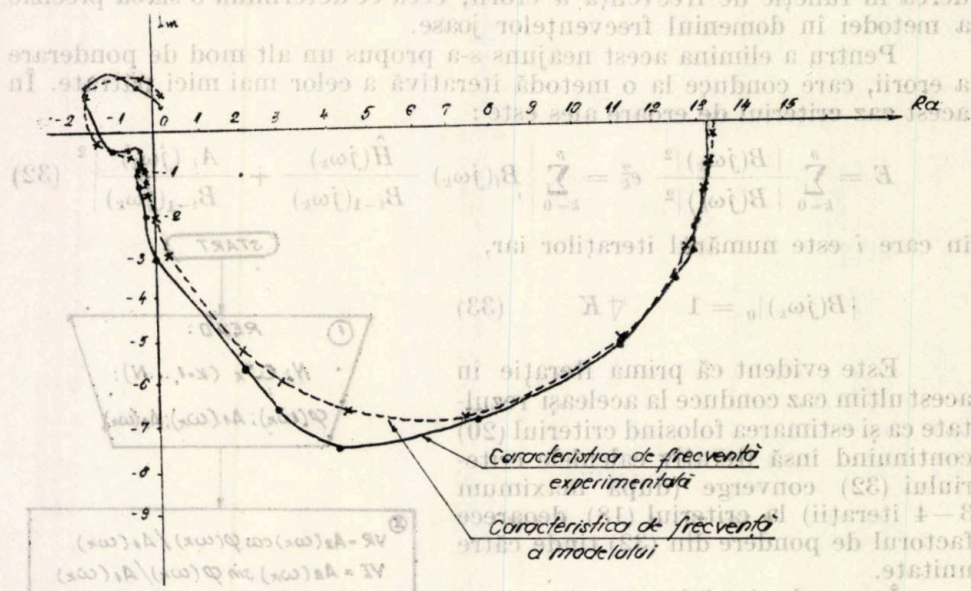


Fig. 7

Din informația apriorică se cunoaște ca $M < 2$ și $N < 3$. S-au încercat toate variantele $M \in (1, 2)$ și $N \in (2, 3)$.

În tabelul 1 sînt prezentate funcțiile de transfer obținute pentru exemplul de calcul prezentat în figura 1. Se obține în felul acesta o schemă bloc a elementelor funcționale de bază a sistemului automat de reglare a excitației, care poate fi optimizat sau acordat (fig. 3). Tot din această structură se poate obține o funcție de transfer echivalentă, redusă după necesitate.

4. Concluzii

Pentru obținerea unor modele matematice de calcul cât mai fidele a regimurilor sistemelor electroenergetice, în lucrare se adoptă ca metodologie, metoda identificării bazată pe determinarea experimentală a caracteristicilor $A-f$ și $E-f$.

Pentru determinarea funcțiilor de transfer a elementelor funcționale componente ale sistemelor automate de reglaj a excitației, metoda aplicată de determinarea răspunsului în regim sinusoidal permanent, prin aplicarea semnalului sinusoidal peste regimul normal, s-a dovedit foarte avantajoasă din punctul de vedere al preciziei.

Tabel 1

Funcțiile de transfer ale elementelor și sistemului identificat

Simbol	Funcția de transfer U.M.	Funcțiunea în sistem a elementului
H_1	$\frac{81,3}{(1+0,0335)s}$ $\frac{V}{mA}$	Amplificator magnetic, sumator Σ și filtrare
H_2	$\frac{1}{V}$ $\frac{V}{V}$	Circuit de filtrare pentru canalul de reglare a excitației
H_3	$\frac{1,6}{(1+0,573)s}$ $\frac{V}{V}$	Circuit de filtrare, pentru canalul de forțare a excitației
H_4	$\frac{54,5}{(1+0,22)s}$ $\frac{V}{V}$	Excitația statică a generatorului pe canalul de reglare
H_5	$\frac{1,37}{(1+2s)}$ $\frac{V}{V}$	Generatorul în sarcină
H_6	$\frac{0,001 s}{(1+0,006 s)}$ $\frac{mA}{V}$	Circuit de reacție elastică (după derivata tensiunii de excitație U_{ex})
H_7	$0,0014$ $\frac{mA}{V}$	Circuit de reacție rigidă (după tensiunea de excitație U_{ex})
H_8	$\frac{0,02 s}{(1+0,03s)(1+2s)}$ $\frac{mA}{V}$	Circuit de reacție elastică (după derivata curentului rotorici)
H_9	$\frac{0,007 s}{(1+0,034 s)}$ $\frac{mA}{V}$	Circuit de reacție (după derivata tensiunii generatorului)
H_{10}	$\frac{1,025}{(1+0,338 s)}$ $\frac{mA}{V}$	Circuit de reacție principală (după abaterea tensiunii generatorului)
H_{11}	$\frac{0,064 s}{(1+0,08s)}$ $\frac{mA}{V}$	Circuit pentru derivata frecvenței U_f'
H_{12}	$\frac{0,018}{(1+s)}$ $\frac{mA}{V}$	Circuit pentru abaterea frecvenței ΔU_f
H_{13}	$155,5$ V/V	Transformatorul de măsură al tensiunii U
	1600 A/A	Transformatorul de măsură al curentului I
H_{14}	$\frac{0,95}{(1+0,2 s)}$ $\frac{V}{V}$	Traductor canale adiționale
I_A	1 $\frac{mA}{V}$	Intrare auxiliară în amplificatorul magnetic sumator pentru aplicarea semnalului de probă

Aplicarea metodei a scos în evidență și unele dezavantaje cum ar fi :

- durata mare a experimentărilor pentru determinarea caracteristicilor $A-f$, $E-f$;

- dificultatea menținerii regimului staționar sinusoidal în sistem pe durată mare;

- necesitatea unui volum mare de calcule pentru prelucrare;

- dificultatea generării semnalelor sinusoidale de putere mărită

Pentru reducerea dificultăților enumerate mai sus, există mai multe căi și anume :

- utilizarea unei aparaturi specializate (transferometre) care să permită obținerea directă a caracteristicilor de frecvență inclusiv eliminarea perturbațiilor, ceea ce reduce volumul de calcul;

- utilizarea unor semnale multifrecvențiale reducându-se durata experimentării, etc ;

Metodologia elaborată și rezultatele obținute, confirmă necesitatea dezvoltării preocupărilor privind determinarea parametrilor și caracteristicilor sistemelor automate de reglaj a excitației pe baza unor metode experimentale de identificare.

Catedra de automatică I și II

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”

București

BIBLIOGRAFIE

1. M. Terțișco, P. Stoica — Determinarea funcției de transfer din caracteristica de frecvență A V-a sesiune IPA—ICI 1974.
2. C. Penescu, G. Ionescu, M. Terțișco, E. Ceangă — Identificarea experimentală a proceselor automatizate. Ed. Tehnică 1971.

Experimental Identification of the Voltage Control System for a High Power Generator.

This paper is a part of a research program concerning the experimental identification of power systems. It is aimed to present the results obtained by the authors as a consequence of their experimental-oriented investigations in order to determine the transfer functions of a generator excitation and voltage control loop.

C.Z.: 517.5/9 681.3.04/06

SENSITIVITY FUNCTION GENERATION FOR NONLINEAR SYSTEMS WITH JUMP DISCONTINUITIES*

ION RUSS

1. Introducere

The paper extends the computational techniques for sensitivity functions available in the literature for a class of nonlinear systems. The method is used in parametric identification via the Newton-Gauss algorithm. A simple example, which proves the efficiency of the proposed method is presented.

For nonlinear systems, one well-known method for system parameter identification is the quasilinearization method (1), (2). Medler and Hsu (3) have presented an algorithm for system parameter identification which they call the sensitivity algorithm. This method is applicable to linear and nonlinear systems with known structures in which the measurement noises can be neglected. A shaft position control system is presented as an example and the results show that the sensitivity algorithm requires less time per iteration and less computer storage than the quasilinearization method.

However, the sensitivity algorithm has its own limitations. Let the system be described by :

$$\dot{x} = f(x, t, q); x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

where f is a vector-valued function and q is the unknown parameter vector. The algorithm requires that the components of f , f_i , $i = 1, \dots, n$, are continuous, piecewise continuously differentiable with respect to x and continuously differentiable with respect to q .

In this paper an attempt is made to extend this algorithm to a class of nonlinear systems. Let the system be described by (1), but f may have a finite number of jump discontinuities. The attention will be focused upon the procedure of computing the sensitivity functions since, in this case, the methods used in (3) and (4) and based upon the sensitivity equations cannot be employed.

2. The Sensitivity Functions

Let the system be described by eq. (1) which we will rewrite here for convenience :

$$\dot{x} = f(x, t, q); x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

* Manuscript received February 18/1977.

where x is the n -dimensional state vector, q is the m -dimensional parameter vector and f is a n -vector-valued nonlinear function having the components :

$$f_i = f_{ic}(x, t, q) + \sum_{v=1}^{k_i} g_{iv}(x, t, q) \cdot 1(Z_{iv}(x, t, q)); \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

where $k_i \geq 0$, $1(w)$ is a unit step function, f_{ic} , g_{iv} and Z_{iv} are scalar-valued functions continuously differentiable with respect to x , t , q . Assume that the system (1) has a unique solution $x = x(t, q)$ with the components :

$$x_i(t, q) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^t \left[f_{ic}(x(\tau, q), \tau, q) + \sum_{v=1}^{k_i} g_{iv}(x(\tau, q), \tau, q) \cdot 1(Z_{iv}(x(\tau, q), \tau, q)) \right] d\tau; \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

The sensitivity functions are :

$$u_{ij}(t, q) = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \int_{t_0}^t \left(\nabla_x f_{ic} u_j + \frac{\partial f_{ic}}{\partial q_j} \right) d\tau + \sum_{v=1}^{k_i} \frac{\partial}{\partial q_j} \int_{t_0}^t g_{iv} \cdot 1(Z(x, \tau, q)) d\tau; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \quad (4)$$

It will be proved that, along the solution $x(t, q)$, the sensitivity functions are given by :

$$u_{ij}(t, q) = \int_{t_0}^t \left[\nabla_x f_{ic} u_j + \frac{\partial f_{ic}}{\partial q_j} + \sum_{v=1}^{k_i} \left(\nabla_x g_{iv} u_j + \frac{\partial g_{iv}}{\partial q_j} \right) \cdot 1(Z_{iv}(\tau, q)) \right] d\tau + \sum_{v=1}^{k_i} \sum_{k=1}^{N_{iv}} \frac{1}{|\dot{Z}_{iv}(\tau_k^{iv}, q)|} \cdot \frac{dZ_{iv}(\tau_k^{iv}, q)}{dq_j} \cdot g_{iv}(\tau_k^{iv}, q) \cdot 1(t - \tau_k^{iv}) \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, m$$

where τ_k^{iv} , for $k = 1, 2, \dots, N_{iv}$ ($\tau_k^{iv} < \tau_{k+1}^{iv}$) are the switching moments, i.e. the moments where $Z_{iv} = 0$. We further assume that N_{iv} is finite for a finite t , and, for every q and τ_k^{iv} , there is a neighbourhood of τ_k^{iv} into which $\dot{Z}_{iv}(t, q)$ is continuous with respect to t and $\dot{Z}_{iv}(\tau_k^{iv}, q) \neq 0$

Let denote a term from the last sum of eq (1) by:

$$I_{iv}^j(t) = \frac{\partial}{\partial q_j} \int_{t_0}^t g_{iv} \cdot 1(Z_{iv}) d\tau \quad (6)$$

We choose a scalar ε such that:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{3} \min_{v,k} |\tau_{k+1}^{iv} - \tau_k^{iv}| \quad (7)$$

For every $t \in (\tau_N^{iv} + \varepsilon, \tau_{N+1}^{iv} - \varepsilon)$ where N is a positive integer, and $N < N_{iv}$:

$$I_{iv}^j = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\int_{t_0}^{\tau_1^{iv}-\varepsilon} g_{iv} \cdot 1(Z_{iv}) d\tau + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\tau_k^{iv}+\varepsilon}^{\tau_{k+1}^{iv}-\varepsilon} g_{iv} \cdot 1(Z_{iv}) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{\tau_N^{iv}+\varepsilon}^t g_{iv} \cdot 1(Z_{iv}) d\tau + \sum_{k=1}^N \int_{\tau_k^{iv}-\varepsilon}^{\tau_k^{iv}+\varepsilon} g_{iv} \cdot 1(Z_{iv}) d\tau \right] \quad (8)$$

In eq. (8) Z_{iv} has a constant sign over all the integration intervals but those in the last sum. Hence, the integrant is continuous over these intervals and can be differentiate with respect to q_j . By letting $\varepsilon \rightarrow 0$, eq. (8) becomes:

$$I_{iv}^j = \int_{t_0}^t \left(\nabla_{\tau} g_{iv} u_j + \frac{\partial q_{iv}}{\partial q_j} \cdot 1(Z_{iv}) \right) d\tau + \sum_{k=1}^N \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (J_{kj}^{iv}) \quad (9)$$

where

$$J_{kj}^{iv} = \frac{\partial}{\partial q_j} \int_{\tau_k^{iv}-\varepsilon}^{\tau_k^{iv}+\varepsilon} g_{iv} \cdot 1(Z_{iv}) d\tau \quad (10)$$

For sake of simplicity J_{kj}^{iv} will be denoted by J_j , the limits in (9) will be evaluated at the switching moment s (which replaces τ_k^{iv}) and we will drop the subscripts i, v, k .

Let define a vector Δ_j with the j th - component $\Delta q \neq 0$ all other components being 0. Assume that s will change from s to $s + \Delta s$ when q changes to $q + \Delta_j$. Since $x(t, q)$ and $Z(t, q)$ are continuous, if Δq is made small enough, then Δs will satisfy:

$$-\varepsilon < \Delta s < \varepsilon \quad (11)$$

The relation between Δs and Δj can be found in the following way. At the switching moment s :

$$Z(x(s, q), s, q) \stackrel{\Delta}{=} Z(s, q) = 0 \quad (12)$$

The new switching moment $s + \Delta s$ must also satisfy (12) but with q replaced by $q + \Delta_j$. Hence, for Δs and Δ_j small enough, the change in Z is given by :

$$\Delta Z = 0 = \left(\nabla_x Z \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \Delta s + \left(\nabla_x Z \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q} \right) \Delta_j \quad (13)$$

In eq. (13) while the functions $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ and $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ may be discontinuous, the terms $\left(\nabla_x Z \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t} \right)$ and $\left(\nabla_x Z \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q} \right)$ are continuous at s . This is how this assertion can be explained. We have assumed that into a neighbourhood of s , $\dot{Z}$ is continuous. But :

$$\dot{Z} = \frac{dZ}{dt} = \nabla_x Z \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (14)$$

Hence $\left(\nabla_x Z \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t} \right)$ is continuous at s and i component of $\nabla_x Z$ must be 0 at s . Thus, $\nabla_x Z \frac{\partial x}{\partial q}$ is continuous at s , even if the i row of $\frac{\partial x}{\partial q}$ may contain elements which are discontinuous at s . It follows that :

$$\frac{dZ}{dq} = \nabla_x Z \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial q} \quad (15)$$

is also continuous at s .

In terms of (14) and (15), eq (13) can be written as follows :

$$\dot{Z} \Delta s + \frac{dZ}{dq} \Delta_j = 0 \quad (16)$$

Then :

$$\Delta s = - \frac{1}{\dot{Z}} \cdot \frac{dZ}{dq} \Delta_j = - \frac{1}{\dot{Z}} \cdot \frac{dZ}{dq} \Delta q \quad (17)$$

Let define a new symbol M_j , such that :

$$M_j \triangleq \frac{\dot{Z}}{\frac{dZ}{dq_j}} \quad (18)$$

Condition (11) implies :

$$-\varepsilon < -\frac{\Delta q}{M_j} < \varepsilon \quad (19)$$

If we consider, in (10), the partial derivative with respect to q_j as a limit, we get :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j = \lim_{\varepsilon, \Delta j \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta q} \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} [g(\tau, q + \Delta j) 1(Z(\tau, q + \Delta j)) - g(\tau, q) 1(Z(\tau, q))] d\tau \quad (20)$$

First consider the case $\dot{Z}(s, q) > 0$. Thus, in eq. (20) $1(Z(\tau, q)) = 0$ for $\tau < s$ and $1(Z(\tau, q + \Delta j)) = 0$ for $\tau < s + \Delta s$. Then :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j = \lim_{\varepsilon, \Delta q \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta q} \left[\int_{s+\Delta s}^{s+\varepsilon} g(\tau, q + \Delta j) d\tau - \int_s^{s+\varepsilon} g(\tau, q) d\tau \right] \quad (21)$$

Condition (11) will be satisfied if we take $s = -\frac{\varepsilon}{2}$, i.e. :

$$\Delta q = \frac{1}{2} M_j \cdot \varepsilon \quad (22)$$

Then :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon M_j} \left[\int_{s-\frac{\varepsilon}{2}}^{s+\frac{\varepsilon}{2}} g(\tau, q + \Delta j) d\tau - \int_s^{s+\varepsilon} g(\tau, q) d\tau \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon M_j} \left[g(s, q + \Delta j) \frac{3 \cdot \varepsilon}{2} - g(s, q) \varepsilon \right] \end{aligned} \quad (23)$$

The eq. (23) has been obtained by using the mean-value theorem. Since $\Delta q \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$, eq. (23) reduces to :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j = g(s, q) / M_j \quad (24)$$

Next, let consider the case $\dot{Z}(s, q) < 0$. In eq. (20), $1(Z(\tau, q)) = 0$ for $\tau < s$ and $1(Z(\tau, q + \Delta j)) = 0$ for $\tau < s + \Delta s$. Following the same path as before, we get :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j = -g(s, q) / M_j \quad (25)$$

Combining (18), (24) and (25) it follows :

$$(21) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j = \frac{1}{|\dot{Z}(s, q)|} \cdot \frac{dZ}{dq_j} \cdot g(s, q) \quad (26)$$

From (26), (9), (6) and (4) we obtain for $t \in (\tau_N^{iv}, \tau_{N+1}^{iv})$:

$$(22) \quad \begin{aligned} u_{ij} = & \int_{t_0}^t \left[\nabla_x f_{ic} u_j + \frac{\partial f_{ic}}{\partial q_j} + \sum_{v=1}^{k_i} \left(\nabla_x g_{iv} u_j + \frac{\partial g_{iv}}{\partial q_j} \right) 1(Z_{iv}) \right] d\tau + \\ & + \sum_{v=1}^{k_i} \sum_{k=1}^N \frac{1}{|\dot{Z}_{iv}|} \cdot \frac{dZ_{iv}}{dq_j} \cdot g_{iv}(\tau_k^{iv}, q) \end{aligned} \quad (27)$$

which can be written for $t_0 \leq t \leq t_f$ as in (5).

From a computational viewpoint, eq. (5) can be partitioned in two parts : the first contains the integral term and the second is the sum of step functions. The latter can be interpreted as follows : every time $Z_{iv}(\tau_k^{iv}, q) = 0$, i.e. at every moment $t = \tau_k^{iv}$, $u_{ij}(t, q)$ has a jump discontinuity, the size of the jump being :

$$(23) \quad \begin{aligned} \Delta u_{ij}(\tau_k^{iv}) &= u_{ij}(\tau_k^{iv} + 0, q) - u_{ij}(\tau_k^{iv} - 0, q) = \\ &= \frac{1}{|\dot{Z}_{iv}(\tau_k^{iv}, q)|} \cdot \frac{dZ_{iv}(\tau_k^{iv}, q)}{dq_j} \cdot g_{iv}(\tau_k^{iv}, q) \end{aligned} \quad (28)$$

The integral term in (5) is the sensitivity equation between the moments when the jump occurs :

$$(24) \quad \begin{aligned} \dot{u}_{ij}(t) = & \nabla_x f_{ic} u_j(t) + \frac{\partial f_{ic}}{\partial q_j} + \sum_{v=1}^{k_i} \left(\nabla_x g_{iv} u_j(t) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial g_{iv}}{\partial q_j} \right) \cdot 1(Z_{iv}(t, q)); \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix} \end{aligned} \quad (29)$$

with the initial conditions $u_{ij}(\tau_k^{iv} + 0, q)$ given by (28).

(25) 3. An Identification Algorithm

(26) The algorithm is based upon the Gauss-Newton iteration method for minimizing the error measure :

$$(27) \quad I(g^k) = \sum_{j=1}^N \|y(t_j) - y^k(t_j)\|^2 \quad (30)$$

where $y^k(t)$ is the model output with the k -th trial parameter q^k , i.e. :

$$y^k(t) = h(x(t, q^k)) \quad (31)$$

and $y(t)$ is the system output :

$$y(t) = h(x(t, q)) \quad (32)$$

The parameter vector q^{k+1} for the $(i+1)$ -st iteration is given by :

$$q^{k+1} = q^k + \Delta q^k \quad (33)$$

where :

$$\Delta q^k = [c^k]^{-1} b^k \quad (34)$$

$$c^k = \sum_{j=1}^N [U^k(t_j)]^T [\nabla_x h(x^k(t_j))]^T [\nabla_x h(x^k(t_j))] [U^k(t_j)] \quad (35)$$

$$b^k = \sum_{j=1}^N [U^k(t_j)]^T [\nabla_x h(x^k(t_j))]^T [h(x(t_j)) - h(x^k(t_j))] \quad (36)$$

U^k is the $n \times m$ sensitivity matrix, whose elements, the sensitivity functions are computed either from the sensitivity equation :

$$\dot{u}_{ij}^k = \nabla_x f_i(x^k, q^k) u_{ij}^k + \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(x^k, q^k) \quad (37)$$

$$u_{ij}^k(t_0) = 0 ; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

if f_i are continuous, or from the eq. (28) and (29) if f_i has jump discontinuities.

4. An Example

Let be the system presented in fig. 1 and described by the following state equations.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -q_2 x_2 + q_3 - 2 q_3 1(Z_{21}) - q_1 + q_1 [1(Z_{22}) + 1(Z_{23})]$$

$$y(t) = x_1(t)$$

where: $q_1 = \frac{T_m}{I}$; $q_2 = \frac{B}{I}$; $q_3 = \frac{T_f}{I}$; $q_4 = \varepsilon$.

$$Z_{21} = x_2$$

$$Z_{22} = \alpha (\dot{r} - x_2) + (r - x_1) + q_4$$

$$Z_{23} = \alpha (\dot{r} - x_2) + (r - x_1) - q_4$$

The input is given by:

$$r = \sin \omega t$$

The nominal values of system parameters are:

$$q_1 = 5; q_2 = 5; q_3 = 1; q_4 = 0.4$$

The sensitivity equations between the jump moments are:

$$\dot{u}_{1j} = u_{2j}; j = 1, \dots, 4$$

$$\dot{u}_{21} = -q_2 u_{21} - 1 + 1(Z_{22}) + 1(Z_{23})$$

$$\dot{u}_{22} = -q_2 u_{22} - x_2$$

$$\dot{u}_{23} = -q_2 u_{23} + 1 - 2 \times 1(Z_{21})$$

$$\dot{u}_{24} = -q_2 u_{24}$$

The jump of the sensitivity functions can be computed from:

$$\Delta u_{2j} = -2q_3 \frac{u_{2j}(\tau)}{|\dot{x}_2(\tau)|}; j = 1, \dots, 4; \text{ if } Z_{21}(\tau, q) = 0$$

$$\Delta u_{2j} = -q_1 \frac{\alpha u_{2j}(\tau) + u_{1j}(\tau)}{|\alpha(\ddot{r} - x_2) + \dot{r} - x_2|_\tau}; j = 1, \dots, 3, \text{ if } Z_{22}(\tau, q) = 0 \\ \text{or } Z_{23}(\tau, q) = 0$$

$$\Delta u_{24} = -q_1 \frac{\alpha u_{24}(\tau) + u_{14}(\tau) - 1}{|\alpha(\ddot{r} - x_2) + \dot{r} - x_2|_\tau} \quad \text{if } Z_{22}(\tau, q) = 0$$

$$\Delta u_{24} = -q_1 \frac{\alpha u_{24}(\tau) + u_{14}(\tau) + 1}{|\alpha(\ddot{r} - x_2) + \dot{r} - x_2|_\tau} \quad \text{if } Z_{23}(\tau, q) = 0$$

The results of identification using $\omega = 2\pi$ for the input signal and $\alpha = 0.5$ for the controller transfer function are presented in Table 1. In Table 2 the same identification has been performed but with different

Table 1

Initial Parameter Value	Number of Iterations	Parameter Estimation Error %			
		q_1	q_2	q_3	q_4
$q^o = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 6.0 \\ 2.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	6	0	0	0	-4.2
$q^o = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 7.5 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}$	8	0	0	0	-7.8

Table 2

Initial Parameter Value	Number of literation	Parameter Estimation Error %			
		q_1	q_2	q_3	q_4
$q^o = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 6.0 \\ 2.0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	4	0	0	0	0.5
$q^o = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 7.5 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}$	11	0	0	0	-1.0

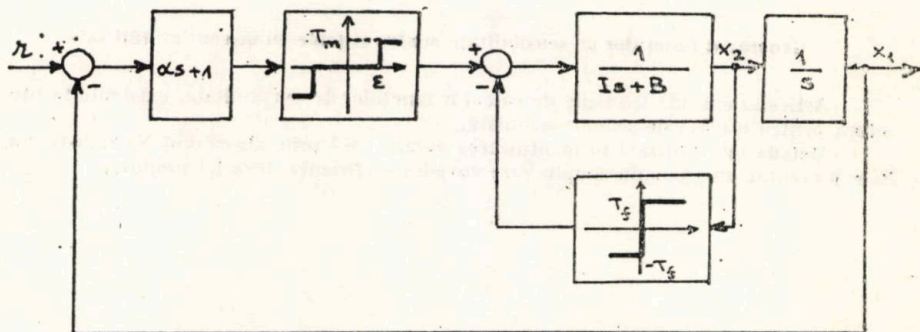


Fig. 1

values for ω and α , namely $\omega = \pi$ and $\alpha = 0.25$. In both cases two different sets of initial parameter values has been used.

It can be seen from the above results that the algorithm works for this example. The largest error is the dead-zone estimation error which, for the first case, ranges between 4.2 % and 7.8 %. Thereafter, by a slight modification of the system input signal this error can be reduced as far as 1 %.

5. Conclusions

The proposed method for computing the sensitivity functions permits to extend the sensitivity identification algorithm to nonlinear systems with jump discontinuities. This procedure can be used for solving other problems as well, such that the sensitivity analysis of time — optimal systems, whose control does have such discontinuities.

Control System Department
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu Dej“
Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. Bellman, Kalata — Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems—New York: Elsevier, 1965.
2. Lee E.S. — Quasilinearization and Invariant Imbedding — New York: Academic Press, 1968.
3. Medler, Hsu — An Algorithm for Nonlinear System Parameter Identification—IEEE, vol. AC-14, no. 6, pp. 726—728, 1969.
4. Kokotovic, Rutman — Sensitivity Matrices and Their Modelling—Automation and Remote Control, vol. 27, p. 1067, June, 1966.
5. Wilkie D. F. Perkins W. R. — Generation of Sensitivity Functions for Linear Systems Using Low-order Models—IEEE, vol. AC-14, no. 2, pp. 123—130, 1969.
6. Denery D.G. — Simplification of the Computation of the Sensitivity Functions for Constant Coefficient Linear Systems—IEEE, vol. AC-16, no. 4, pp. 348—350, 1971.
7. Neumann C.P. Sood A.K. — Sensitivity Functions for Multi-input Linear Time, invariant Systems—Int. Journal of Control, vol. 13, no. 6, pp. 1137—1150, 1971.

Generarea funcțiilor de sensibilitate pentru sisteme cu discontinuități salt.

Articolul extinde tehnicile de calcul a funcțiilor de sensibilitate, existente în literatură pentru o clasă de sisteme neliniare.

Metoda este utilizată în identificarea parametrică prin algoritmul Newton-Gauss. Este prezentat un exemplu simplu care dovedește eficiența metodei propuse.

C.Z.: 621.315.24

PROTECȚIA LINIILOR ELECTRICE AERIE NE IMPOTRIVA TRĂSNETULUI. MODELUL ELECTROGEOMETRIC

D. CRISTESCU, P. POSTOLACHE

În lucrare se analizează principiile de bază ale calculului protecției liniilor electrice aeriene contra descărcărilor prin trăsnet folosind „modelul electrogeometric” pentru determinarea zonelor active ale conductoarelor de protecție.

Se aplică metoda discutată pentru câteva tipuri de stâlpi de înaltă tensiune folosiți în România în vederea determinării eficacității mijloacelor de protecție utilizate.

1. Introducere

Modelul electrogeometric al unei linii electrice aeriene permite să se calculeze, în funcție de dimensiunile stîlpului, unghiul de protecție pe care trebuie să-l asigure un conductor de protecție, pentru ca eficacitatea lui față de trăsnet să fie optimă. Noțiunea de „optim” este întrebuițată aici în sensul că nu este necesar ca toate loviturile de trăsnet să fie captate de conductorul de protecție, ci numai acelea care căzînd în conductoarele active ar provoca declanșarea liniei electrice.

Modelul a fost elaborat în principal de Armstrong, R. H., Brown, G. W., și Whitehead, E. R. [1], [3], [4] și a fost etalonat și verificat cu ajutorul datelor obținute în mai multe campanii experimentale. Detectorul, de construcție specială, cunoscut sub denumirea de „Pathfinder”, este un aparat care se instalează pe stîlpii liniilor electrice și permite să se stabilească dacă lovitura de trăsnet a avut loc în stîlp, în conductorul de protecție sau în conductorul activ și să se determine dacă declanșarea liniei se produce în urma unei conturnări inverse sau a unei lovituri directe în conductorul activ [3]. Rezultatele experimentale au dovedit valabilitatea modelului electrogeometric și au dat posibilitatea perfecționării lui.

În cele ce urmează se prezintă această metodă de calcul, se dau curbele necesare pentru utilizarea ei, analizîndu-se ipotezele modelului electrogeometric și se prezintă câteva aplicații ale metodei pentru linii electrice aeriene din sistemul energetic național.

* Manuscris predat redacției la data de 8 septembrie 1974.

2. Modelul electrogeometric

2.1. Ipoteze de calcul.

Printre ipotezele cele mai importante ale acestei metode sînt cele privind desfășurarea trăsnetului și distanțele de străpungere în acest proces.

Prima fază a loviturii de trăsnet, cunoscută sub numele de lider, este o predescărcare slab luminoasă, care se propagă dela nor spre pămînt în salturi de cîteva zeci de metri, cu pauze între salturi de ordinul sutelor de μs . Viteza medie de înaintare a liderului, considerată în ansamblu, este de ordinul $(0,15 - 0,30) \frac{m}{\mu\text{s}}$ [2]

Cînd vîrfurile acestei predescărcări se apropie de pămînt, de pe sol sau de pe obiectele aflate pe acesta (arbori, case, stîlpi și conductoare ale liniilor electrice aeriene, etc.) dacă intensitatea cîmpului electric atinge valoarea critică, se dezvoltă în direcția liderului o serie de descărcări numite strimeri ascendenți. Cînd un astfel de strimer întîlnește predescărcarea descendentă se dezvoltă un proces rapid de neutralizare a sarcinilor electrice din canalul liderului, pornind de la pămînt spre nor, proces însoțit de un curent de intensitate foarte mare — curentul de trăsnet.

Pentru definirea modelului electrogeometric se admite, pe baza datelor experimentale, că există o relație între distanța începînd de la care vîrfurile liderului determină apariția și dezvoltarea strimerului ascendent (înălțimea de „orientare” a liderului) și valoarea curentului de trăsnet

Folosind notațiile (vezi fig. 1):

I — curentul de trăsnet, în [kA],

$\bar{r}_c$ — distanța medie de amorsare a descărcării între conductor și lider, în [m],

$\bar{r}_s$ — distanța medie de amorsare a descărcării între sol și lider, în [m], se pot scrie relațiile [3]:

$$\bar{r}_c = 6,7 I^{0,8} \quad (1)$$

$$\bar{r}_s = k_1 \bar{r}_c \quad (2)$$

Coeficientul k_1 din relația (2) arată că distanța de străpungere lider-sol este diferită (dacă $k_1 \neq 1$) de cea corespunzătoare, pentru aceeași tensiune, configurației lider-conductor. Ținînd seama de caracterul statistic al fenomenelor ce caracterizează o descărcare lungă de tipul trăsnetului, nu pare a fi justificată valoarea $k_1 \neq 1$. Totuși, introducerea condiției $k_1 < 1$, care sugerează că amorsarea descărcării spre sol necesită, la aceeași tensiune, o apropiere mai mare a vîrfurilor liderului decît amorsarea descărcării spre conductor, asigură un coeficient de siguranță suplimentar deoarece reduce întrucîtva unghiul de protecție.

Cînd un trăsnet de intensitate I cade pe un conductor activ al unei linii, iau naștere două unde de tensiune care se propagă în lungul liniei, în ambele părți față de punctul lovit. Diferența de potențial care apare

între extremitățile unui lanț de izolatoare este funcție de curentul I și de impedanța caracteristică directă Z a liniei, conform relației [3], [4]

$$U_{iz} = \frac{1}{2} Z I \frac{1}{\lambda} \quad (3)$$

unde λ este coeficientul introdus de Wagner și Golde și folosit de Whitehead pentru a lua în considerare diminuarea impedanței caracteristice a liniei sub acțiunea descărcării corona ($\lambda = 1,13$)

Atita timp cât tensiunea U_{iz} , corespunzătoare unui anumit curent de trăsnet, este inferioară tensiunii de 50% amorsări la impuls a liniei, căderea directă a trăsnetului în conductoarele active nu este însoțită de niciun incident de exploatare și deci nu sînt necesare mijloace de protecție. Există însă un curent de trăsnet, numit „critic”, de la a cărui valoare în sus, pentru orice curent de trăsnet, U_{iz} depășește tensiunea de 50% amorsări, producîndu-se, în consecință, conturnarea inversă. Pentru această situație conductorul de protecție își justifică prezența. Protecția se obține prin amplasarea conductorului de protecție în așa fel încît strimerul ascendent, pentru $I \geq I_c$, să plece de la conductorul de protecție înainte de a se forma la conductoarele active (adică liderul să fie „dirijat” către conductoarele de protecție și nu către cele active). Aceasta este ideea de bază în studiul protecției liniilor electrice contra supratensiunilor atmosferice folosind modelul electrogeometric, care va fi prezentat în cele ce urmează [3], [4].

2.2. Relații de calcul.

Fie un sistem de axe XOY în care axa OX coincide cu solul iar axa verticală OY trece prin conductorul activ al liniei plasat în punctul Y . În acest sistem de axe parabola (P) reprezintă locul geometric al punctelor definite de relația (2). Conform celor spuse mai sus, orice lider care ajunge cu vîrfurile în zona I a spațiului în dreapta parabolei (P) — determină un strimer ascendent de la sol înaintea unuia dinspre conductorul activ; zona I , în care liderul se „orientează” spre sol este deci nepericuloasă pentru linie

Introducînd în relația (2) curentul critic definit mai sus, se determină distanța critică de amorsare spre conductorul activ :

$$\bar{r}_{ca} = 6,7 I_c^{0,8} \quad (3')$$

și se trasează cercul „ f ” cu centrul în punctul Y și de raza $\bar{r}_{ca}$. Acest cerc intersectează parabola (P) în punctul M .

Zona II a spațiului din interiorul parabolei și cercului este o regiune în care liderul în trepte odată pătruns nu duce la conturnarea liniei. Într-adevăr, dacă vîrfurile predescărcării pătrunde în această zonă, punctul de lovire este în mod obligatoriu conductorul activ și cum în această regiune distanța de amorsare este $\bar{r}_c < \bar{r}_{ca}$ curentul corespunzător este inferior celui critic și, deci nepericulos. Rămîne de protejat numai zona III a spațiului, cuprinsă între parabola (P) și cercul (f) de deasupra punctului M , zonă pentru care trebuie să se exercite rolul protector al conduc-

În raționamentul anterior se poate lua în considerare un coeficient de siguranță, fără a fi afectat principiul expus. Se consideră că distanța de amorsare între lider și conductorul de protecție $\bar{r}_{cp}$ este mai mică decât cea față de conductorul activ r_{ca} . (Siguranța suplimentară apare din ipoteza unei eficacități mai reduse a conductorului de protecție). Fie k_2 reducerea acestei distanțe.

Atunci :

$$\bar{r}_{cp} = k_2 \bar{r}_{ca} \quad (6)$$

Relațiile între unghiurile figurii corespunzătoare (fig. 1 b) devin :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - [\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)]; \quad \theta = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{MP}{\bar{r}_{ca}} = \frac{k_1 \bar{r}_{ca} - Y}{\bar{r}_{oa}} \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \arcsin \left[k_1 - \frac{Y}{\bar{r}_{ca}} \right]$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\bar{r}_{ca}^2 + C^2 - k_2^2 \bar{r}_{ca}^2}{2 \bar{r}_{ca} C} = \frac{C}{2 \bar{r}_{ca}} + [1 - k_2^2] \frac{\bar{r}_{ca}}{2C}$$

$$\alpha_2 = \arccos \left[\frac{C}{2 \bar{r}_{ca}} + (1 - k_2^2) \frac{\bar{r}_{ca}}{C} \right] \quad (9)$$

Din relațiile (7), (8) și (9) se obține formula de calcul a unghiului de protecție :

$$\theta = \arcsin \left[k_1 - \frac{Y}{\bar{r}_{ca}} \right] + \arccos \left[\frac{C}{2 \bar{r}_{ca}} + \frac{1}{2} (1 - k_2^2) \frac{1}{\frac{\bar{r}_{ca}}{C}} \right] - \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

adică o relație de forma :

$$\theta = g \left(\frac{Y}{\bar{r}_{ca}}, \frac{C}{\bar{r}_{ca}}, k_1, k_2 \right)$$

2.3. Etapele de lucru la utilizarea metodei modelului electrogeometric

Pentru întrebuintarea metodei modelului electrogeometric trebuie să se plece de la configurația geometrică cunoscută a liniei electrice aeriene. Întru cât unghiul de protecție se modifică în lungul liniei, de la stîlp spre mijlocul deschiderii din cauza săgeților diferite ale conductoarelor de protecție și active, se recomandă să se adopte valoarea $k_1 = 0,9$ pentru calculul de determinare a unghiului de protecție în deschidere și $k_1 = 1$ pentru calculul unghiului de protecție la stîlp. Din compararea unghiurilor de protecție rezultate din aceste două evaluări se va reține valoarea cea mai mică.

Metoda poate fi aplicată și pentru conductoarele mediane ale liniilor cu fazele în plan orizontal și cu 2 conductoare de protecție. Fie Y_1, H, H' pozițiile conductorului activ interior și ale celor de protecție. Dacă

punctul N aflat la intersecția mediatoarelor segmentelor Y_1H și Y_1H' se află în interiorul arcului cu centrul în Y_1 și de rază $\bar{r}_{ca}$, atunci conductorul interior este protejat pentru că $Y_1N < \bar{r}_{ca}$.

Aplicind această metodă se constată că conductorul median este protejat chiar dacă unghiul de protecție ajunge la valori mari, de ordinul

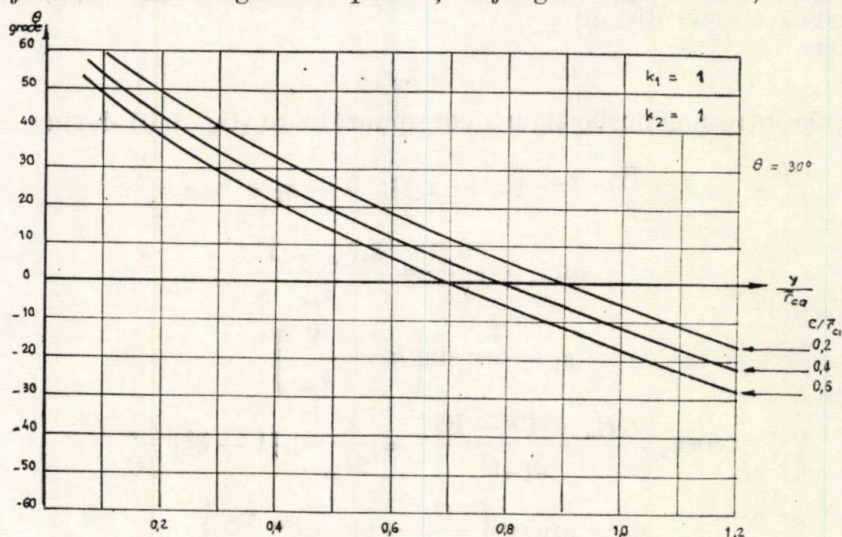


Fig. 2 Unghiul de protecție în funcție de parametrii reduși y/r_{ca} și c/r_{ca}

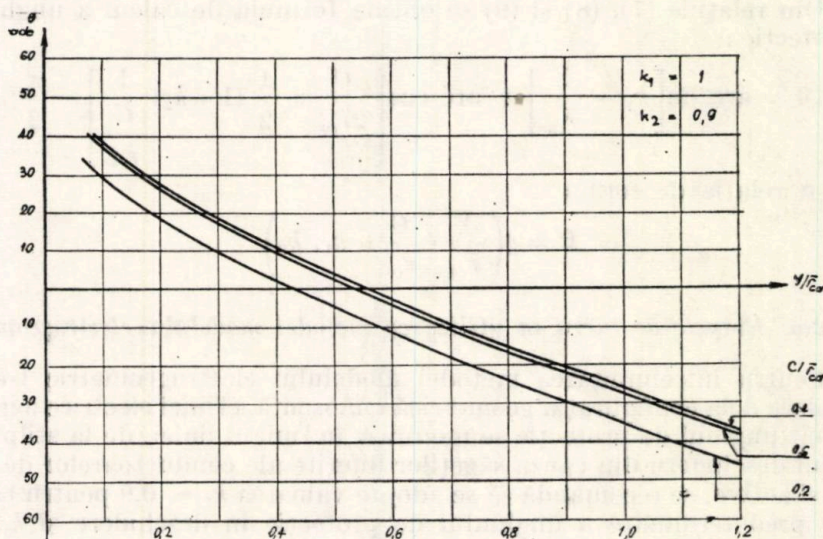


Fig. 3 Unghiul de protecție în funcție de parametrii reduși y/r_{ca} și c/r_{ca}

a $60^\circ - 70^\circ$. Calculația trebuie totuși să fie efectuată pentru deschideri speciale cum ar fi traversările cu stâlpi individuali de fază la capete, situații în care condițiile de protecție pot să nu fie îndeplinite.

Etapele de aplicare ale metodei expuse sînt următoarele :

1. — se determină tensiunea de 50 % amorsări la impulsuri (1,2/50 μ s) a lanțurilor de izolatoare ale liniei electrice : $U_{50\%}$ [kV]
2. — se determină impedanța caracteristică directă Z , în [Ω]
3. — se determină curentul critic al loviturii de trăsnet folosind relația (3), în [kA]

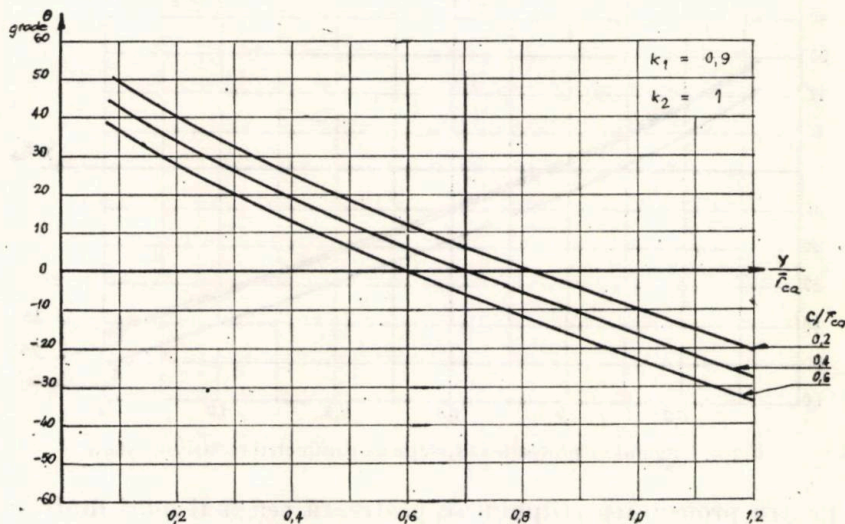


Fig. 4 Unghiul de protecție în funcție de parametrii reduși y/r_{ca} și c/r_{ca}

4. — se determină distanța medie de amorsare la conductorul activ $\bar{r}_{ca}$, cu relația (3') în [m]
5. — pentru calculul unghiului de protecție la stâlpi se determină :
 Y — înălțimea de suspensie a conductorului de protejat
 C — distanța între conductorul activ și cel de protecție

Pentru un stîlp care se proiectează se poate estima C cu relația [5] :

$$C [m] = \frac{U_{50\%} [kV]}{200}$$

și apoi cu parametrii $\frac{Y}{\bar{r}_{ca}}$ și $\frac{C}{\bar{r}_{ca}}$ se citește unghiul θ din abacele respective pentru $K_1 = 1$

6. — pentru calculul unghiului de protecție în deschidere se folosesc relațiile [5] :

$$\bar{Y} = Y - \frac{2}{3} f_{\max} \text{ unde } f_{\max} = \text{săgeata maximă}$$

$$C[m] = \frac{U_{50\%} [kV]}{160} \text{ — pentru estimarea distanței } C$$

și apoi cu parametrii $\frac{Y}{\bar{r}_{ca}}$ și $\frac{C}{\bar{r}_{ca}}$ se determină valoarea unghiului θ din abacele corespunzătoare lui $K_1 = 0,9$ (fig. 2–5)

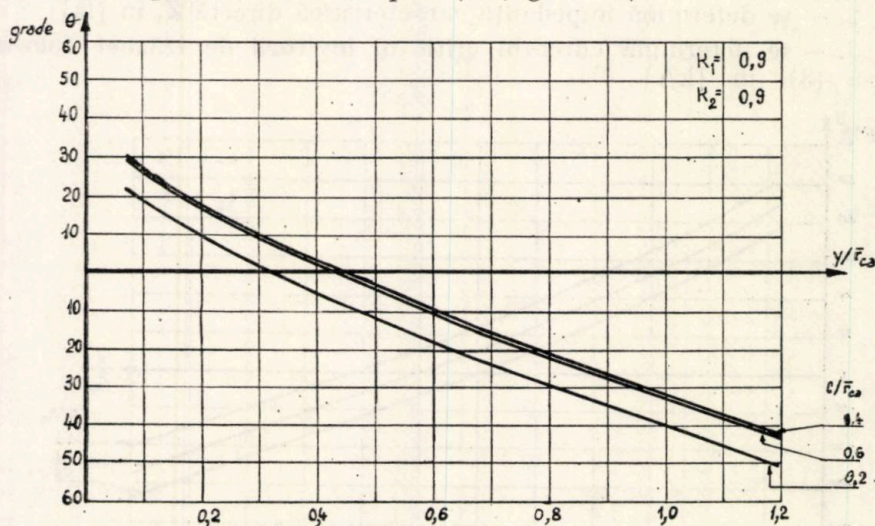


Fig. 5 Unghiul de protecție în funcție de parametrii redușii y/r și c/r

Pentru proiectarea stîlpului se păstrează cea mai mică dintre valorilor unghiului de protecție determinat la punctele 5 și 6.

3. Exemple de utilizare a metodei

Se prezintă, în cele ce urmează, aplicarea numerică a metodei expuse pentru linii de 750 kV realizate, estimări pentru linii de 1050 și 1300 kV și calcule pentru cîteva linii electrice aeriene de 220 și 400 kV din sistemul energetic național (anexele 1–3).

LINII DE 750 kV

- tensiunea de 50 % conturnări
- impedanța caracteristică directă
- curentul de trăznet critic
- distanța critică de amorsare

$$U_{50\%} = 2650 \text{ kV}$$

$$Z = 275 \text{ } \Omega$$

$$I_c = 21,8 \text{ kA}$$

$$r_{ca} = 78 \text{ m}$$

Parametrii

la stîlp

la înălțime medie
(în deschidere)

înălțimea la sol	$Y [\text{m}]$	23,1	15,0
distanța conductor activ- conductor de protecție	$C [\text{m}]$	28,3	29,5
	$Y/\bar{r}_{cp}$	0,30	0,19
	$C/\bar{r}_{cp}$	0,36	38
	real	6°	6°
unghiul de protecție θ	$[k_1=1]$	34°	43°
(pentru $K_2 = 1$)	$[k_1 = 0,9]$	27°	34°

Estimarea poziției conductorului de protecție pentru linii de 1050 kV și 1300 kV

	1050 kV		1300 kV	
Distanța la părți puse la pământ.	$d[m]$	7,5	9,3	
Tensiunea 50% amorsări (valoare, estimată [5]):				
$U_{50\%} = \frac{d[m]}{2,1[m/kV]}$	[kV]	3600	4400	
Impedanța caracteristică directă	$Z[\Omega]$	260	250	
Curentul de trăznet	$I_0 [kA]$	31	40	
Distanța de amorsare critică	$r_{ca}[m]$	105	128	
C în deschidere $C = \frac{U_{50\%}}{160}$	[m]	22,5	27,5	
C la stîlp $C = \frac{U_{50\%}}{200}$	[m]	18	22	
Parametrii	1050 kV		1300 kV	
	la stîlp	în deschidere	la stîlp.	în deschid.
Înălțimea deasupra solului				
$Y[m]$	33	21	35,5	23,5
$Y/\bar{r}_{ca}$	0,31	0,20	0,28	0,19
$C/\bar{r}_{ca}$	0,17	0,21	0,17	0,21
Unghiul de protecție θ				
(pentru $k_2 = 1$) $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 0,9 \end{cases}$	40° 32°	47° 40°	42° 34°	50° 40°

Se observă că pentru aceste linii valorile unghiului de protecție sînt mai mari decît cele întîlnite la liniile de tensiuni nominale mai mici.

În anexele 1—3 se prezintă calculația unghiului de protecție la stîlp și în deschidere, pentru linii electrice cu tensiunea nominală de 110 kV, 220 kV și 400 kV, folosind metoda modelului electrogeometric.

4. Concluzii

Metoda modelului electrogeometric, spre deosebire de alte metode de calcul, este un instrument simplu și comod de apreciere a eficienței pe care o au conductoarele de protecție asupra comportării la lovitura de trăznet a unei linii electrice aeriene.

Metoda prezentată ia în considerare ecranarea totală a conductoarelor active de către cele de protecție.

În realitate, liniile electrice aeriene construite nu oferă o ecranare completă; se acceptă „a priori” un anumit număr de intreruperi în funcționarea lor. Din această cauză liniile analizate în anexele 1—3 au rezultat

ca fiind neprotejate, unghiul de protecție necesar, calculat prin metoda prezentată, fiind inferior celui efectiv realizat, având uneori, chiar valori negative (de exemplu pentru linii de 110 kV unghiul de protecție calculat este $\theta = -48^\circ$, la stîlp, și $\theta = -22^\circ$, în deschidere, în timp ce unghiul realizat constructiv este $\varphi = 28^\circ 50'$). Din acest punct de vedere LEA de 400 kV sînt mai bine protejate: unghiul de protecție calculat are valoarea $\theta = 23^\circ$ la stîlp, și $\theta = 37^\circ$, în deschidere, față de cel real care este $\varphi = 27^\circ 15'$, respectiv $\varphi = 22^\circ$.

Pentru o calculație cit mai corectă a unghiului de protecție, în condiții cit mai apropiate celor reale, modelul electrogeometric urmează a fi extins, într-o etapă viitoare, la studiul ecranărilor incomplete.

Catedra de Rețele electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. Armstrong, H. R., Whitehead E. R. A Lightning Stroke Pathfinder, IEEE Trans, on PAS 83, 1964, nr. 12, p. 1223—1227.
2. Wagner, C. F., Relation Between Stroke Current and the Velocity of the return stroke, IEEE Trans. on PAS, 82, 1963, p. 609—617.
3. Armstrong, H. R., Whitehead, E. R. Field and Analytical Studies of Transmission Line Shielding, IEEE Trans. on PAS, 87, 1968, nr. 1, p. 270—279.
4. Brown, G. W., Whitehead, E. R., Field and Analytical Studies of Transmission Line, Shielding: part II, IEEE Trans. on PAS, 88, 1969, nr. 5, p. 617—623.
5. * * *, Protection des lignes de transport contre la foudre un modèle électro-géométrique et son application à quelques lignes du réseau français, Electricité de France (studiu intern), 1971.

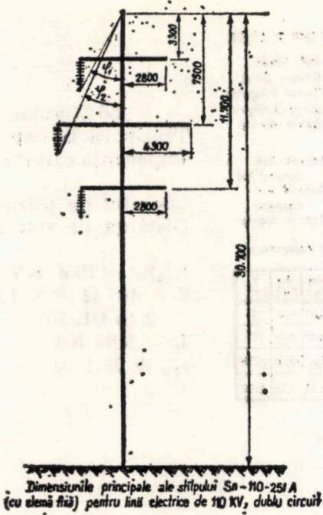
Protection des lignes électriques aériennes contre la foudre. Modèle électro-géométrique

On présente la méthode de choisir la position du conducteur de protection pour la protection des lignes électriques aériennes, en utilisant des aspects de la décharge. On étudie en application les différents types de pylones utilisés en Roumanie.

ANEXA

Notățiile folosite în anexe au următoarele semnificații:

- l_{iz} = lungimea lanțului de izolatoare
 h_{sca} = înălțimea de suspensie a conductorului activ
 h_{scp} = înălțimea de suspensie a conductorului de protecție
 f_{ca} = săgeata conductorului activ
 f_{cp} = săgeata conductorului de protecție
 $h_{ca} = h_{sca} - 2/3 f_{ca}$
 $h_{cp} = h_{scp} - 2/3 f_{cp}$
 D = deschiderea liniei electrice
 θ = unghiul de protecție realizat efectiv
 φ = unghiul de protecție calculat prin metoda modelului electrogeometric,



CARACTERISTICI PRINCIPALE:

- $l_{iz} = 1,5 \text{ m}$
- $h_{max} = 25,6 \text{ m}$
- $h_{exp} = 30,7 \text{ m}$
- $h_{ca} = 11 \text{ m}$
- $h_{cp} = 10 \text{ m}$
- $h_{ca} = 17,28 \text{ m}$
- $h_{cp} = 24 \text{ m}$
- $\gamma_1 = 26^\circ 50'$
- $\gamma_2 = 24^\circ 50'$

D = 230 m.

50 % amorsări
Tensiunea la impuls
Impedanța caracteristică directă

Curentul de trăznet critic

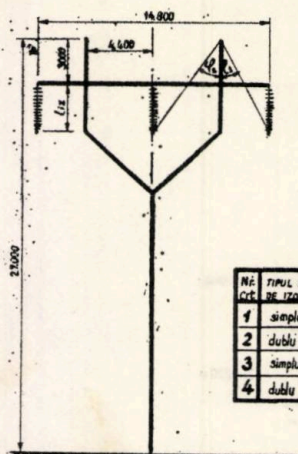
distanța de amorsare critică

PARAMETRII

- Înălțimea față de sol: Y [m]
- Distanța conductor activ
conductor de protecție C [m]
- $\frac{Y}{\bar{r}_{ca}}$
- $\frac{C}{\bar{r}_{ca}}$
- $\theta \begin{cases} K_1 = 1 \\ K_1 = 0,9 \end{cases}$
- [K₁ = 1]
- φ

$U_{50\%} = 600 \text{ KV}$
 $Z = 450 \Omega$
 $I = \frac{2U_{50\%}}{Z} \cdot 1,13 = 3 \text{ KA}$
 $\bar{r}_{ca} = 6,7 \text{ I} = 16,3 \text{ m}$

La stilp	În deschidere
25,6	17,28
5,8	7,28
1,57	1,06
0,356	0,426
-40°	-18°
-48°	-22°
28°50'	25°



Dimensiunile principale ale stîlpului Sny 220-101A
pentru linii electrice de 220 KV

EXEMPLE DE LINII DE 220 KV:

SIMPLU CIRCUIT { Anaf - Pitesti
Borzești - Bicaș
Bacel - E. Măgurele
Gurghiu - E. Măgurele
Izvoarele - Bacel

DOBLU CIRCUIT { București Sud -
București Est
București Sud -
Mossheha
Izvoarele - Slatina

CARACTERISTICI PRINCIPALE:

NR. C.A.	TIPIUL LANTULUI DE ISOLATORI	L ₁₂ (m)	d (m)	h _{ca} (m)	h _{ca} (m)	h _{cp} (m)	ψ (°)
1	simplu K ₃	2,7	5,63	21,35	12,03	18,06	28°
2	dublu K ₃	2,93	5,93	21,07	11,79	18,60	27°
3	simplu VKL	3,02	6,02	20,97	11,65	18,60	26°30'
4	dublu VKL	3,31	6,30	20,70	11,38	18,60	25°30'

f_{ca} = 14 m
f_{cp} = 12,6 m
D = 320 m

50 % amorsări
Tensiunea la impuls
Impedanța caracteristică directă

Curentul de trăznet critic
Distanța de amorsare critică

U₅₀ % = 1050 KV
Z = 407 Ω (3 × 450-OL-AL;
2 cp OL-70)
I_c = 5,83 KA
r_{ca} = 28,1 m

PARAMETRII

Înălțimea față de sol; y [m]

Distanța conductor activ

conductor de protecție: C [m]

$$\frac{Y/\bar{r}_{ca}}{C/\bar{r}_{ca}} = 1$$

$$\theta \begin{cases} K_1 = 1 \\ K_1 = 0,9 \end{cases}$$

$$[K_2 = 1] \quad \varphi$$

La stîlp

În deschidere

21,35

12,03

6,4

7,25

0,76

0,428

0,228

0,258

6°

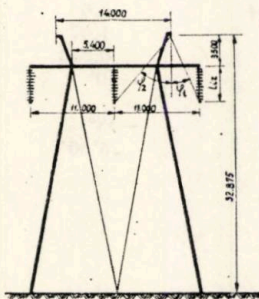
28°

0°

21°

28°

25°



Dimensiunile principale ale stîlpului PAS 400 101
pentru linii electrice de 400 KV

EXEMPLE DE LINII DE 400 KV

Luduz - Slatina
Slatina - București
Porțile de Fier - Rovinari -
Slatina

CARACTERISTICI PRINCIPALE:

lanț simplu K₃ - 4246 mm
lanț dublu K₃ - 4438 mm
lanț simplu VKL - 4478 mm
lanț dublu VKL - 4508 mm

f_{ca} = 16 m

f_{cp} = 14,4 m

h_{ca} = 14,3 m

h_{cp} = 23,3 m

ψ₁ = 27°15'

ψ₂ = 42°

U₅₀ = 1600 KV

Z = 328 Ω

I_c = 11 K

r_{ca} = 43,6 m

Tensiunea 50% amorsării impuls

Impedanța caracteristică directă

Curentul critic

Distanța de amorsare critică

PARAMETRII

Înălțimea față de sol: y [m]

Distanța conductor activ

Conductor de protecție: C [m]

$$\frac{Y/\bar{r}_{ca}}{C/\bar{r}_{ca}}$$

$$\theta \begin{cases} K_1 = 1 \\ K_1 = 0,9 \end{cases}$$

$$[K_2 = 1] \quad \varphi$$

La stîlp

În deschidere

25,1

14,5

8,78

9,65

0,53

0,318

0,195

0,212

23°

37°

16°

30°

27°15'

22°

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ**

apare trimestrial, în continuarea vechilor periodice științifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées”, „Buletinul Politehnicei din București” și Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din institut. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Correspondența privind articolele, schimburile de publicații și abonamentele se fac pe adresa institutului.

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
РАЗДЕЛ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

выходит четыре раза в год, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées”, „Buletinul Politehnicei din București”, и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București.

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут публиковаться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SERIES OF ELECTROTEHNICS**

The Bulletin is issued quarterly, continuing the old scientific periodicals: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées”, „Buletinul Politehnicei din București” and Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București.

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondence regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SÉRIE ELECTROTECHNIQUE**

paraît tous les trois mois continuant les anciens periodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées”, „Buletinul Politehnicei din București” et Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București.

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est:

Adresa:
**INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
ROMÂNIA
Splaiul Independenței nr. 313
Căsuța Poștală nr. 2356
(pentru Buletinul Institutului)
Seria Electrotehnică**



1977 DEC 9

Lei 20

= 1130/2

**BULETINUL
INSTITUTULUI
POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ”
BUCUREȘTI**

SERIA ELECTROTEHNICĂ

**TOMUL XXXIX NUMĂRUL 3 ANUL 1977,
IULIE—SEPTEMBRIE**

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL: Academician *Radu Voinea*

MEMBRII: Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Academician *Ecaterina Ciorănescu Nenițescu*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Călin Sergiu* (secretar științific); Prof. dr. *Octavian Stândășilă*; Prof. dr. docent ing. *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor: Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București,
Splaiul Independenței 313, Cod. 77206 Tel. 31.40.10, România, Căsuța poștală 2356
TELEX: 10.490 PIBUH

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ILEXIM
import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011226, Bucharest
ROMANIA

Sumar

MATEMATICA

- D. Stanomir, O. Stănăşilă
Towards a General Theory of Discrete Signals I . . . 3

FIZICA

- P. Suciu, R. Chişleag, I. Cucurezeanu
Asupra obţinerii hărţilor termice ale unor dispozitive electronice prin metoda interferometriei holografice 11

ELECTROTEHNICA

- C. Bălă, Matilda Tigler, M. Ionescu
Regimul staţionar al maşinii sincronizate trifazate conectate pe reţea proprie prin intermediul unui redresor comandat 17
- M. Preda, Ioana Dorobanţu
Metodă topologică universală în coarbori neorientaţi pentru circuite cu surse comandate oarecare 27
- N. Galan, I. Beşteu
Aspecte ale studiului motorului asincron trifazat cu rotor masiv . . . 39
- Fl. Ionescu
Sinteza asupra posibilităţilor de măsurare ale curentului post-arc . 49

ELECTRONICA

- Sanda Dumitrescu, Gh. M. Ştefan
Modelarea structurilor logice digitale ca sisteme cu stări finite 59

AUTOMATICA

- Doina Stănescu
Performanţele sistemelor automate liniare invariante 69
- Ioana Mihu
Algoritm de proiectare prin compensare a unui sistem liniar invariant în timp 79
- P. Stoica
The Generalized Least Squares Method with Moving Average Model for Residuals 87

CALCULATOARE

- V. Cristea
Verificarea unui algoritm de sincronizare a proceselor în sistemul SISIF 97

ENERGETICA

- D. Gh. Ionescu
Observaţii asupra ecuaţiei de stare a fluidelor şi asupra relaţiei lui Euler pentru turbomaşini 105

MATEMATICA

D. Stancu, O. Stancu
Toward a General Theory of Linear Systems

FIZICA

P. Săulea, H. Cristea, I. Căciulea
Aspecte optice ale hărților terestre ale unor dispozitive electronice prin metoda interferențelor holografice

ELECTROTEHNICĂ

C. Băile, M. Băile, T. Băile, M. Băile
Reglajul și controlul al magistrelor electronice controlate pe timp propriu prin intermediul unui regulator comandat

M. Băile, I. Băile, I. Băile
Metoda topologică aplicată în calculul caracteristicilor pentru circuite cu surse comandate electronic

N. Galan, I. Băile
Aspecte ale studiului motorului asincron trifazat cu rotor masiv

E. Ionescu
Sinteza asincronă a posibilităților de măsurare ale curentului post-arc

ELECTRONICĂ

S. Băile, D. Băile, G. M. Stancu
Modelarea structurii logice digitale ca sistem cu stări finite

ALTE

B. Băile, S. Băile
Performanțele sistemelor automate în stare invariantă

I. Băile, M. Băile
Algoritmi de proiectare prin compunere a unui sistem în stare invariantă

F. Stancu
The Generalized Least Squares Method with Moving Average Model for Residuals

CALCULATORICĂ

V. Cristea
Verificarea unui algoritmi de sincronizare a proceselor în sistemul MS-DOS

ENERGETICĂ

D. G. Ionescu
Observarea și controlul de stare a lămpilor și a grupurilor de lămpuri

C.Z.:517.9

TOWARDS A GENERAL THEORY OF DISCRETE SIGNALS I

D. STANOMIR, O. STĂNĂȘILĂ

In this paper one presents a general point of view concerning the representation of discrete signals. The notion of standard basis defined in 2° allows us to extend naturally some facts of spectral analysis and offers new possibilities of simulating the differential equations by finite difference equations. Some interesting questions of combinatorics arise naturally in the study of discrete signals in this new direction.

Introduction

The purpose of this paper is to offer a general point of view on the discrete signal analysis, suggested by the discrete exponential (Fourier) theory and by the theory of discrete orthogonal functions (Walsh). There are also given in the paper some useful results concerning the finite difference equations which, as is well known, simulate the discretization of the ordinary differential equations. The main tool of the theory is the so called standard basis, which offers a natural generalization of the different discrete bases since now known. Some applications are also included.

1. Notations and definitions

Let $q \geq 2$, $n \geq 1$ be some integers and let N be given by $N = q^n$. We introduce the set T containing N integers by

$$T = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}.$$

It follows immediately that every $a \in T$ has a q -adic representation

$$a = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + a_n \stackrel{\Delta}{=} (a_1, \dots, a_n)_q.$$

In what follows we shall frequently use the suggestive physical concepts as *the number of samples* for N , *sampling time* for $a \in T$,

time set for T , and so on. Every complex valued function $T \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto x(t)$ (the real case is included) will be called a *discrete signal*. The set of all such functions will be denoted by S_d . It is clear that every discrete signal $x \in S_d$ may be identified with a point of $\mathbb{C}^n$ and therefore may be represented by a column matrix of complex numbers

$$x = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]'$$

(the prime denotes the transpose of a matrix) where $x_i = x(i)$, $i \in T$ are called the *samples* or the *values* of x .

The set S_d is a complex N -dimensional vector space. One can define the *scalar product* of x and y by

$$\langle x, y \rangle = x' \cdot \bar{y} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \bar{y}_k, \quad (\forall) x, (\forall) y \in S_d$$

(the bar denotes the conjugate of a complex number) and the *norm* of x by

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (\forall) x \in S_d.$$

If $x(t)$ is a continuous (analogical) signal, $x: I \rightarrow \mathbb{C}$, defined on a bounded interval $I \subset \mathbb{R}$ and if a partition $\{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}\}$ of I is considered, then the samples $x_k = x(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, of $x(t)$ are the components of the discrete signal $x \in S_d$.

An operation which will be used in the following is the *signal product*, i.e.

$$\bullet: S_d \times S_d \rightarrow S_d, \quad (x, y) \mapsto z$$

where $x' = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]'$, $y = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]'$,

$$z = [z_0, z_1, \dots, z_{N-1}]'; \quad z_k = x_k y_k, \quad k = [0, N-1].$$

(the notation $k = [0, N-1]$ means that k takes all the integer values from $k = 0$ to $k = N-1$).

Finally we introduce a new operation $\oplus$ i.e. the *addition (mod q) of the sampling times*, which has the property that the sum of $i \in T$ and $j \in T$ is always in T . More precisely, for every pair of integers $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ we will associate an element of T , denoted by $a \oplus b$ in the following way: first it is clear that for $(\forall) a \in \mathbb{Z}$ there is a unique element $\bar{a} \in T$ such that $a - \bar{a} : N$ (means is divisible by). If $\bar{a} \in T$ then $\bar{a} = a$. If a and b are given then we get $\bar{a}$ and $\bar{b}$ and at the same time $\bar{a}$ and $\bar{b}$ have their unique q -adic representations $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)_q$ and respectively $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)_q$. We put then

$$a \oplus b \stackrel{\Delta}{=} (c_1, \dots, c_n)_q, \quad c_k = a_k + b_k \pmod{q}, \quad k = [0, N-1],$$

and obtain a surjective mapping

$$\oplus : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow T, (a, b) \mapsto a \oplus b.$$

Example. Let us take $q = 3$, $n = 2$, that is $N = 9$. We choose $a = 20$ and $b = 50$ and get $\bar{a} = 2$, $\bar{b} = 5$. These elements have the 3-adic representations: $\bar{a} = (0, 2)$, $\bar{b} = (1, 2)$. We get there $a \oplus b = (c_1, c_2)_3$ where $c_1 = 0 + 1 \pmod{3} = 1$, $c_2 = 2 + 2 \pmod{3} = 1$, that is $20 \oplus 50 = (11)_3 = 4$.

Let us change the values q and n and take $q = 2$, $n = 4$, that is $N = 16$. What is the sum $20 + 50$ for this choice? We have $\bar{a} = 4$, $\bar{b} = 2$, and $\bar{a} = (0, 1, 0, 0)$, $\bar{b} = (0, 0, 1, 0)$. Their 2-mod sum is $a \oplus b = (c_1, c_2, c_3, c_4)_2 = (0, 1, 1, 0)$. We have therefore $20 \oplus 50 = 6$.

For every $a \in T$ there is a unique element, let it be b , $b \in T$, so that $a \oplus b = 0$. This element will be denoted by $\ominus a$. It is clear that if the q -adic representation is $(a_1, a_2, \dots, a_n)_q$ then the b_j 's of $\ominus b = (b_1, b_2, \dots, b_n)_q$ are given by

$$b_j = \begin{cases} q - a_j, & \text{if } a_j \neq 0, j = \overline{1, n} \\ 0, & \text{if } a_j = 0. \end{cases}$$

Example. Let us take $q = 2$, $n = 4$ and $a = 12$. We then have $a = (1, 1, 0, 0)$, therefore we get $\ominus a = (1, 1, 0, 0)$. More generally, for $q = 2$, $(\forall) n \geq 1$, $\ominus a = a$. For $q = 3$, $n = 4$ and $a = 12$, $a = (0, 1, 1, 0)$ we have $\ominus a = (0, 2, 2, 0) = 24 \neq a$.

Finally one must keep in mind that $(T, \oplus)$ is an abelian group. For any pair $(a, b) \in T \times T$ we shall denote by definition $a \ominus b \stackrel{\Delta}{=} a \oplus c$, where $c = \ominus b$. This fact allows us to introduce q -delays of specified elements (sampling times) of T .

2. Standard basis in S_a

Let us denote by U the boundary of the unit disc in $\mathbb{C}$, that is $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Definition 1. Every set $\mathbf{B}$ of N discrete signals of S_a , $\mathbf{B} = \{E_k\}$, $k = [0, N - 1]$ will be called a *standard basis* in S_a if the following conditions are fulfilled:

- (a) the $N \times N$ square matrix $E = [E_0, E_1, \dots, E_{N-1}]$ is symmetrical and all its entries are in U ;
- (b) for every pair $r, s = \overline{0, N - 1}$ the *multiplicativity property* holds

$$E_r \bullet E_s = E_{r \oplus s};$$

- (c) for every pair $r, s = [0, N - 1]$, $r \neq s$, the *orthogonality property* holds $\langle E_r, E_s \rangle = 0$.

Lemma 1. Let $\mathbf{B} = \{E_k\}$, $k \in T$, be a standard basis in S_a . Then

(i) for every $k \in T$, one has $\|E_k\| = N$;

(ii) the family $\mathbf{B}$ is a basis of the vector space S_a in the usual meaning;

(iii) the E matrix is nonsingular.

Proof. (i) Let the k vector E_k be written as $E_k = [u_0^k, u_1^k, \dots, u_{N-1}^k]'$.

Then we have $\|E_k\|^2 = \langle E_k, E_k \rangle = \sum_{r=0}^{N-1} u_r^k \cdot u_r^{-k} = \sum_{r=0}^{N-1} |u_r^k|^2 = N$.

(ii) Since $\dim_{\mathbb{C}} S_a = N$, it is sufficient to show that the N vectors of $\mathbf{B}$ are linearly independent over $\mathbb{C}$. Let be a possible linear relation

$\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k E_k = 0$, which we multiply (scalar multiplication) by E_j . We get

then $\lambda_j \|E_j\|^2 = 0$, therefore $\lambda_j = 0$, $(\forall) j = [0, N-1]$.

(iii) follows from the fact that $\mathbf{B}$ has exactly N linearly independent columns.

Lemma 2. Let $\mathbf{B} = \{E_k\}$, $k = [0, N-1]$ a set of N vectors of S_a which fulfil the conditions (a), (b) of definition 1. Let us suppose in addition that $E_0 = [1, 1, \dots, 1]'$ and that the sum of entries for each column is zero, i.e. $\sum_{k=1}^{N-1} u_j^k = 0$, $j = [1, N-1]$. Then the set $\mathbf{B}$ is a standard basis in S_a .

Proof. The condition (c) is to be proved. Let us specify $r, s \in T$ and calculate the product $\langle E_r, E_s \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} u_j^r u_j^{-s}$. From the condition (a) it follows that $u_j^{-s} = 1/u_j^s$ and from (b) it results that $u_j^s u_j^{\ominus s} = u_j^0 = u_j^j = 1$, therefore we get $u_j^{-s} = u_j^{\ominus s}$, for every $j, s \in T$. It turns out that $\langle E_r, E_s \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} u_j^r u_j^{\ominus s} = \sum_{j=0}^{N-1} u_j^{r \ominus s}$. If $r \neq s$, then $r \ominus s \neq 0$ and following the additional hypothesis, $\langle E_r, E_s \rangle = 0$, i.e. the orthogonality condition.

Examples. 1) For the canonical basis in $S_a = \mathbb{C}^n$ over $\mathbb{C}$ the (a) and (c) conditions are fulfilled while the (b) condition is not therefore the canonical basis is not a standard basis.

2) By use of the same notations as before, let us define the discrete signals $E_k = [e_0^k, e_1^k, \dots, e_{N-1}^k]'$, where $e_t^k = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} kt\right)$; here j stands for the complex unity. The (a) condition is clearly fulfilled. As for the (b) condition we must show that for $(\forall) t, (\forall) p_1, (\forall) p_2 \in T$, one has

$$e_t^{p_1} \cdot e_t^{p_2} = e_t^{p_1 \oplus p_2}, \text{ or } \exp\left(j \frac{2\pi}{N} (p_1 + p_2)t\right) = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} (p_1 \oplus p_2)t\right)$$

and the last equality follows from the fact that $p_1 + p_2 = (p_1 \oplus p_2) \cdot N$. On the other hand, the hypothesis of lemma 2 is verified (for one has

$\sum_{k=1}^{N-1} e_t^k = 0, (\forall) t \neq 0$). So, this set $\{E_k\}_{k \in T}$ is a standard basis in S_a which

is called the *discrete exponential standard basis*.

3) With the same notations let us define the discrete signals

$$w_k : T \rightarrow \mathbb{C}, \quad w_k(t) = \exp \left(j \frac{2\pi}{q} \sum_{p=1}^n A_p t_p \right), \quad (\forall) k, (\forall) t \in T, \quad \text{where}$$

$$A_p = \begin{cases} k_{n-p} + k_{n+1-p} \bmod q, & \text{if } 0 \leq p < n \\ k_1, & \text{if } p = n \end{cases}$$

with t_r and k_r standing for the element of the q -adic representations of t and respectively k .

By elementary combinatorial reasonings, one gets that (a) and (b) conditions are fulfilled. By use of lemma 2 one gets finally that the set $\mathbf{B} = \{w_k\}_{k \in T}$ is a standard basis in S_a , which will be called the *Walsh standard basis*.

† The case $q = 2$ is particularly important; for, the signals w_k have only two values, namely $+1$ and -1 .

The above examples and the next applications show that the notion of standard basis is noteworthy.

3. Applications

I. Let us choose the integers $q, n, N = q^n$ and a standard basis $\mathbf{B} = [E_0, E_1, \dots, E_{N-1}]$, where $E_i = [u_0^i, u_1^i, \dots, u_{N-1}^i]'$, $i \in T$.

For every pair of discrete signals $x, y \in S_a$, the *convolution* z of x and y will be defined via the formula $z = x * y = [z_0, z_1, \dots, z_{N-1}]'$, where $z_i = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \bar{y}_{i \ominus k}$. Then let us introduce the discrete δ signal by

$$\delta_a = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]', \quad a \in T.$$

↑
 a

We write δ for $\delta_0 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]'$. One can see easily that: $x * y = y * x$, the operation $*$ is associative, $x * \delta = x$, $\delta * x = \bar{x}$ and $x * \delta_a = [x_{0 \ominus a}, x_{1 \ominus a}, \dots, x_{N-1 \ominus a}]'$. As a particular case we get $\delta_a * \delta_b = \delta_{a \oplus b}$, for every pair a and b in T . The convolution of a discrete signal with δ_a leads to a delay, modulo q , with time a , that is a controllable permutation of the samples.

II. It is known that for a differential operator with constant coefficients $\mathcal{L}(y) = \sum_{i=0}^r a_i y^{(n-i)}(x)$, the exponentials e^{zx} are eigenvectors. As for the discrete signals let us consider a $\mathbb{C}$ -linear operator defined by

$$\mathcal{L} : S_a \rightarrow S_a, \quad x(t) \mapsto \sum_{i=0}^r a_i x(t \ominus i)$$

where $a_i, 0 \leq i \leq r$ are complex or real constants. The operator $\mathcal{L}$ may be written with the help of the convolution i.e. $\mathcal{L}(x) = \sum_{i=0}^r a_i (x * \delta_i)$.

We need in the following the constants c_k , defined by $c_k = \sum_{i=0}^r a_i u_i^k$, $k \in T$. Now we can prove the following important result.

Theorem 1. a) The discrete signals $E_k, k \in T$, are the eigenvectors of the operator $\mathfrak{L}$ whereas the constants c_k are its eigenvalues.

b) The homogeneous equation $\mathfrak{L}(x) = 0$ has nontrivial solutions in S_d iff there exists some $k \in T$ so that $c_k = 0$.

c) The nonhomogeneous equation $\mathfrak{L}(x) = b(t), b \in S_d, b = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k E_k$, has solutions in S_d iff $\mu_k \neq 0$ leads to $c_k \neq 0$.

Proof. (a). From the definition of a standard basis it results that $E_k \neq 0$. Then we must prove that for every $k \in T$ we have $\mathfrak{L}(E_k) = c_k E_k$, that is to prove the equality $\sum_{i=0}^r a_i (E_k * \delta_i) = (\sum_{i=0}^r a_i u_i^k) E_k$.

The equality of two discrete signals is equivalent to the equality of their components, that is we must prove that $\sum_{i=0}^r a_i u_{j \oplus i}^k = \sum_{i=0}^r a_i u_i^k u_j^k$ and the last follows from $u_{j \oplus i}^k = u_j^k u_{\ominus i}^k = u_j^k u_i^{-k}$.

(b) By the lemma 1 it follows that every signal in S_d is a linear combination of E_k . A solution $x = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k E_k$ of homogeneous equation leads to $\mathfrak{L}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k c_k E_k = 0$, that is $\lambda_k c_k = 0$, for every $k \in T$. The solution is by assumption nontrivial then there exists some $k \in T$ so that $\lambda_k \neq 0$. It follows necessarily that $c_k = 0$.

(c) The equation $\mathfrak{L}(x) = b$ has solution in S_d , let it be $x = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k E_k$, iff $\sum_{i=0}^r a_i \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k (E_k * \delta_i) = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k E_k$. Splitting this equation into components one gets that $\lambda_k c_k = \mu_k$, from which results the content of (c).

Remark. If we identify $\mathfrak{L}(x) = y$ as being the output of a linear q -stationary dynamical system then we can say that the input $x = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k E_k$ generates the output $y = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \mathfrak{L}(E_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k c_k E_k$. We could say that the coefficients c_k are the weighting coordinates of the system.

Corollary 1. The operator $\mathfrak{L}$ has a fundamental solution, i.e. there exists a signal $e \in S_d$ so that $\mathfrak{L}(e) = \delta$, iff $c_k \neq 0$ for every $k \in T$. If such a signal exists then it is given by

$$e = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{c_k} E_k.$$

Proof. One can easily prove that $\delta = \frac{1}{N} (E_0 + E_1 + \dots + E_{N-1})$

so we can use the theorem 1(c) with $\mu_k = \frac{1}{N} \neq 0$, that is $\lambda_k = 1/N c_k$.

Therefore $\mathfrak{L}$ has a fundamental solution iff $\text{Ker}(\mathfrak{L}) = 0$ that is $\mathfrak{L}$ is an injective mapping.

Corollary 2. Let the operator $\mathfrak{L}$ has fundamental solution in S_d , and let e be a fundamental solution. Then the equation $\mathfrak{L}(x) = b$ has the solution $x = b * e$.

Proof. We have step by step: $\mathfrak{L}(b * e) = \sum_{i=0}^r a_i (b * e) * \delta_i = b * \sum_{i=0}^r a_i \delta_i = b * \sum_{i=0}^r a_i (e * \delta_i) = b * \mathfrak{L}(e) = b * \delta = nb$.

III. Let us consider the free motion of the q -adical pendulum

$$x(t \oplus 2) + \omega^2 x(t) = 0$$

where ω is a real constant.

One can write this equation as follows $\mathfrak{L} x = x * \delta_2 + \omega^2 x = 0$.

By virtue of the theorem 1 we find out that if there exists a nontrivial solution then there is some $k \in T$ so that $E_k(2) + \omega^2 = 0$. A necessary condition is that $|\omega| = 1$ i.e. $\omega = \pm 1$. Let us take into consideration the Walsh standard basis (see Ex. 3, 2°). Let the q -adical representation of k be $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)_q$. We get then

$$w_k(1) = \exp\left(j \frac{2\pi}{q} k_1\right), \quad w_k(2) = \exp\left(j \frac{4\pi}{q} k_1\right).$$

By use of these expressions we get the condition

$$\exp\left(-j \frac{4\pi}{q} k_1\right) = -1.$$

Then there exists $l \in \mathbb{Z}$ so that $4k_1 + q = 2lq$, $0 \leq k_1 \leq q - 1$, hence $q : 2$.

If one takes $q = 2$ then one gets that there are no „free vibrations” of the pendulum of type W_k . In the case we take $q = 4$ we get $k_1 = 2l - 1$ therefore $k_1 = 1$ or $k_1 = 3$. We obtained the following result: the 4-free vibrations (Walsh type) are those for which the k sequence has the first 4-adic number 1 or 3.

IV. Let be the equation

$$x(t \oplus 2) + x(t \oplus 1) = 8\delta_1 + 8\delta_2.$$

We check the Walsh solution for $q = 2$, $n = 3$. In this case we get

$$b(t) = 8\delta_1 + 8\delta_2 = 2(w_0 + w_1 + w_2 + w_3).$$

The solution will be

$$x = \sum_{k=0}^7 \lambda_k w_k \quad \text{where } \lambda_k \text{ are to be found.}$$

We get then

$$\lambda_k [\overline{w_k(2)} + \overline{w_k(1)}] = \begin{cases} 2 & \text{for } 0 \leq k \leq 3 \\ 0 & \text{for } 4 \leq k \leq 7 \end{cases}$$

Taking into account that $w_k(2) = 1$ and $w_k(1) = (-1)^{k_1}$ we get finally

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq k \leq 3 \\ \text{arbitrary} & \text{for } 4 \leq k \leq 7 \end{cases}$$

Therefore the solution is the following

$$x = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \sum_{k=4}^7 A_k w_k,$$

where A_k are arbitrary constants.

We have shown that the existence of the fundamental solution of L depends on the fact if there are some k in T so that $\sum_{i=0}^r a_i w_i^k \neq 0$. Many difficulties arise due to the fact that the solutions in k must be integer, therefore one must handle diophantical equations.

The equation of the q -adical pendulum has a fundamental solution, that is $x(t \ominus 2) + x = \delta$ has a solution iff for every k in T we have $w_1^k \neq -1$. Moreover if q is odd then there exists fundamental solutions in the discrete exponentials standard basis as well as in the Walsh functions standard basis. This stems from the fact that for an odd q and some integer A , $\exp\left(j \frac{2\pi}{q} A\right) \neq -1$.

Chair of Radiocomunications

Chair of Mathematics II

Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
Bucharest

REFERENCES

1. N. Ahmed, K. Rao. Signal Processing. Berlin, Springer-Verlag, 1975.
2. H. F. Harmuth. Transmission of Information by Orthogonal Functions. Sec. ed., Berlin, Springer-Verlag, 1972.

Asupra teoriei generale a semnalelor discrete

În această lucrare se prezintă un punct de vedere general privind reprezentarea semnalelor discrete. Noțiunea de bază standard definită în 2° permite o extindere naturală a unor considerații de analiză spectrală și oferă posibilități de studiu al unor ecuații cu diferențe finite de tip special. În această direcție a studiului semnalelor discrete apar unele probleme noi de combinatorică și de teoria sistemelor.

FIZICĂ

C.Z.: 536.5 : 535.41 : 621.382

ASUPRA OBTINERII HĂRȚILOR TERMICE ALE UNOR DISPOZITIVE ELECTRONICE PRIN METODA INTERFEROMETRIEI HOLOGRAFICE*

P. SUCIU, R. CHIȘLEAG, I. CUCUREZEANU

Autorii prezintă modul de obținere a hărților termice ale unor dispozitive semiconductoare utilizând metoda interferometriei holografice.

Modelul de interpretare propus pentru dispozitivele studiate permite considerarea franjelor ca izoterme, interfranjei corespunzându-i, în condiții obișnuite de alimentare, cîțiva Kelvin (3,6 K pentru circuitul integrat de tipul μ A 709, reprezentat în fig. 4).

Instalația și metoda prezentate asigură evidențierea nedistructivă a „punctelor calde” ale dispozitivelor semiconductoare.

Introducere

Metodele de control nedistructiv ale diferitelor piese fabricate în industria electronică s-au dezvoltat rapid în ultimul timp, ele furnizînd date importante asupra parametrilor de funcționare, fără deteriorarea componentelor respective. Așa de exemplu, determinarea temperaturilor locale ale unei piese, conducînd la trasarea hărții termice a acesteia, prezintă un interes major pentru calitatea componentei studiate, precum și pentru fiabilitatea ei.

Printre cele mai noi metode de control nedistructiv se situează interferometria holografică, o combinație a metodei de interferometrie clasică cu metoda holografică. Această metodă, descrisă în lucrările [1, 2], a fost utilizată în cadrul lucrării ce se prezintă la studiul unor dispozitive electronice semiconductoare, în vederea determinării hărților lor termice.

Harta termică a unui dispozitiv semiconductor se obține, în cazul de față, prin interpretarea tabloului de franje macroscopice (numit interferograma holografică a dispozitivului). O astfel de interferogramă se realizează, după cum se știe [1, 2], prin suprapunerea a două fronturi de undă obiect, coerente între ele, generate de două stări de comparat ale obiectului. În cazul nostru, prima stare o constituie dispozitivul nealimentat, a doua dispozitivul alimentat. Fronturile de undă pot proveni, prin reconstituire, fie de la hologramele obiectului aflat în cele două stări înregistrate pe aceeași placă fotografică, fie unul de la holograma obiectului aflat într-una din cele două stări, iar celălalt front obținut prin difuzie de la obiectul însuși, aflat în cealaltă stare. În primul caz metoda se numește interferometrie holografică cu dublă expunere, iar în al doilea interferometrie holografică cu simplă expunere (sau în timp real).

* Manuscris predat redacției la data de 26 martie 1977

Instalație experimentală

În lucrarea de față am utilizat metoda interferometriei holografice cu dublă expunere pentru studiul unor dispozitive electronice semiconductoare de tipuri și puteri diferite. Schema instalației este reprezentată în figura 1.

Fasciculul generat de un laser cu He—Ne avînd puterea de 40 mW pe radiația cu $\lambda = 6328 \text{ \AA}$, este separat de către divizorul de fascicul BS în două componente coerente între ele. Una dintre ele, după ce este expandată de obiectivul Ob_1 este deviată de oglinda O_1 spre obiectul de studiat. Lumina difuzată de obiect ajunge la placa fotografică H , constituind unda obiect. A doua componentă, constituind unda de referință este dirijată de oglinda O_2 spre obiectivul Ob_2 , expandată de acesta și trimisă direct pe mediul de înregistrare H .

Tablourile de franje, obținute prin interferența undei de referință cu undele provenite de la obiectul aflat pe rînd în cele două stări studiate, constituie cele două holograme necesare obținerii interferogramei holografice.

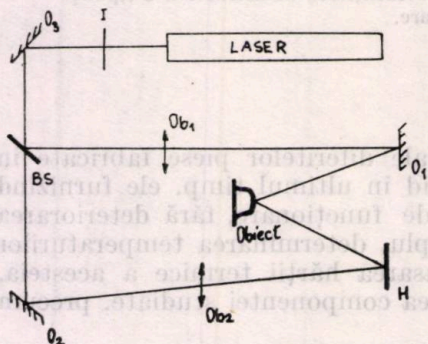


Fig. 1 — Schema instalației de obținere a hologramelor

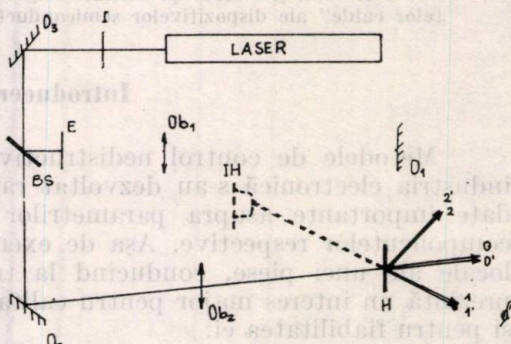


Fig. 2 — Schema instalației de obținere a interferogramei holografice

Utilizînd drept undă de reconstituire unda de referință însăși (ceea ce se realizează prin simpla obturare a undei obiect în montajul de înregistrare) se reconstituie simultan cele două unde obiect (1, 1', fig. 2) care poartă informația despre obiectul aflat în fiecare din cele două stări. Aceste unde, fiind coerente, vor interfera generînd interferograma holografică a obiectului (IH în figura 2).

Rezultate experimentale

Privită prin hologramă în lungul fasciculelor 1, 1' (fig. 2), interferograma holografică are aspectul din figura 3, acesta depinzînd evident de forma undelor ce interferează, adică de modificările suferite de obiectul studiat, între cele două stări. Interpretarea acestui tablou de franje conduce la concluzii privind comportarea dispozitivului la variația parametrilor de funcționare [3, 4, 5].

Unul dintre acești parametri este intensitatea curentului de alimentare, a cărei variație între cele două stări conduce la variația temperaturii dispozitivului respectiv. Cum însă disiparea energiei termice nu se face uniform, aceasta depinzând de mai mulți factori, pe suprafața dispo-

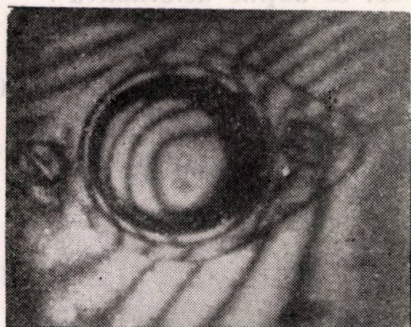


Fig. 3. — Fotografia mărită a interferogramei holografice a unui tranzistor de tipul EFT 214



Fig. 4. — Fotografia mărită a interferogramei holografice a unui circuit integrat de tipul μA 709

zitivului vor apare linii de egală deformare, materializate prin înseși franjele ce constituie interferograma holografică a dispozitivului. Prelucrarea și interpretarea acestor franje conduce la determinarea curbelor locuri geometrice ale punctelor de egală temperatură — izotermele dispozitivului —, totalitatea lor formînd ceea ce se numește harta termică a dispozitivului.

În cele ce urmează vom prezenta unele rezultate obținute pe dispozitive semiconductoare de producție indigenă.

În figura 4 se prezintă fotografia interferogramei holografice a unui circuit integrat de tipul μA 709 produs de IPRS Băneasa, utilizat parțial. Cele două expuneri au fost făcute cu integratul deconectat și respectiv în regim de funcționare. Se observă îndesirea franjelor în dreptul contactelor de masă și alimentare, ceea ce, cantitativ, indică gradienti mari de temperatură. Pentru determinarea acestor gradienti se pleacă de la caracteristicile dispozitivului studiat și ale montajului holografic utilizat.

Cunoscînd legea de dilatare și temperatura t_R într-un punct R al dispozitivului putem calcula deformarea Δl_R în acel punct :

$$\Delta l_R = l_0 \alpha (t_R - t_0), \quad (1)$$

unde cu l_0 şi α , am notat grosimea, respectiv coeficientul de dilatare liniară ale probei, iar t_0 este temperatura punctelor aflate pe franja de ordin zero. Această deformare este legată de starea de interferenţă din punctul R şi prin relaţia

$$\Delta l_R = l_0 \alpha (t_R - t_0) = n_R \frac{\lambda}{2} k, \quad (2)$$

unde n_R este ordinul franjei ce trece prin punctul R iar k o constantă a instalaţiei holografice [6].

Într-un punct oarecare, P , al probei se obţine deformarea :

$$\Delta l_P = l_0 \alpha (t_P - t_0) = n_P \frac{\lambda}{2} k. \quad (3)$$

Din (2) şi (3) se poate calcula temperatura t_P în punctul P :

$$t_P = \frac{(n_P - n_R) \frac{\lambda k}{2}}{2l_0 \alpha} + t_R, \quad (4)$$

unde putem considera $k = 1$, pentru cazul în care vectorul de observare este normal pe suprafaţa dispozitivului [6].

Rezultă deci că sînt suficiente determinarea temperaturii într-un singur punct R de pe suprafaţa dispozitivului şi citirea interferogramei holografice pentru determinarea temperaturii oricărui punct P de pe această suprafaţă, adică pentru trasarea hărţii termice a dispozitivului respectiv.

În majoritatea cazurilor, prezintă interes mai ales diferenţele de temperatură între diferitele puncte ale suprafeţei dispozitivului studiat, în scopul depistării eventualelor puncte calde. Din (4) rezultă această diferenţă sub forma :

$$\Delta t_{PR} = t_P - t_R = \frac{n_P - n_R}{2l_0 \alpha} \cdot \lambda \cdot k, \quad (5)$$

sau pentru un anumit dispozitiv cu l_0 constant şi o anumită instalaţie holografică pentru care k este constant putem scrie

$$\Delta t_{PR} = C \cdot \Delta n_{PR},$$

unde $\Delta n_{PR} = n_P - n_R$ şi $C = \frac{\lambda k}{2l_0 \alpha} = \text{constant}$.

Din această relație rezultă, că franjele interferogramei holografice pot fi considerate ca izoterme pe suprafața dispozitivului studiat și că diferența de temperatură dintre două puncte situate pe două franje de ordine consecutive este aceeași indiferent de ordinul franjei.

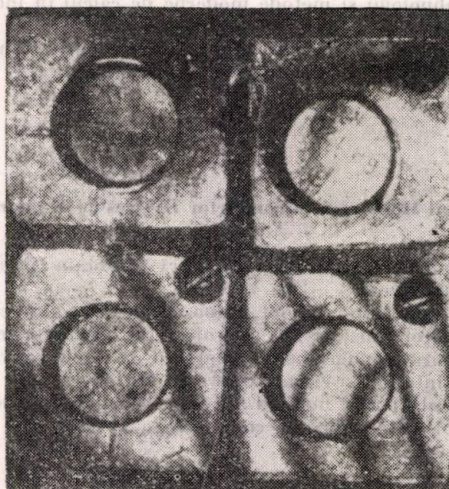


Fig. 5 — Fotografia mărită a interferogramei holografice a unei punți redresoare cu patru diode de tip RA 120

În figura 5 se prezintă o punte redresoare utilizând diode de tip RA 120. Din distribuția franjelor pe radiatorul și capsula fiecărei diode rezultă o comportare asimetrică și inegală a acestora.

Concluzii

Utilizarea metodei interferometriei holografice permite obținerea informațiilor necesare trasării hărților termice simultan pe toată suprafața observată a dispozitivelor semiconductoare studiate.

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. R. E. Brooks, L. O. Heflinger, R. F. Wuerker, Interferometry with a Holographically Reconstructed Comparison Beam Appl. Phys. Lett. 7, 248 (1965).
2. R. K. Erf, ed., Holographic Nondestructive Testing”, Academic Press, New York, 1974.
3. K. A. Stetson, Fringe Interpretation for Hologram Interferometry of Rigid-Body Motions and Homogenous Deformations J. Opt. Soc. Am. 64, (1), 1 (Jan. 1974).

4. J. Ch. Viénot, Cl. Froehly, J. Monneret, J. Pasteur, Hologram Interferometry : Surface Displacement Fringe Analysis as an Approach to the Study of Mechanical Strains and other Applications to the Determination of Anisotropy in Transparent Objects pp. 133—150 in : E. Robertson și J. Harvey eds., The Engineering Uses of Holography, Cambridge University Press, 1970.
5. I. Cucurezeanu, R. Chişleag, P. Suci, Unele criterii de interpretare a franşelor de interferometrie holografică pp. 254—264 în volumul de lucrări prezentate la sesiunea științifică Tehnologii și metode moderne de calcul în industria constructoare de mașini, secția VI-a, ed. I.P.B. 1974.
6. I. Cucurezeanu, R. Chişleag, P. Suci, Asupra interpretării franşelor în interferometria holografică", Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, vol. 36, pp. 145—150 (nr. 1, 1977).

On Obtaining Thermal Maps of Semiconductor Devices by Hologram Interferometry

The authors apply hologram interferometry to obtain thermal maps of some semiconductor components.

The fringe interpretation model proposed for the studied semiconductors enables the investigator consider fringe projections on component surface as isotherms, the neighbouring fringes being separated by a few Kelvin (3,6 K for an usually fed μA 709 integrated circuit shown in fig. 4).

The described set-up and method are suited to non-destructively emphasize the „hot points” of semiconductor components.

Fig. 3 — Fotografia marelă a interferenţelor
holografice a unei punţi redresoare cu patru
diode de tip 1A 120

În figura 3 se prezintă o punte redresoare utilizând diode de tip
1A 120. Din distribuţia franşelor se determină şi capacitatea fiecărei diode
bazată pe conductivitate asimetrică şi înălţimea a acestora.

Concluzii

Utilizarea metodei interferenţelor holografice permite obţinerea
informaţiilor necesare traseii câmpilor termice simultan pe toată supra-
faţa observată a dispozitivelor semiconductorilor studiate.

Coordonator de lucrări
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dea” Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. H. A. Brooks, J. O. Heflinger, R. F. Wenzel, Interferometry with a Holographically
Reconstructed Comparison Beam Appl. Phys. Lett. 7, 248 (1965).
2. R. A. E. Ed. ed. Holographic Nondestructive Testing, Academic Press New York, 1974.
3. R. A. E. Ed. ed. Hologram Interferometry of High-Body Motions
and Homogeneous Deformations J. Opt. Soc. Am. 64 (1) 1 (Jan. 1977).

ELECTROTEHNICĂ

C.Z. 621.314.26 ; 621.3.011

REGIMUL STAȚIONAR AL MAȘINII SINCRONE TRIFAZATE CONECTATE PE REȚEA PROPRIE PRIN INTERMEDIUL UNUI REDRESOR COMANDAT *

C. BĂLĂ, MATILDA ȚIGLER, M. IONESCU

În lucrare se prezintă o metodă de calcul a solenației de excitație a mașinii sincrone conectată pe un redresor comandat în punte trifazată și se determină caracteristicile sale de funcționare.

Introducere

În instalațiile electrice de acționări reglabile în curent continuu de putere medie și mare (100 ÷ 1000) kW se utilizează adesea grupul format din generatorul sincron trifazat și o punte redresoare trifazată comandată, conectată ca în fig. 1.

În circuitul indusului mașinii sincrone apare o putere reactivă și o putere deformantă, chiar la funcționarea în regim simetric, datorită prezenței redresorului comandat. Armonicile din curba curentului și tensiunii, precum și componentele puterii electrice influențează caracteristicile de funcționare ale mașinii sincrone și provoacă pierderi suplimentare de care trebuie ținut seama la proiectarea și exploatarea agregatului.

În această lucrare se determină armonicile curentului din indus, folosite la predeterminarea caracteristicilor de funcționare, — con-

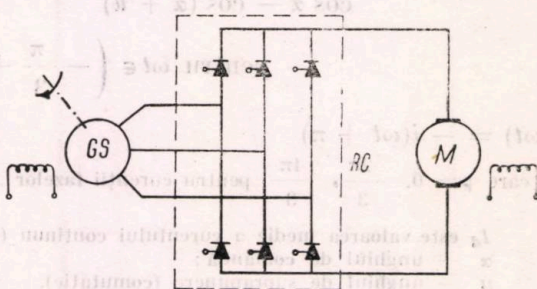


Fig. 1. Reprezentarea unui generator sincron funcționând pe o punte trifazată comandată.

* Manuscris predat redacției la data de 23 mai 1977.

derîndu-se dată curba curentului pe partea de curent alternativ pentru o mașină sincronă care funcționează pe o rețea proprie, constituită dintr-un redresor comandat; se prezintă totodată o metodă de calcul a solenității de excitație a mașinii sincrone cuplate cu puntea de redresoare trifazată comandată.

1. Curentul în indusul mașinii sincrone.

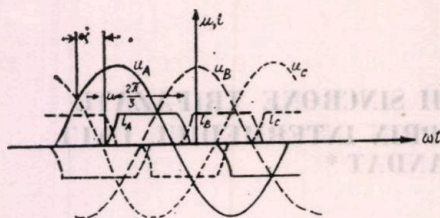


Fig. 2 Reprezentarea sistemului trifazat de curenți pentru mutatorul cu schema în punte trifazată comandată.

Pentru determinarea conținutului de armonici din curba curentului, se consideră curentul de rețea al mutatorului alimentat de la o sursă de putere foarte mare.

În fig. 2 este reprezentat sistemul trifazat de curenți pentru mutatorul cu schema în punte trifazată comandată.

Curenții de fază se exprimă prin relațiile :

$$i(t) = I_a \frac{\cos \alpha - \cos(\omega t + \pi - \rho)}{\cos \alpha - \cos(\alpha + u)}$$

$$\text{pentru } \omega t \in (-\pi + \alpha + \rho \div -\pi + \alpha + u + \rho)$$

$$i(t) = I_a \quad \text{pentru } \omega t \in \left(-\pi + \alpha + u + \rho \div -\frac{\pi}{3} + \alpha + \rho\right)$$

$$i(t) = I_a \frac{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3} - \rho\right) - \cos(\alpha + u)}{\cos \alpha - \cos(\alpha + u)}$$

$$\text{pentru } \omega t \in \left(-\frac{\pi}{3} + \alpha + \rho \div -\frac{\pi}{3} + \alpha + u + \rho\right)$$

$$i(\omega t) = -i(\omega t + \pi) \quad (1)$$

$$\text{în care } \rho = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \quad \text{pentru curenții fazelor A, B, C;}$$

I_a este valoarea medie a curentului continuu (de sarcină);

α — unghiul de comandă;

u — unghiul de suprapunere (comutație).

În curba curentului apar numai armonicele de ordin impar și nu conține armonicele sinfazice. Amplitudinile armonicele de ordin ν sînt date de relațiile :

$$A_\Omega = \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\pi + \alpha + \rho}^{-\pi + \alpha + u + \rho} I_a \frac{\cos \alpha - \cos(\omega t + \pi - \rho)}{\cos \alpha - \cos(\alpha + u)} \cos \nu \omega t \cdot d(\omega t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\pi+\alpha+u+\rho}^{-\frac{\pi}{3}+\alpha+\rho} I_d \cos \nu \omega t \cdot d(\omega t) + \\
& + \int_{-\frac{\pi}{3}+\alpha+\rho}^{-\pi+\alpha+u+\rho} I_d \frac{\cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} - \rho \right) - \cos (\alpha + u)}{\cos \alpha - \cos (\alpha + u)} \cos \nu \omega t \cdot d(\omega t) \Bigg] \\
B_\Omega = & \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\pi+\alpha+\rho}^{-\pi+\alpha+u+\rho} I_d \frac{\cos \alpha - \cos (\omega t + \pi - \rho)}{\cos \alpha - \cos (\alpha + u)} \sin \nu \omega t \cdot d(\omega t) + \right. \\
& + \int_{-\pi+\alpha+u+\rho}^{-\frac{\pi}{3}+\alpha+\rho} I_d \sin \nu \omega t \cdot d(\omega t) + \\
& + \int_{-\frac{\pi}{3}+\alpha+\rho}^{-\pi+\alpha+u+\rho} I_d \frac{\cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} - \rho \right) - \cos (\alpha + u)}{\cos \alpha - \cos (\alpha + u)} \sin \nu \omega t \cdot d(\omega t) \Bigg] \quad (2)
\end{aligned}$$

Valoarea efectivă a armonicii de ordinul ν a curentului de fază este

$$\begin{aligned}
I_\Omega = & \frac{4 I_d}{\sqrt{2} \pi} \sqrt{\left\{ \frac{\sin \nu \left(\frac{\pi}{3} - \frac{u}{2} \right) \cos \nu \left(-\frac{2\pi}{3} + \alpha + \frac{u}{2} + \rho \right)}{\nu} + \right.} \\
& + \frac{1}{\cos \alpha - \cos (\alpha + u)} \left[\sin \frac{\nu u}{2} \left(\frac{\cos \alpha \cos \nu \left(-\pi + \alpha + \frac{u}{2} + \rho \right)}{\nu} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\cos (\alpha + u) \cos \nu \left(-\frac{\pi}{3} + \alpha + \frac{u}{2} + \rho \right)}{\nu} \right) \right] \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{-\sin(1+\nu) \frac{u}{2} \sin \frac{\nu\pi}{3} \cdot \frac{\sin[(1+\nu)\left(-\frac{2\pi}{3} + \alpha + \frac{u}{2} + \rho\right) + \frac{2\pi}{3} - \rho]}{1+\nu}} + \\
& \sqrt{+\sin(1-\nu) \frac{u}{2} \sin \frac{\nu\pi}{3} \cdot \frac{\sin[(1-\nu)\left(-\frac{2\pi}{3} + \alpha + \frac{u}{2} + \rho\right) + \frac{2\pi}{3} - \rho]}{1-\nu}} \Bigg\}^2 + \\
& \sqrt{+\left\{ \frac{\sin \nu \left(\frac{\pi}{3} - \frac{u}{2}\right) \sin \nu \left(-\frac{2\pi}{3} + \alpha + \frac{u}{2} + \rho\right)}{\nu} + \right\}} \\
& \sqrt{+\frac{1}{\cos \alpha - \cos(\alpha + u)} \left[\sin \frac{\nu u}{2} \cdot \left(\frac{\cos \alpha \cdot \sin \nu \left(-\pi + \alpha + \frac{u}{2} + \rho\right)}{\nu} - \right. \right.} \\
& \left. \left. \sqrt{-\frac{\cos(\alpha + u) \sin \nu \left(-\frac{\pi}{3} + \alpha + \frac{u}{2} + \rho\right)}{\nu}} + \right. \right. \\
& \left. \sqrt{+\sin \frac{\nu\pi}{3} \cdot \sin(1+\nu) \frac{u}{2} \cdot \frac{\cos\left[(1+\nu)\left(-\frac{2\pi}{3} + \alpha + \frac{u}{2} + \rho\right) + \frac{2\pi}{3} - \rho\right]}{1+\nu}} + \right. \\
& \left. \left. \sqrt{+\sin \frac{\nu\pi}{3} \sin(1-\nu) \frac{u}{2} \cdot \frac{\cos\left[(1-\nu)\left(-\frac{2\pi}{3} + \alpha + \frac{u}{2} + \rho\right) + \frac{2\pi}{3} - \rho\right]}{1-\nu}} \right] \right\}^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

iar defazajul;

$$\theta_{\Omega} = \arctg \frac{B_{\Omega}}{A_{\Omega}} \tag{4}$$

În fig. 3 s-au reprezentat grafic, pentru $\nu = 1$, mărimile $\frac{\sqrt{2} I_{\Omega}}{I_{\bar{a}}}$ și θ_{Ω} , în funcție de parametrul u , la $\alpha = 0^{\circ}$ și $\alpha = 60^{\circ}$.

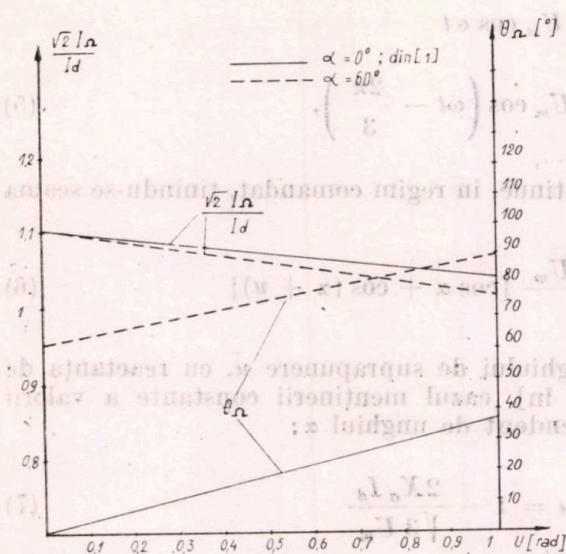


Fig. 3. Reprezentarea mărimilor $\frac{\sqrt{2} I_n}{I_d}$ și θ_n în funcție de unghiul de suprapunere u , pentru $v = 1$

2. Solenația de excitație a generatorului sincron conectat pe un redresor comandat în punte trifazată.

Pentru un curent de sarcină, constant (realizat prin inserierea unei inductivități de filtrare în serie cu sarcina), în [1] se prezintă o metodă de determinare a solenației de excitație necesare unui generator sincron, conectat la ieșire pe un redresor trifazat necomandat.

În această lucrare se examinează generatorul sincron conectat pe redresorul comandat (punte trifazată comandată), fig. 1. Se consideră numai armonicele fundamentale ale curenților și tensiunilor pentru determinarea solenației de excitație necesare și se neglijează rezistența înfășurărilor statorice.

Prin reglajul unghiului de comandă α , pe partea de curent alternativ, curentul se defazează în raport cu tensiunea de fază corespunzătoare; se modifică totodată amplitudinea curentului, respectiv valoarea tensiunii pe partea de curent continuu.

În decursul comutației, când are loc conducția simultană a tiristoarelor conectate în brațele punții corespunzătoare la câte două faze, unghiul de suprapunere u este determinat de parametri echivalenți pe fază ai generatorului și liniei, de valoarea tensiunii alternative și de valoarea curentului continuu I_d , valoare până la care trebuie să crească curentul unei faze în procesul de comutație. Puterea de scurtcircuit a mașinii sincrone la scurtcircuitul bifazat pe durata comutației este limitată; ca urmare, procesele de comutație influențează valoarea tensiunii pe partea de curent continuu, precum și curba acesteia.

Pentru sistemul trifazat de tensiuni reprezentat în fig. 2, exprimat prin :

$$u_A = U_m \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$u_B = U_m \cos \omega t$$

$$u_C = U_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad (5)$$

valoarea medie a tensiunii continue, în regim comandat, ținându-se seama de comutație, este [2];

$$U_d = \frac{3\sqrt{3} U_m}{2\pi} [\cos \alpha + \cos (\alpha + u)] \quad (6)$$

Pentru determinarea unghiului de suprapunere u , cu reactanța de comutație X_σ , se obține, [2], în] cazul menținerii constante a valorii curentului continuu I_d , independent de unghiul α :

$$\cos u = 1 - \frac{2X_\sigma I_d}{\sqrt{3} U_m} \quad (7)$$

Reactanța de comutație X_σ este egală cu reactanța de scurtcircuit pe fază a mașinii, corespunzătoare scurtcircuitului bifazat.

Din (7) și (6) se obține o ecuație de gradul doi, avînd ca necunoscută mărimea U_m ;

$$\begin{aligned} & \frac{27}{\pi^2} \cos^2 \alpha \cdot U_m^2 - \left(U_d \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \cos \alpha + \frac{27}{\sqrt{3} \pi^2} X_\sigma I_d + \right. \\ & \left. + \frac{27}{\sqrt{3} \pi^2} X_\sigma I_d \cos^2 \alpha \right) U_m + U_d \frac{6}{\pi} X_\sigma I_d \cos \alpha + \frac{9}{\pi^2} X_\sigma^2 I_d^2 + U_d^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Din cele două soluții obținute prin rezolvarea ecuației (8), una singură este compatibilă

În cazul cînd $\alpha = 0^\circ$, rezultă

$$U_m = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} U_d + \frac{X_\sigma I_d}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

care este analogă celei din [1], dar referitoare la o altă schemă de conexiune a redresorului.

Pentru condiții de sarcină cunoscute și pentru un generator sincron dat, se determină U_m din (8), iar cu relația (7) se determină u . Pentru u determinat, din graficele din fig. 3, se determină mărimile $\frac{\sqrt{2} I_\Omega}{I_d}$ și θ_Ω , care permit construcția diagramei de fazori din fig. 4 a

generatorului sincron din care se determină t.e.m. E_0 , corespunzătoare funcționării în gol. Pentru generatorul sincron dat, cunoscînd curba t.e.m.

la funcționarea în gol, E_0 , în funcție de curentul de excitație I_a , cu luarea în considerare a saturației, se poate predetermina prin metodele cunoscute, solenația de excitație la funcționarea în sarcină a mașinii.

S-a examinat generatorul sincron cu următoarele date nominale: putere aparentă 125 KVA, tensiune nominală 400 V, curentul nominal 180 A, frecvența nominală 50 Hz.

Pentru două valori ale unghiului de comandă, $\alpha = 0^\circ$ și $\alpha = 60^\circ$, pentru I_a variind în intervalul $(0 \div 100)$ A și U_d în intervalul $(50 \div 100)$ V, s-au determinat valorile corespunzătoare ale t.e.m. E_0 , ceea ce a permis predeterminarea caracteristicilor de funcționare ale generatorului sincron conectat pe o punte trifazată comandată, definite în felul următor:

— caracteristica de reglaj; $E_0 = f(I_a)$ la $U_d = \text{ct}$

— caracteristica externă; $U_d = f(I_a)$ la $E_0 = \text{ct}$

— caracteristica în sarcină; $U_d = f(E_0)$ la $I_a = \text{ct}$

Aceste caracteristici sînt reprezentate în fig. 5, 6 și 7, pentru $\alpha = 0^\circ$ (redresor necomandat) și $\alpha = 60^\circ$.

Se constată o bună concordanță între caracteristicile externe calculate și cele determinate experimental — fig. 6.

Oscilogramele din fig. 8 prezintă formele de undă ale curenților și tensiunilor pe partea de curent alternativ și pe partea de curent continuu.

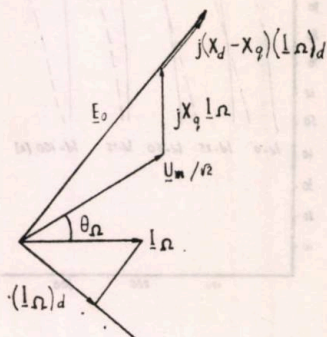


Fig. 4. Diagrama de faze a generatorului sincron.

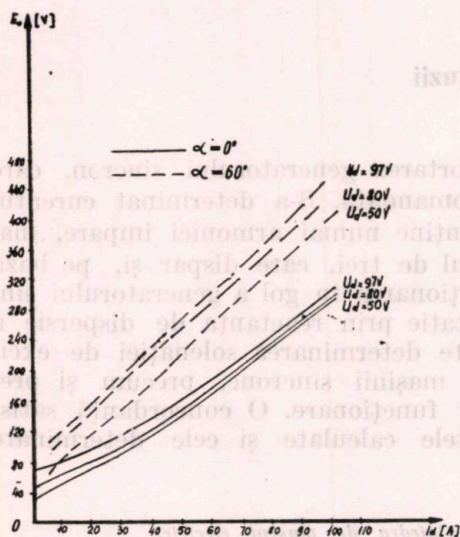


Fig. 5. Reprezentarea caracteristicilor de reglaj; $E_0 = f(I_a)$ la $U_d = \text{ct}$

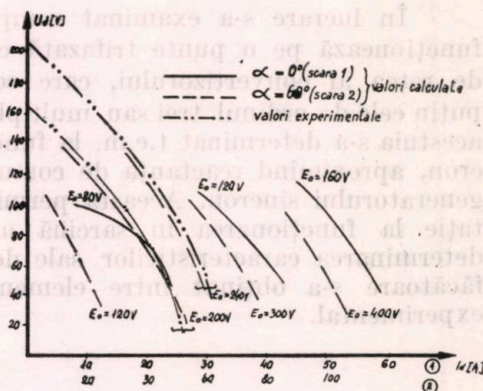


Fig. 6. Reprezentarea caracteristicilor externe; $U_d = f(I_a)$ la $E_0 = \text{ct}$, avînd unghiul α parametru.

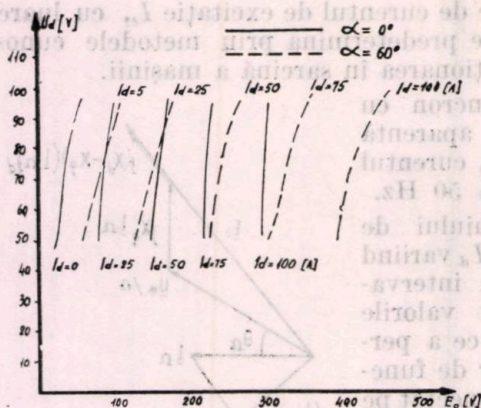


Fig. 7. Reprezentarea caracteristicilor în sarcină; $U_d = f(E_0)$ la $I_d = \text{ct}$, avînd α parametru.

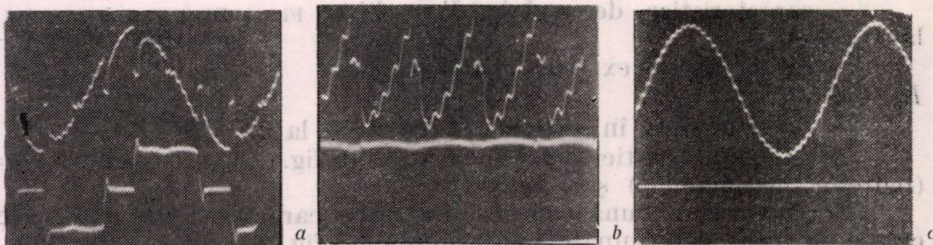


Fig. 8. Oscilogramme ale curenților și tensiunilor: a) pe partea de curent alternativ pentru $\alpha = 60^\circ$; b) tensiunea continuă nefiltrată și curentul continuu pentru $\alpha = 60^\circ$; c) tensiunea pe partea de curent alternativ pentru $I_d = 0$

Concluzii

În lucrare s-a examinat comportarea generatorului sincron, care funcționează pe o punte trifazată comandată. S-a determinat curentul de rețea al convertizorului, care conține numai armonici impare, mai puțin cele de ordinul trei sau multiplul de trei, care dispar și, pe baza acestuia s-a determinat t.e.m. la funcționarea în gol a generatorului sincron, aproximind reactanța de comutație prin reactanța de dispersie a generatorului sincron. Aceasta permite determinarea solenației de excitație la funcționarea în sarcină a mașinii sincrone, precum și predeterminarea caracteristicilor sale de funcționare. O concordanță satisfăcătoare s-a obținut între elementele calculate și cele determinate experimental.

Catedra de mașini electrice

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”

București

B I B L I O G R A F I E

1. *R. Smith*, IEEE Transactions, PAS, 1970 pg. 1910.
2. *Gottfried Moltgen*, Tiristoarele în practică — Editura Tehnică București, 1970.
3. *G. G. Jemerov*, Electricitate 4 — 1968, pg. 24.

Steady State of the Synchronous Generators Connected by a Controlled Rectifier.

The paper presents a method to calculate excitation of a synchronous machine connected by a controlled rectifier in three phase bridge and determinates the characteristics.

C.Z.: 621.3.015: 513.83

METODĂ TOPOLOGICĂ UNIVERSALĂ ÎN COARBORI NEORIENTAȚI PENTRU CIRCUITE CU SURSE COMANDATE OARECARE*

M. PREDA, IOANA DOROBANȚU

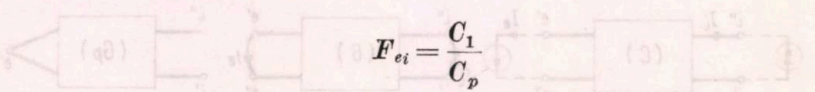
În lucrare se extinde metoda topologică a coarborilor neorientați la circuite electrice și electronice cu elemente active ale căror scheme echivalente conțin orice fel de surse comandate.

Gradul mare de generalitate al metodei topologice propuse îi imprimă acestuia un caracter universal.

Un rol central în utilizarea metodei îl are pasivizarea corespunzătoare a surselor comandate ale căror laturi active nu intervin în perechile de coarbori comuni, fiind necesară considerarea grafelor pentru toate combinațiile posibile de surse comandate din circuit (cu laturi conținute și neconținute).

1. Formulă topologică generală și unitară în impedanță pentru circuite cu surse de tensiune comandate de curent

Formula topologică generală și unitară :


$$F_{ei} = \frac{C_1}{C_p} \quad (1)$$

exprimă în impedanță orice funcție de rețea (în formă operațională) de mers în gol sau scurtcircuit între două porți oarecare ale unui circuit multiport ale cărui elemente dependente sînt exclusiv surse de tensiune comandate de curent [2].

În formula topologică (1) numărătorul C_1 reprezintă suma valorilor algebrice ale perechilor de coarbori comuni în graful (G) al circuitului (C), care conțin latura activă unitate atașată diportului intrare-ieșire al circuitului. C_p este suma valorilor algebrice ale perechilor de coarbori comuni în graful (G_p) al circuitului (C_p) cu diportul intrare-ieșire pasivizat corespunzător funcției de circuit F_{ei} (fig. 1, a, b, c, d).

* Manuscris predat redacției la data de 11 martie 1977.

Prin definiție graful (G) al circuitului (C) conține :

a) câte o latură de transmitanță egală cu impedanța Z , pentru fiecare dipol pasiv ;

b) pentru fiecare sursă de tensiune comandată de curent, $E_c = Z_{cc} I_c$, câte două laturi de transmitanță Z_{cc} , latura de comandă $Z_{c,c,c}$ și latura comandată $Z_{c,c,c}$, poziționate și orientate în graf ca în fig. 2, b.

c) o pereche de laturi cu transmitanța 1, una l_i la poarta de intrare și alta l_e la poarta de ieșire, orientate în graf ca în fig. 1, a, b, c, d. Se observă că sensul laturii l_i este invers față de sensul sursei de curent sau de tensiune corespunzătoare mărimii de intrare de la poarta de intrare.

Laturilor cu transmitanțe unitare li se atașează o săgeată sau două după cum pasivizarea sursei atașate porții la obținerea circuitului (C_p) se face prin scurtcircuitarea bornelor acesteia (cazul sursei de tensiune) respectiv prin lăsarea lor în gol (cazul sursei de curent) (fig. 1, a, b, c, d).

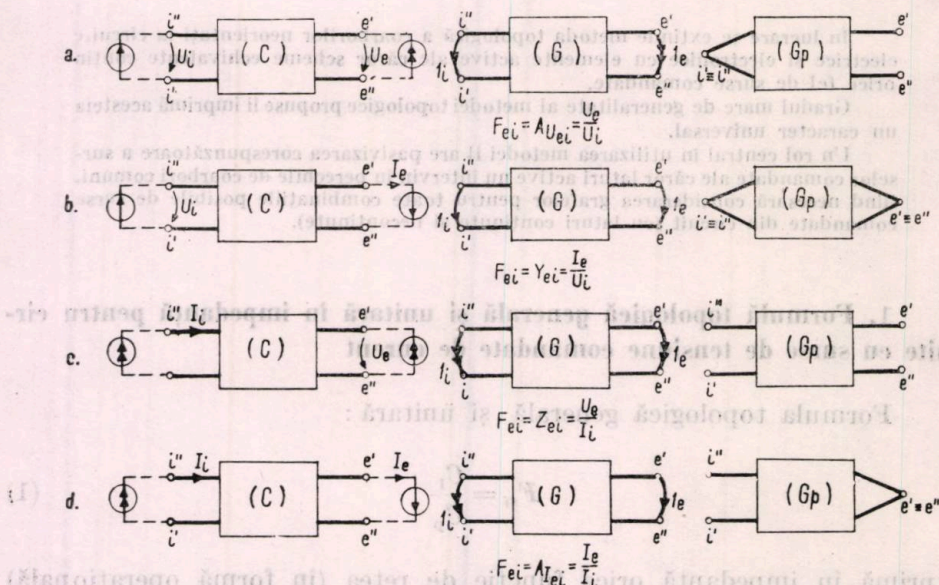


Fig. 1. Laturile din graf corespunzătoare diportului intrare-ieșire la calculul diferitelor funcții de rețea; modul de pasivizare al porților de intrare și de ieșire, corespunzător funcției de rețea cerute.

Se numește pereche de coarbori comuni o pereche de coarbori corespunzători acelorași elemente ale circuitului, unul dintre coarborii perechii fiind format din laturile de comandă iar celălalt din laturile comandate ale acelorași surse.

O pereche de coarbori comuni care conțin latura activă unitate constituie prin definiție o pereche de coarbori, unul conținând latura l_i împreună cu eventuale laturi comandate ale surselor de tensiune comandate de curent, iar celălalt latura activă l_e împreună cu laturile de comandă ale acelorași surse.

În scopul extinderii formulei topologice (1) și la alte circuite decit cele pentru care a fost demonstrată în lucrarea [2], se consideră mai întâi cazul unui circuit conținând cu unic element dependent o sursă de tensiune comandată de curent și se introduc noi notații și interpretări referitoare la pasivitate și determinarea perechilor de coarbori comuni.

2. Cazul sursei de tensiune comandate de curent

Termenii care intervin în formula (1) se grupează în acest caz în două categorii: termeni care conțin impedanța Z_{cc} și care nu o conțin. Termenii din prima categorie corespund unor perechi de coarbori comuni care conțin perechea de laturi de transmitanță Z_{cc} din grafele (G) și respectiv (G_p) (alcătuite așa cum s-a arătat mai sus) după cum intervin la numărătorul respectiv la numitorul funcției de rețea.

Termenii din a doua categorie sînt coarborii grafului circuitului obținut din circuitul inițial prin pasivizarea sursei comandate: prin scurtcircuitarea atât a nodurilor c' și c'' ale sursei de tensiune cit și a nodurilor C' și C'' ale laturii curentului de comandă, de scurtcircuit (fig. 2, c).

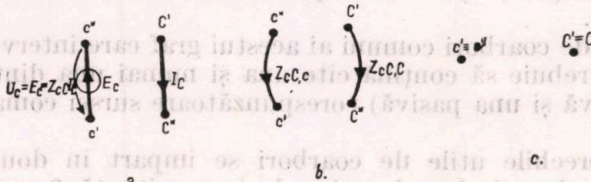


Fig. 2. Sursa de tensiune comandată de curent (a). Graful sursei, utilizat la determinarea perechilor de coarbori comuni care conțin perechea de laturi active corespunzătoare acesteia (b). Modul de pasivizare al sursei de tensiune comandate de curent în vederea obținerii coarborilor ce nu conțin laturile sursei (c).

Laturilor din graf cu pondere Z_{cc} și Z_{cc} li se asociază câte o săgeată corespunzătoare sursei de tensiune, respectiv mărimii complementare (E_c) a mărimii de comandă (I_c) (fig. 2, b). Această regulă de asociere a săgeților este utilă pentru a indica în graf cum se modifică acesta cînd sursa comandată se pasivizează (laturile cu două săgeți se elimină prin gol, laturile cu o săgeată se elimină prin scurtcircuit).

3. Cazul sursei de tensiune comandate de tensiune

Se consideră sursa de tensiune comandată de tensiune reprezentată în fig. 3, a, definită prin ecuațiile:

$$I_c = 0, E_c = \beta_{cc} U_c \quad (2)$$

Completînd circuitul la poarta de comandă cu impedanța auxiliară finită Z_c (fig. 3, b), deoarece $U_c' = I_c' \cdot Z_c$, sursa dependentă consi-

derată se exprimă ca o sursă de tensiune comandată de curentul I'_C prin intermediul impedanței $\beta_{cC} Z_C$.

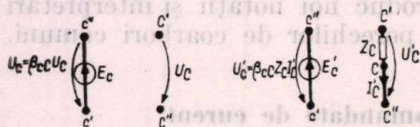


Fig. 3. Sursa de tensiune comandată de tensiune.

Z_C și $\beta_{cC} Z_C$ nu pot aparține aceleiași perechi de coarbori comuni (fapt evident și din considerente topologice, laturile din graf cu ponderile Z_C și $(\beta_{cC} Z_C)_C$ fiind legate în serie).

Ca urmare, la limită cînd $Z_C \rightarrow \infty$, în expresia oricărei funcții de rețea rămîn numai acei termeni care-l conțin pe Z_C ca factor (acesta simplificîndu-se), pentru sursa de tensiune comandată de tensiune rezultînd graf din fig. 4, b, în care apar laturile cu transmitanțe adimensionale 1 și β_{cC} .

Perechile de coarbori comuni ai acestui graf care intervin în formula topologică (1) trebuie să conțină cite una și numai una dintre cele două laturi (una activă și una pasivă) corespunzătoare sursei comandate considerate.

Astfel, perechile utile de coarbori se împart în două categorii, care conțin perechea de laturi active de transmitanță β_{cC} și care conțin latura pasivă unitară.

Perechile de coarbori comuni din prima categorie se determină dintr-un graf alcătuit ca pentru o sursă de tensiune comandată de curent

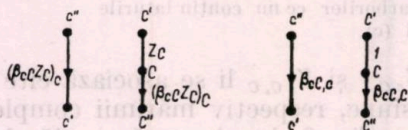


Fig. 4. Grafe auxiliare utilizate.

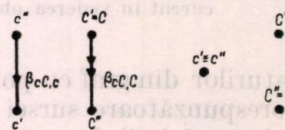


Fig. 5. Grafurile sursei de tensiune comandate de tensiune utilizat la determinarea perechilor de coarbori comuni care conțin perechea de laturi a sursei (a). Modul de pasivizare al surse în vederea obținerii coarborilor ce nu conțin laturile acesteia (b).

(fig. 5, a), perechea de laturi active avînd transmitanța β_{cC} și luîndu-le numai pe acelea care conțin perechea de laturi active β_{cC} (latura pasivă cu pondere 1 nefiind conținută, poate fi scurtcircuitată).

Perechile de coarbori comuni ce conțin latura pasivă cu transmitanță unitară, care evident poate fi înlocuită prin lăsarea în gol a nodurilor de

comandă (latura $\beta_{c,c}$ neintrind în coarbori, conform regulii lui Feussner este scurtcircuitată), sint totodată coarborii grafului circuitului cu sursa de tensiune comandată de tensiune pasivizată corespunzător: bornele sursei de tensiune, c' , c'' , scurtcircuitate, iar bornele mărimii de comandă, C' , C'' , lăsate în gol (fig. 5, b). Modul de pasivizare al sursei dependente considerate poate fi pus în evidență în graf prin asocierea de una respectiv două săgeți laturilor comandate ($\beta_{c,c}$) și de comandă ($\beta_{c,c}$) fig. 5, a.

4. Cazul sursei de curent comandate de curent

Se consideră sursa de curent comandată de curent din fig. 6, a, definită prin ecuațiile:

$$U_c = 0, \quad J_c = \alpha_{cc} I_c \quad (3)$$

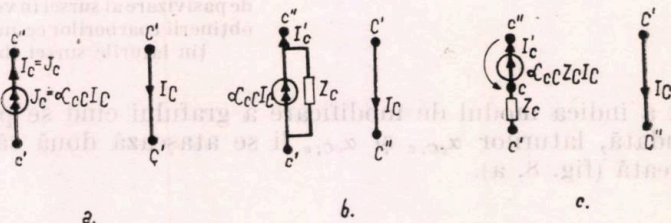


Fig. 6. Sursa de curent comandată de curent.

Dacă se completează circuitul acestei surse cu impedanța auxiliară Z_c de valoare finită, conectată în paralel cu sursa comandată (fig. 6, b), prin transfigurarea sursei de curent în sursă de tensiune se obține circuitul din fig. 6, c, cu sursă de tensiune comandată de curent.

Graful corespunzător circuitului din fig. 6, c, este reprezentat în fig. 7, a.

Trecînd la limită pentru $Z_c \rightarrow \infty$ și ținînd seama de liniaritatea circuitului (ca și de faptul că laturile din graf de transmitanțe ($\alpha_{cc} Z_c$) și Z_c fiind legate în serie nu pot aparține acelorași perechi de coarbori comuni) pentru sursa de curent comandată de curent rezultă graful din fig. 7, b, alcătuit dintr-o latură pasivă avînd transmitanța egală cu unitatea și o pereche de laturi active cu transmitanța α_{cc} , perechile de coarbori comuni care intervin în formula topologică (1) trebuînd să conțină cîte una și numai una dintre aceste laturi.

Perechile de coarbori comuni care-l conțin pe α_{cc} pot fi determinați din graful din fig. 8, a, alcătuit ca pentru o sursă de tensiune comandată de curent, cu deosebirea că în locul lui Z_{cc} apare α_{cc} , luînd numai acele perechi de coarbori comuni care conțin perechea de laturi de transmitanță α_{cc} (latura unitară nefiind conținută în perechea de coarbori comuni poate fi scurtcircuitată).

Perechile de coarbori comuni care conțin latura pasivă cu transmitanță egală cu unitatea sint, conform regulii lui Feussner, coarborii grafului cu această latură eliminată prin lăsare în gol și cu laturile $\alpha_{c,c}$ și $\alpha_{c,c}$ eliminate prin scurtcircuit (acestea nefiind conținute).

Graful astfel obținut este graful circuitului cu sursa de curent comandată de curent pasivizată corespunzător: lăsare în gol a nodurilor sursei de curent comandate și scurtcircuit al nodurilor de comandă (fig. 8, b).

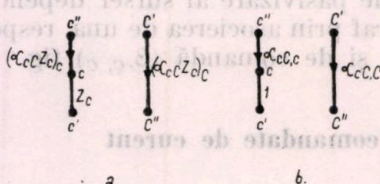


Fig. 7. Grafe auxiliare utilizate în demonstrație.

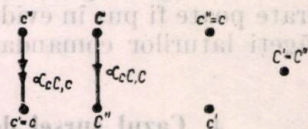


Fig. 8. Graful sursei de curent comandate de curent utilizat la determinarea perechilor de coarbori comuni care conțin perechea de laturi a sursei (a). Modul de pasivizare al sursei în vederea obținerii coarborilor ce nu conțin laturile sursei (b).

Pentru a indica modul de modificare a grafului cînd se pasivizează sursa comandată, laturilor $\alpha_{c c, c}$ și $\alpha_{c c, c}$ li se atașează două săgeți, respectiv o săgeată (fig. 8, a).

5. Cazul sursei de curent comandate de tensiune

Se consideră sursa de curent comandată de tensiune reprezentată în fig. 9, a, definită prin ecuațiile

$$I_c = 0, J_c = Y_{cc} U_c \quad (4)$$

Completînd circuitul cu impedanțele auxiliare Z_c și Z_c , prin transfigurare se poate obține circuitul din fig. 9, c, cu sursă de tensiune comandată de curent.

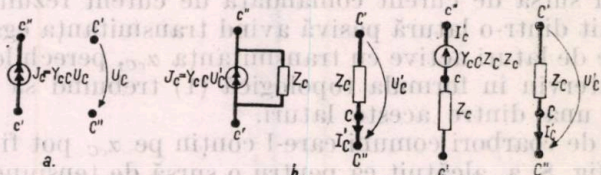


Fig. 9. Sursa de curent comandată de tensiune.

Graful circuitului din fig. 9, c, este reprezentat în fig. 10, a.

Perechile de coarbori comuni care intervin în formula topologică (1), valabilă pentru calculul oricărei funcții de rețea a circuitului din fig. 9, c, pot conține fie perechea de laturi active cu transmitanța $Y_{cc} Z_c Z_c$, fie cite una sau ambele laturi pasive de transmitanțe Z_c și Z_c , celelalte combinații de laturi ale grafului conducînd la laturi legate în serie.

Trecînd la limită pentru $Z_c \rightarrow \infty$ și $Z_c' \rightarrow \infty$, circuitul din fig. 9, b, deci și cel echivalent cu el din fig. 9, c, tinde către circuitul inițial, iar în expresia formulei topologice rămîn numai acei termeni care conțin produsul $Z_c Z_c'$.

Ca urmare, pentru sursa de curent comandată de tensiune se obține graful din fig. 10, b, perechile de coarbori comuni care intervin în formula topologică (1) trebuînd să conțină fie perechea de laturi active cu transmitanța Y_{cc} , fie ambele laturi pasive unitare.

Alcătuiind graful din fig. 11, a, ca pentru o sursă de tensiune comandată de curent, transmitanța laturilor active fiind egală cu Y_{cc} și luînd numai perechile de coarbori comuni care conțin perechea de laturi active de transmitanță Y_{cc} , se obțin perechile de coarbori comuni din prima categorie (nefiind conținute în coarbori, laturile unitare pot fi scurtcircuitate).

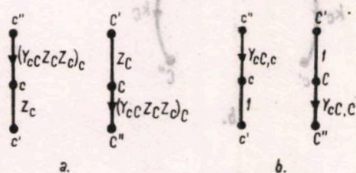


Fig. 10. Grafe auxiliare utilizate în demonstrație.

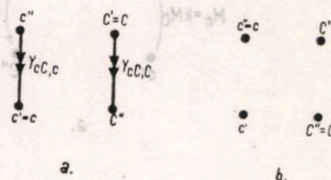


Fig. 11. Graful sursei de curent comandate de curent, utilizat în vederea determinării perechilor de coarbori comuni care conțin perechea de laturi active corespunzătoare sursei (a). Modul de pasivizare al sursei în vederea obținerii coarborilor care nu conțin laturile sursei (b).

Perechile de coarbori care conțin ambele laturi pasive de transmitanță 1 sînt totodată coarborii grafului cu laturile active $Y_{cc,c}$ și $Y_{cc,c'}$ scurtcircuitate (conform regulii lui Feussner) și cu nodurile laturilor unitare lăsate în gol.

Acesta este graful circuitului cu sursa de curent comandată de tensiune pasivizată prin lăsarea în gol atît a nodurilor sursei de curent cit și a nodurilor tensiunii de comandă (fig. 11, b).

Laturilor $Y_{cc,c}$ și $Y_{cc,c'}$ (fig. 11, a) li se atașează cite două săgeți pentru a indica cum se modifică graful circuitului cînd sursa comandată se pasivizează (prin lăsarea bornelor în gol).

6. Regulă topologică universală cu coarbori neorientați pentru circuite cu orice fel de surse comandate.

Fie un circuit cu un număr oarecare de surse comandate de orice tip:

$$M_c = k M_c' \quad (5)$$

pentru care se determină o funcție de rețea oarecare (în formă operațională)

$$F_{ei} = \frac{M_e}{M_i}$$

precum și grafele corespunzătoare acestuia (G) și (Gp) în care fiecărui element diport, inclusiv diportului intrare-ieșire (fig. 12, a, c) îi corespunde o pereche de laturi active (fig. 12, b, d) de transmitanță k respectiv 1, în cazul lui (Gp) diportul intrare-ieșire având sursele atașate pasivizate corespunzător.

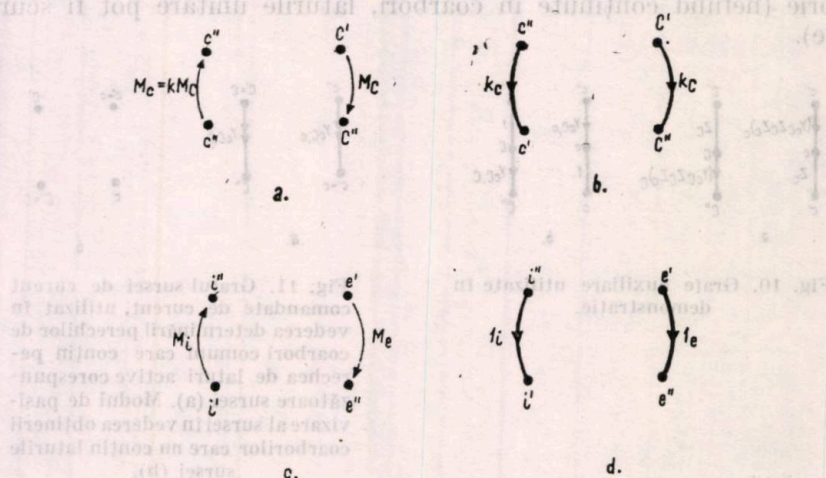


Fig. 12. Laturile din graf corespunzătoare surselor comandate (a), (b) și diportului intrare-ieșire (c), (d).

În fig. 12 a, c, săgeata dintre bornele comandate, respectiv dintre bornele de intrare, indică sensul sursei comandate, respectiv sensul sursei corespunzătoare mărimii de intrare (indiferent de natura acestora).

Din cazurile studiate în paragrafele precedente rezultă că termenii care intervin în formula topologică (1) pot conține sau nu perechea de laturi de transmitanță k corespunzătoare oricăreia dintre sursele comandate. Din demonstrație rezultă că termenii care nu conțin laturile active ale unor surse comandate corespund perechilor de coarbori comuni ai grafului circuitului cu sursele comandate respective pasivizate corespunzător.

Laturile de comandă sînt pasivizate corespunzător mărimii complementare mărimii de comandă, prin gol respectiv scurtcircuit, după cum mărimea de comandă este o tensiune, respectiv un curent (sursele pasivizate sînt asociate mărimilor complementare mărimilor de comandă). Laturile comandate sînt eliminate prin gol respectiv prin scurtcircuit, după cum corespund unor tensiuni (electromotoare) respectiv unor curenți (sursele mărimilor comandate pasivizate corespunzător).

În concluzie, în cazul general al circuitului cu orice fel de surse comandate, termenii din formula topologică (1) se obțin determinând pentru circuitul dat perechile de coarbori comuni conform următoarei reguli:

a) Se consideră toate combinațiile posibile de surse (cu laturi conținute și neconținute). Notind cu n numărul surselor comandate din circuit, se obțin 2^n combinații posibile

b) Pentru fiecare combinație de la punctul a), se pasivizează corespunzător sursele neconținute și se caută în graful circuitului astfel obținut (în total $2 \cdot 2^n$ grafe: $G, G', G'' \dots; Gp, G'_p, G''_p \dots$) perechile de coarbori comuni care conțin câte o latură comandată, respectiv latură de comandă de la fiecare sursă conținută.

Cu această regulă de determinare a perechilor de coarbori comuni, formula (1), deși își păstrează forma, devine universală, putând fi aplicată la circuite cu orice fel de elemente comandate.

7. Aplicații

Se consideră amplificatorul cu un tranzistor cu efect de câmp din fig. 13, a, a cărui schemă echivalentă la semnale mici și la frecvențe foarte mari este reprezentată în fig. 13, b.

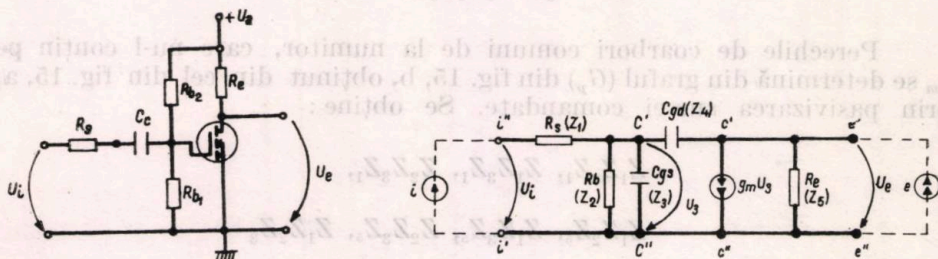


Fig. 13. Etaj de amplificare (a). Schema echivalentă la semnale mici și frecvențe foarte mari (b).

Pentru acest circuit cu sursă de curent comandată de tensiune se determină amplificarea în tensiune:

$$A_U = \frac{U_e}{U_i}$$

Graful (G) al circuitului, din care se deduc termenii lui C_1 care-l conțin pe g_m este reprezentat în fig. 14, a.

Din acest graf se aleg perechile de coarbori comuni care conțin atât perechea de laturi active de transmitanță $1(l_{i,c}, l_{e,c})$ atașate dipor-tului intrare-ieșire cât și perechea de laturi active de transmitanță g_m (g_m, c, g_m, c). Se obține:

$$1Z_1Z_3Z_1Z_5 g_m$$

Pasivizînd sursa comandată (gol atît la poarta de comandă cit și la cea comandată) se obține graful (G) din fig. 14, b, pentru care se găsește o singură pereche de coarbori comuni ce conține perechea de laturi unitare

$$1Z_2Z_3Z_5$$

Graful (G_p) al circuitului este cel reprezentat în fig. 15, a.

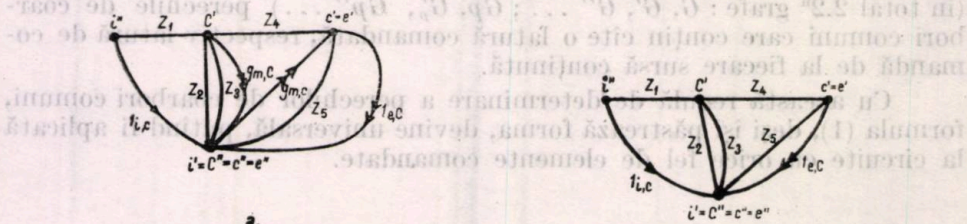


Fig. 14. Grafe (G) de calcul.

Perechile de coarbori comuni ai grafului (G_p) care conțin perechea de laturi active corespunzătoare sursei comandate sînt :

$$g_m Z_1 Z_2 Z_3 Z_5$$

Perechile de coarbori comuni de la numitor, care nu-l conțin pe g_m se determină din graful (G_p) din fig. 15, b, obținut din cel din fig. 15, a, prin pasivizarea sursei comandate. Se obține :

$$Z_1 Z_2 Z_1, Z_1 Z_3 Z_1, Z_2 Z_3 Z_1,$$

$$Z_1 Z_2 Z_5, Z_1 Z_3 Z_5, Z_2 Z_3 Z_5, Z_1 Z_2 Z_3$$

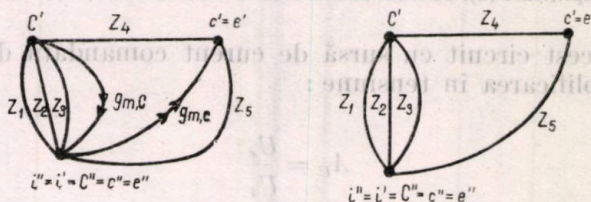


Fig. 15. Grafe (G_p) de calcul.

Calculînd atît semnul termenilor de la numitor cit și al celor de la numărător cu una dintre regulile de semn cunoscute [3], [4] rezultă :

$$A_U = \frac{U_c}{U_i} = - \frac{C_1}{C_p} = - \frac{Z_2 Z_3 Z_5 (Z_1 g_m - 1)}{Z_1 Z_2 Z_3 + (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)(Z_1 + Z_5) + g_m Z_1 Z_2 Z_3 Z_5}$$

Concluzii

În lucrare se extinde metoda topologică a coarborilor neorientați la circuite electrice și electronice cu orice fel de surse comandate.

Regula topologică dedusă se bazează pe pasivizarea corespunzătoare a surselor comandate ale căror laturi active nu intervin în perechile de coarbori comuni și pe găsirea perechilor de coarbori comuni ai grafelor corespunzătoare tuturor combinațiilor de surse (cu laturi conținute și neconținute) din circuit.

Rezultatele obținute în cazul surselor comandate pot fi extinse la circuite electronice cu orice fel de constrângeri ideale pentru analiza pe bucle: transformatoare ideale, convertoare de impedanță negativă, nului, etc.

Catedra de electrotehnică II
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. S. Seshu, M. B. Reed, Linear graphs and electrical networks, Reading, Massachusetts, U.S.A., 1961.
2. M. Preda, Ioana Dorobanțu, St. Cerc. Energ. Electr., tom. 23, nr. 2, București, 1973.
3. M. Preda, Bazele Electrotehnicii, vol. II, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1969.
4. M. Preda, Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., 19, 1, Bucarest, 1974.

Very General Topological Method in Undirected Cotrees for Arbitrary Controlled — Sources Circuits

The extension of the topological method of undirected cotrees to electric and electronic circuits with active elements, represented by equivalent circuits containing arbitrary controlled sources, results in a very general method of analysis of electric circuits.

The main procedure in applying the proposed method consists in the fact that the controlled sources whose active branches does not enter in the common cotree-pairs are correspondingly rendered passive; in this case the graphs of all possible combinations of controlled sources in the circuit (with included and non-included branches) must be considered.

Concluzii

În lucrare se extinde metoda topologică a circuitelor neuronale în circuite electrice și electronice cu orice fel de surse comandate. Regula topologică dedusă se bazează pe pasivizarea corespunzătoare a surselor comandate ale căror laturi active nu intervin în perechiile de cearburi comune și pe găsirea perechilor de cearburi comune ai grănelor corespunzătoare tuturor combinațiilor de surse (cu laturi comune și ne comune) din circuit. Rezultatele obținute în cazul surselor comandate pot fi extinse la circuite electronice cu orice fel de constrângeri ideale pentru analiză, de pildă: transformatoare ideale, convertitoare de impedanță negativă, unitor, etc.

Trădător de electricitate 11
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Budești” București

BIBLIOGRAFIE

1. S. Zeman, M. B. Levy, Linear graphs and electrical networks Reading, Massachusetts, U.S.A., 1961.
2. M. Vinde, Ioana Dăscăluș, St. Gheorghe, Electric, tom. 23, nr. 2, București, 1973.
3. M. Vinde, Bazele Electrotehnicii, vol. II, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1969.
4. M. Vinde, Rev. Roum. Sci. Tech. Electrotehnica et Energ., 19, 1, București, 1974.

Very General Topological Method in Unidirectional Circuits for Arbitrary Controlled Source Circuits

The extension of the topological method of unidirectional circuits to electric and electronic circuits with active elements, represented by equivalent circuits containing arbitrary controlled sources, results in a very general method of analysis of electric circuits.

The main procedure in applying the proposed method consists in the fact that the controlled sources whose active branches does not enter in the common circuit-pairs are correspondingly rendered passive; in this case the graphs of all possible combinations of controlled sources in the circuit (with included and non-included branches) must be considered.

C.Z. : 621.313.333

ASPECTE ALE STUDIULUI MOTORULUI ASINCRON TRIFAZAT CU ROTOR MASIV*

N. GALAN, I. BEȘTEA

În lucrare se analizează parametrii schemei echivalente a motorului cu rotor masiv, evidențiindu-se variația acestora funcție de caracteristicile rotorului.

Se indică un model idealizat care să permită un calcul mai exact și se prezintă date experimentale pentru mai multe tipuri de rotoare.

Introducere

În ultima vreme există un număr important de lucrări care se ocupă de studiul și experimentarea motorului cu rotor masiv, precum și de îmbunătățirea performanțelor acestui motor, [1], [2], [3], [7], [8], [12].

O explicație constă în aceea că motorul cu rotor masiv constituie o soluție cu anumite avantaje în domeniul vitezelor foarte mari și în domeniul anumitor acționări cu viteză reglabilă cu motor asincron, [2], [4], [5]. În anumite prelucrări pe mașini unelte, în aviație și în alte domenii se utilizează motoare asinerone cu turații sincrone foarte mari. Construcția acestor motoare și tehnologia lor diferă substanțial de a mașinilor electrice asincrone obișnuite, deoarece asupra rotorului se exercită forțe mecanice mari, motorul trebuie să funcționeze cu vibrații minime și aceasta la turații sincrone de ordinul 120.000 — 144.000 rot/min și chiar de 180.000 rot/min (frecvența de alimentare fiind $f_1 = 2\,000 - 2\,400$ Hz și respectiv $f_1 = 3\,000$ Hz); puterea acestor motoare este de ordinul sutelor de wați, [4], [5].

În [2] se analizează variația vitezei la motorul asincron cu rotor masiv prin variația tensiunii de alimentare și a frecvenței de alimentare, evidențiindu-se avantajele și dezavantajele pe care le prezintă acest motor în cadrul unor astfel de acționări.

Pentru îmbunătățirea caracteristicilor de funcționare ale acestui motor, rotorul se realizează sub mai multe forme constructive: rotor cu inele de cupru la capete, rotor cu creștături longitudinale, rotor acoperit cu un strat subțire de cupru, rotor cu bare de cupru introduse în creștăturile longitudinale și cu inele de capăt, rotor compus din mai multe straturi alternând straturi de cupru cu straturi de fier, rotor realizat prin combinarea mai multor soluții constructive care au fost indicate mai sus [1], [4], [5].

* Manuscris predat redacției la data de 6 aprilie 1977.

1. Schema echivalentă a motorului asincron cu rotor masiv.

Schema echivalentă a unei mașini electrice constituie o formă avantajoasă în studiul regimului de funcționare staționar, din această cauză și la motorul cu rotor masiv se urmărește în cele mai multe cazuri stabilirea unei scheme echivalente. La aceste scheme echivalente rezistența statorică R_1 , reactanța de scăpări $X_{\sigma 1}$ și reactanța de magnetizare X_{μ} rămân aceleași ca și la motorul asincron obișnuit; ceea ce apare nou la motorul cu rotor masiv sînt expresiile parametrilor rotorici care diferă substanțial de parametrii rotorici ai motorului asincron obișnuit. În figura 1 se prezintă schema echivalentă în T (a) și schema echivalentă în Γ (b).

De menționat că în literatura de specialitate se întîlnesc mai multe expresii pentru parametrii rotorici ai motorului cu rotor masiv.

În lucrarea [6] se aproximează curba de magnetizare a rotorului $B = f(H)$ ca în figura 2 și se stabilesc pentru parametrii rotorici următoarele expresii:

$$r'_2(s)/s = 57,2 \frac{3 L^2 (k_1 w_1)^2 B_s f_1}{p \sigma \tau s E} \frac{1}{s E}; \quad x'_2(s)/s = 0,5 r'_2(s)/s \quad (1)$$

unde

$$E = \sqrt{2} \frac{\tau}{\pi} (k_1 w_1) L \omega_1 B_{\delta}; \quad \frac{\delta}{\tau} = \frac{3 B_{\delta}}{4 \sqrt{5} B_s}; \quad \delta = \sqrt{\frac{2 H_T}{s \omega_1 \sigma B_s}}$$

B_{δ} — valoarea maximă a fundamentalei din întrefier,
 L — lungimea rotorului.

Punctul de coordonate (B_s, H_T) de pe curba de magnetizare reală se poate determina calculînd produsul $B_s H_T$, [6]. Acești parametri s-au stabilit fără a se ține seama de efectul de capăt. Dat fiind ipotezele de calcul acești parametri corespund la alunecări mari cînd zona activă este saturată.

În lucrarea [7] pe baza ecuațiilor lui Maxwell se deduc parametrii rotorici care se prezintă sub următoarea formă:

$$r'_2(s)/s = r'_2(1)/\sqrt{s i_{12}}; \quad x'_2(s)/s = \frac{a_x}{a_r} r'_2(s)/s \quad (2)$$

unde

$$r'_2(1) = k_A k_L a_r \sqrt{\frac{\mu_x(1) \omega_1}{2 \sigma}}; \quad a_r = 1,4; \quad a_x = 0,8; \quad i_{12} = I_{12}/I_N;$$

$\mu_x(1) = B_{2N}/A_{2N}$; $A_{2N} = H_{x0}$ — componenta tangențială a intensității cîmpului magnetic la suprafața rotorului. Parametrii sînt deduși pentru $s > 10/b$ și $\mu_x = \mu_y = \mu_x(1)/i_{12}$. Pentru alunecări mici $s \leq 10/b$ se obține:

$$r'_2(s)/s = a_r k_A k_L \left(1 - \frac{\pi^2}{\tau^2} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \frac{\alpha}{\sigma}; \quad \alpha = \frac{\pi}{\tau} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + b^2 s^2}} \quad (3)$$

$$x'_2(s)/s = a_r k_A k_L \left(1 + \frac{\pi^2}{\tau^2} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \frac{\beta}{\sigma}; \quad \beta = \frac{\pi}{\tau} \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + b^2 s^2}}$$

Prin coeficientul k_L se ține seama de efectul de capăt :

$$k_L = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\tau}{L} \text{ pentru } p = 1; k_L = \left(1 + \frac{\tau^2}{L^2}\right)^{0.5} \text{ pentru } p > 1, \text{ sau} \quad (4)$$

$$k_L = \frac{\pi L}{\tau} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{\pi L}{2\tau}\right) / \left[\frac{\pi L}{\tau} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{\pi L}{2\tau}\right) - 2\right] \quad (5)$$

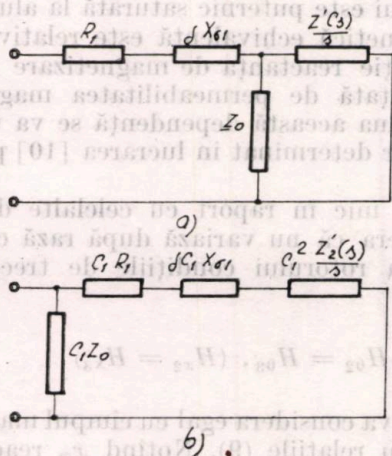


Fig. 1. Schema echivalentă a motorului asincron cu rotor masiv : a) schema în T; b) schema în Γ .

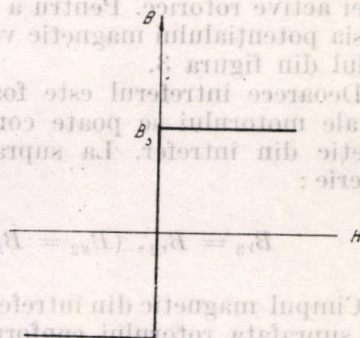


Fig. 2. Curba de magnetizare idealizată $B = f(H)$.

În lucrarea [8] se consideră rotorul de forma unui cilindru al cărui perete are grosimea Δ și aplicând ecuațiile lui Maxwell se determină parametrii rotorici sub forma :

$$z'_2(s) = r'_2(s) + j x'_2(s) = (1 + j) 12 (k_1 w_1)^2 R_{20} k_r(s) \quad (6)$$

unde

$$A = \sqrt{\omega_1 \mu \sigma / 2}$$

$R_{20} = L k_L / \pi D_m \sigma \Delta$; $k_r(s) = \frac{A \Delta}{2} \operatorname{cth} \frac{A \Delta}{2}$; D_m — diametrul mediu al rotorului.

În lucrarea [9] parametrii rotorici ai schemei echivalente au forma :

$$z'_1(s)/s = r'_2(s)/s + j x'_2(s)/s = (1,6 + j 0,96) \frac{3(k_{w1} w_1)^2 L}{p k'_L \sqrt{s}} \sqrt{\frac{\mu_e f_1}{\sigma}} \quad (8)$$

valorile factorului k'_L sînt calculate în [9]; μ_e este permeabilitatea magnetică la suprafața rotorului.

Din relațiile (1), (2), (6) și (8) rezultă că parametrii rotorice au expresii diferite funcție de ipotezele și metodele de calcul admise, aceste expresii, cantitativ, diferă substanțial una de alta, fapt care rezultă și din analiza raportului $x'_2(s)/r'_2(s) = u$, astfel după (1) $u = 0,5$; după (2) $u = 0,57$; după (8) $u = 0,6$; $u = 1$.

În toate schemele echivalente pentru reactanța de magnetizare se ia aceeași expresie ca și la mașinile asincrone obișnuite, reactanță care este calculată în ipoteza că armăturile adiacente întrefierului au permeabilitatea magnetică infinită ($\mu_{Fe} \approx \infty$). În cazul motorului asincron cu rotor masiv, zona activă a rotorului este puternic saturată la alunecări relativ mari, iar permeabilitatea magnetică echivalentă este relativ mică $\mu_{Fe}/(\mu_0 E [50, 150])$, în această situație reactanța de magnetizare corespunzătoare întrefierului este influențată de permeabilitatea magnetică a zonei active rotorice. Pentru a evalua această dependență se va utiliza expresia potențialului magnetic vector determinat în lucrarea [10] pentru modelul din figura 3.

Deoarece întrefierul este foarte mic în raport cu celelalte dimensiuni ale motorului se poate considera că nu variază după rază cîmpul magnetic din întrefier. La suprafața rotorului condițiile de trecere se pot scrie :

$$B_{r3} = B_{r2}, (B_{y2} = B_{y3}); H_{\theta 2} = H_{\theta 3}, (H_{x2} = H_{x3}) \quad (9)$$

Cîmpul magnetic din întrefier se va considera egal cu cîmpul magnetic de la suprafața rotorului conform cu relațiile (9). Notînd x_m reactanța de magnetizare calculată în ipoteza că armăturile adiacente întrefierului au $\mu_{Fe} \approx \infty$ și cu x_μ reactanța întrefierului calculată ținînd seama de permeabilitatea magnetică a zonei rotorice active se obține :

$$\frac{x_\mu}{x_m} = \frac{1 + \left(m \operatorname{th} \frac{\pi}{\tau} \Delta\right)^2}{\left(1 + \frac{m \tau}{\pi \delta} \operatorname{th} \frac{\pi}{\tau} \Delta\right)^2} \quad (10)$$

În figura 4 s-au trasat curbele $x_\mu/x_m = f(m)$ pentru diferite valori ale raportului $\frac{\Delta}{\delta}$. Se constată că reactanța x_m variază în limite largi în

domeniul permeabilităților magnetice care intervin în calculul parametrilor rotorici. Prin urmare nu este justificată utilizarea aceleiași reactanțe de magnetizare în schema echivalentă a motorului asincron cu rotor masiv ca și la motorul asincron obișnuit. Se impune o corecție a reactanței de magnetizare din schema echivalentă a motorului cu rotor masiv, care se poate face cu ajutorul curbelor trasate în figura 4. La calculul parametrilor rotorici, în ipoteza unei saturații pronunțate se consideră că întreg rotorul este saturat la același nivel, ceea ce nu corespunde realității deoarece saturația are loc numai în zona activă a rotorului. Pentru a elimina această aproximație se poate construi un model idealizat ca cel din figura 3 în care rotorul este format din două zone : zona 2 adică zona activă care este saturată la alunecări relativ mari și a cărei lățime Δ

este de ordinul de mărime al adâncimii de pătrundere $\frac{1}{\alpha} \left(\Delta \geq \frac{1}{\alpha} \right)$ și zona 1 care este zona nesaturată a rotorului.

Pentru acest model, la alunecări relativ mici, se pot particulariza rezultatele din lucrarea [11], unde se are în vedere și variația reactanței de magnetizare în funcție de permeabilitatea magnetică a zonei active

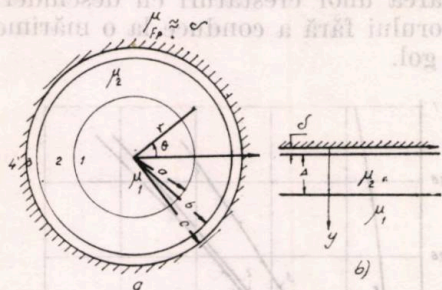


Fig. 3. Model idealizat pentru calculul cimpului magnetic: a) coordonate cilindrice; b) coordonate rectangulare.

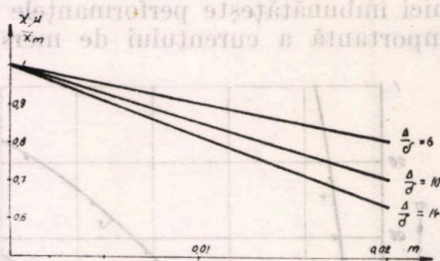


Fig. 4. Curbele $x_\mu/x_m = f(m)$ pentru diferite valori ale grosimii zonei active rotorice.

a rotorului. Zona activă a rotorului variază în limite restrinse în raport cu alunecarea s , deoarece la alunecări mici permeabilitatea magnetică este mare (zona activă este nesaturată), iar la alunecări mari permeabilitatea magnetică a zonei este mică datorită saturației, adică produsul $s\mu_2$, de care depinde adâncimea de pătrundere, variază în limite restrinse pe anumite intervale ale alunecării. Se constată că un calcul analitic suficient de precis este dificil de aceea prezintă interes experimentările făcute pe acest tip de motor, care pot furniza multe informații asupra ipotezelor de calcul, asupra performanțelor motorului, asupra expresiilor stabilite pentru parametrii rotorice, etc.

2. Experiențe efectuate pe motorul cu rotor masiv.

Pentru studiul experimental s-a utilizat un motor asincron la care rotorul în scurtcircuit a fost înlocuit cu un rotor masiv; ca motor asincron cu rotor în scurtcircuit are următoarele date:

$P_N = 150 \text{ W}$; $U_N = 220/380 \text{ V}$; $n_N = 2820 \text{ rot/min}$; $Z_1 = 12$; $k_{w1}w_1 = 595$;
 $X_{1\sigma} = 24\Omega$; $R_1 = 26,6\Omega$; $D = 49,6 \text{ mm}$; $\delta = 0,3 \text{ mm}$; $L = 62 \text{ mm}$;
 $X_m = 648 \Omega$, $\cos \varphi_1 = 0,67$.

În cadrul acestor experiențe s-au realizat 9 tipuri de rotoare: masiv, cu 6 creștături longitudinale ($Z_2 = 6$), cu 12 creștături longitudinale ($Z_2 = 12$), fiecare rotor a fost încercat fără inele de capăt și cu inele de capăt; inelele de capăt au fost construite din cupru și au fost de două tipuri cu secțiune mică $S_1 = 6 \times 3 \text{ mm}^2$ și inele de secțiune mai mare $S_2 = 5 \times 6 \text{ mm}^2$, diametrul exterior al celor două tipuri de inele $D_{ei} = D = 49,6 \text{ mm}$, dimensiunea inelului după rază a fost menținută aceeași $= 6 \text{ mm}$; creștăturile au lățimea de $0,8 \text{ mm}$ și adâncimea de 4 mm .

Experimentările au fost efectuate în scopul de a verifica unele elemente din cadrul teoriei motorului cu rotor masiv și de a evalua experimental variația performanțelor motorului cu rotor masiv funcție de construcția rotorului.

În literatura de specialitate există puține experiențe cu privire la motoarele cu rotor masiv de puteri mici, iar rotoarele cu creștături longitudinale experimentale au creștături cu deschiderea relativ mare (de ordinul milimetrilor), [1], [3]. Practicarea unor creștături cu deschideri mici îmbunătățește performanțele motorului fără a conduce la o mărime importantă a curentului de mers în gol.

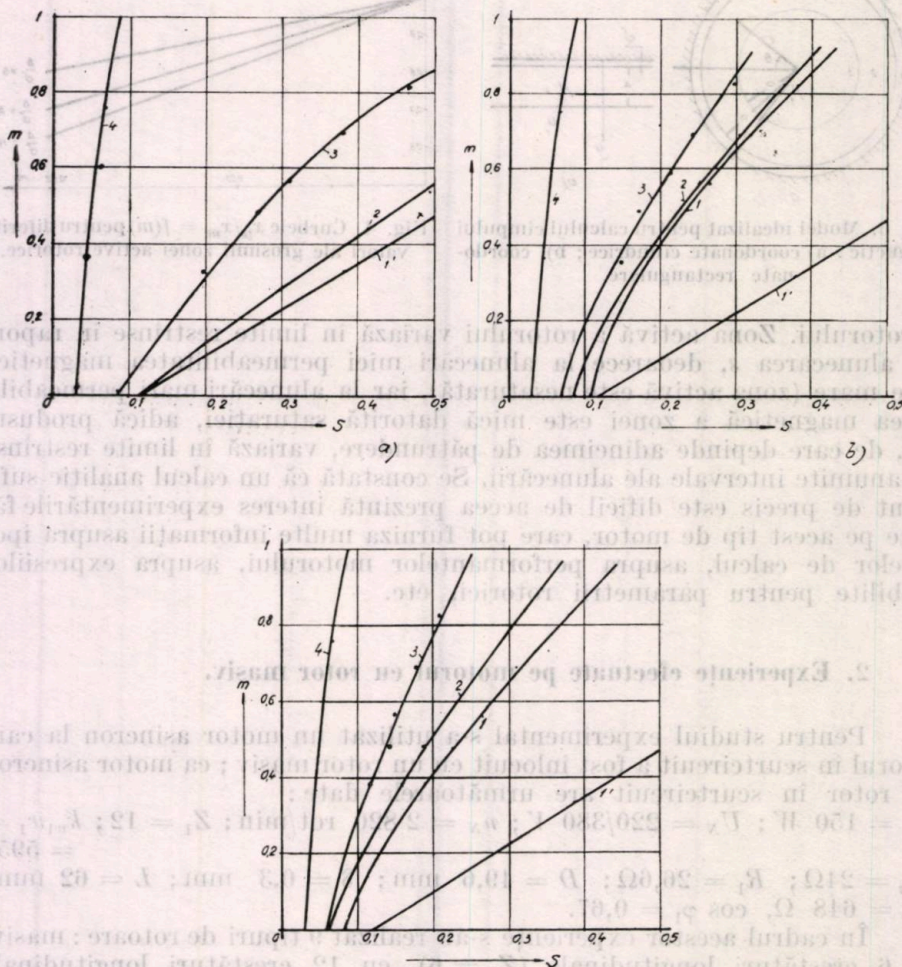


Fig. 5. Curbele cuplului $m = f(s)$: a) rotoare fără inel de capăt; b) rotoare cu inele de capăt de secțiune mică; c) rotoare cu inele de capăt cu secțiune mare; 1 și 1' — rotor fără creștături; 2 — rotor cu 6 creștături; 3 — rotor cu 12 creștături; 4 — motor cu rotor în scurtcircuit

În figura 5 s-au trasat curbele cuplului funcție de alunecarea s , (de precizat că în ordonată s-a trecut cuplul electromagnetic al generatorului de curent continuu antrenat de motor în unități relative, generato-

rul a funcționat cu excitație constantă, adică cuplul la arborele motorului se obține dacă la cuplul măsurat se adună pierderile mecanice și pierderile în fier ale generatorului); aceste curbe scot în evidență creșterea cuplului în raport cu tipul de rotor utilizat. Experimentarea efectuată în aceste condiții permite evaluarea variației cuplului util la arborele motorului funcție de tipul constructiv al rotorului utilizat. Se constată că pentru $Z_2 = 6$ cuplul crește relativ puțin, atât în cazul cînd rotorul nu are inele la capete (fig. 5 a) cît și în cazul în care rotorul are la capete inele de secțiune mică ($S_1 = 6 \times 3$ mm), figura 5 b.

Prin practicarea creștăturilor se modifică adîncimea de pătrundere echivalentă, [17], [20]; liniile de curent din rotor au în cea mai mare parte direcția după axa mașinii în raport cu rotorul masiv obișnuit. Practicarea creștăturilor conduce la o creștere a rezistenței de capăt, adăugarea inelelor de secțiune mică nu modifică substanțial această rezistență; cînd se adaugă un inel de secțiune mai mare rezistența de capăt se micșorează și se pot ajunge la o creștere importantă a cuplului, figura 5 c. La creșterea numărului de creștături creșterea cuplului este importantă, deoarece în acest caz adîncimea de pătrundere echivalentă este mult mărită, astfel că rezistența de capăt influențează mai puțin. Prin urmare practicarea unui număr mare de creștături longitudinale pe rotor împreună cu inele de capăt de secțiune relativ mare conduce la o importantă mărire a cuplului dezvoltat de motorul asincron cu rotor masiv [3].

În figura 6 se prezintă curbele curentului absorbit I_1 și ale factorului de putere $\cos \varphi_1$ funcție de alunecare. Se constată că valoarea curentului absorbit crește relativ puțin la rotoarele cu creștături în raport cu rotorul masiv, (fig. 6 sa); apoi curentul acuză o creștere mai importantă odată cu creșterea numărului de creștături dacă rotoarele sînt prevăzute cu inele, (fig. 6b); o creștere a secțiunii inelului face ca valorile curentului absorbit să difere mult la diferite tipuri de rotoare, (fig. 6c). Aceste fapte experimentale se explică prin aceea că parametrii rotorici sînt puternic influențați de prezența creștăturilor și a inelelor de capăt.

În figurile 6d și 6f se prezintă factorul de putere funcție de alunecare. Se constată că factorul de putere este substanțial mai mic decît la motorul cu rotorul în scurtcircuit; factorul de putere acuză creșteri importante funcție de numărul creștăturilor practicate dar mai ales la rotoarele care au la capete inele de secțiune mică.

Această formă a curbelor factorului de putere se explică prin aceea că prezența creștăturilor, a inelelor de capăt modifică raportul dintre reactanța și rezistența echivalentă a rotorului, precum și valorile acestor parametri, iar la motoarele de putere mică trebuie avută în vedere și rezistența statorică, care este comparabilă cu reactanța de scăpări $X_{1\sigma}$.

În figura 7 se prezintă curbele curentului absorbit I_1 și ale factorului de putere $\cos \varphi_1$ funcție de alunecare pentru rotorul masiv și rotorul masiv necreștat cu inele de secțiune mare. Se constată că alura variației curentului I_1 diferă substanțial la cele două tipuri de rotoare, figura 7a. Calculul parametrilor rotorici cu relațiile (1) și (8) arată o concordanță bună între curenții determinați teoretic și curenții măsurați.

Calculul factorului de putere $\cos \varphi$, (fig. 7b), pe baza aceluiași relații arată însă că între datele experimentale și cele teoretice există diferențe

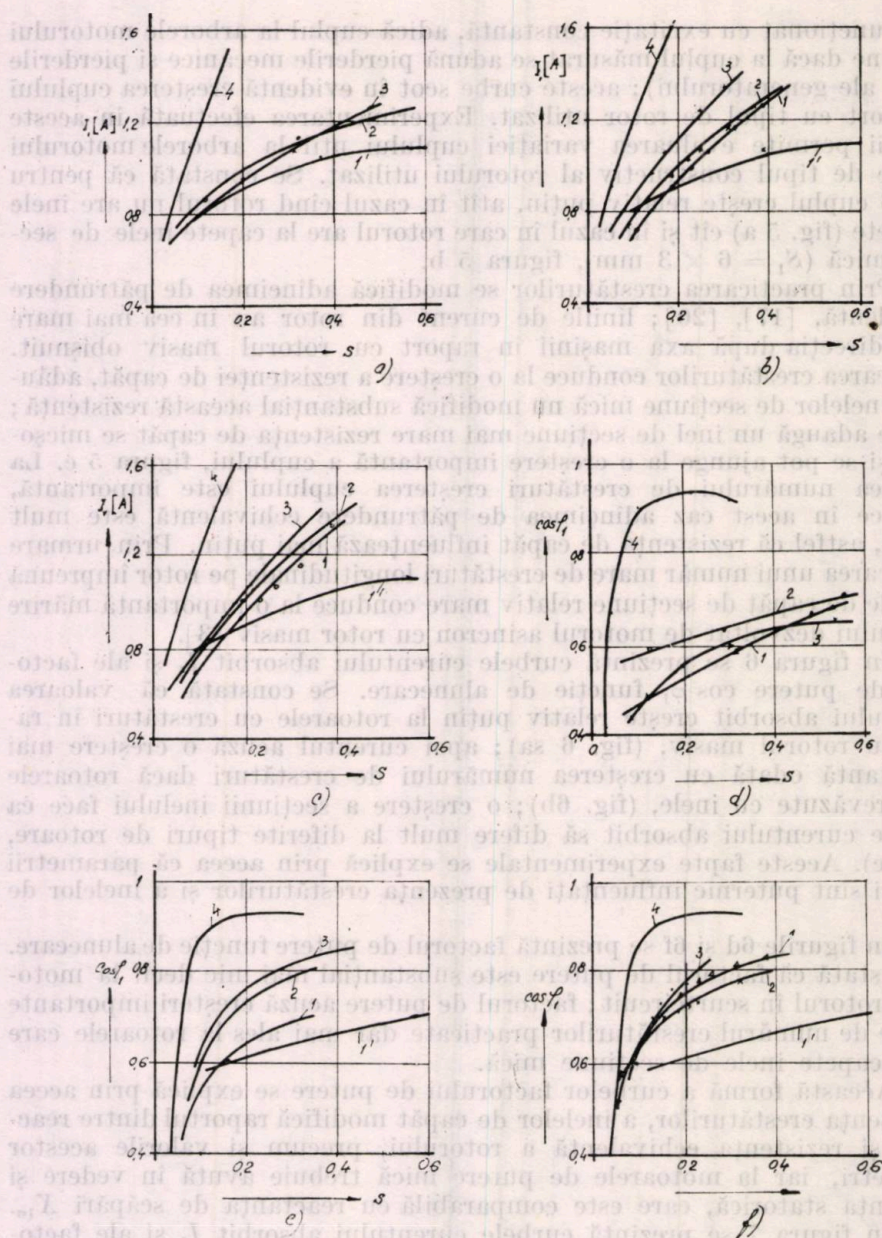


Fig. 6. Curbele curentului; $I_1 = f(s)$: a) rotoare fără inele de capăt; b) rotoare cu inele de capăt; c) rotoare cu inele de capăt de secțiune mică; d) rotoare cu inele de capăt de secțiune mare. Curbele factorului de putere $\cos \varphi_1 = f(s)$: a) rotoare fără inele de capăt; b) rotoare cu inele de capăt de secțiune mică; c) rotoare cu inele de capăt de secțiune mare. 1 și 1' — rotor necrestat; 2 — rotor cu 6 crestături; 3 — rotor cu 12 crestături; 4 — motor cu rotor în scurtcircuit.

destul de mari, atât cantitativ cât și în ce privește alura curbei, în special pentru rotorul cu inele de secțiune mare.

Aceasta arată că în cazul rotorului masiv, raportul u poate fi considerat constant în raport cu alunecarea s pe un interval relativ mare,

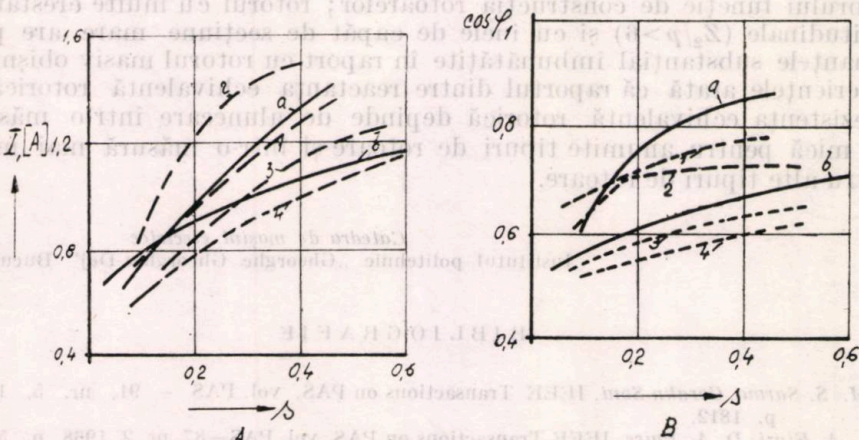


Fig. 7. Curbe teoretice și experimentale: A) curbele curentului $I_1 = f(s)$: a) — rotor necrestat cu inele de secțiune mare; b — rotor necrestat fără inele; B) curbele factorului de putere $\cos \varphi_1 = f(s)$: a — rotor necrestat cu inele de secțiune mare; b — rotor necrestat fără inele.

însă la rotorul cu inele acest raport depinde de alunecare și poate fi considerat constant pe intervale mici ale alunecării. S-au luat cele două rotoare deoarece în literatura de specialitate se consideră că parametrii la cele două rotoare diferă doar prin factorul K_L , care la rotorul masiv cu inele de secțiune mare $K_L = 1$, raportul u rămânând același. Se poate afirma că prezența creștăturilor pe rotor și a inelelor de capăt conduc la o dependență a raportului u de alunecare mai accentuată. S-a insistat mai mult asupra acestor curbe deoarece factorul de putere $\cos \varphi$ depinde în mare măsură de raportul u ; din teoriile prezentate rezultă că u nu depinde de caracteristicile magnetice și electrice ale materialului rotorului care de obicei se cunosc destul de aproximativ; calculul curentului este mai puțin precis deoarece valorile calculate ale curentului depind substanțial de valorile lui μ și σ ale materialului rotorului. Prin factorul de putere $\cos \varphi_1$ se poate verifica suficient de exact raportul u al parametrilor rotorici

Concluzii

În lucrare se analizează schema echivalentă a motorului cu rotor masiv în ceea ce privește parametrii rotorici și reactanța de magnetizare X_m . Se arată că reactanța X_m din schema echivalentă a motorului cu rotor masiv diferă de reactanța X_m din schema echivalentă a motorului asincron cu rotor obișnuit; evidențiindu-se dependența reactanței X_m de permeabilitatea magnetică a armăturilor adiacente întrefierului rezultă necesi-

tatea de a se face corecțiile necesare în schema echivalentă a motorului cu rotor masiv.

Pentru un calcul mai exact se indică un model idealizat în care rotorul este format din două zone de permeabilitate magnetică diferită.

Experiențele efectuate scot în evidență creșterea performanțelor motorului funcție de construcția rotoarelor; rotorul cu multe creștături longitudinale ($Z_2/p > 6$) și cu inele de capăt de secțiune mare are performanțele substanțial îmbunătățite în raport cu rotorul masiv obișnuit. Experiențele arată că raportul dintre reactanța echivalentă rotorică și rezistența echivalentă rotorică depinde de alunecare într-o măsură mai mică pentru anumite tipuri de rotoare și într-o măsură mai mare pentru alte tipuri de rotoare.

Catedra de mașini electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. M. S. Sarma, *Gorakn Soni*, IEEE Transactions on PAS, vol. PAS — 91, nr. 5, 1972, p. 1812.
2. L. A. Finzi, D. A. Paice, IEEE Transactions on PAS, vol. PAS — 87, nr. 2, 1968, p. 59p0.
3. P. K. Rajagopalan, V. Balarama Murty, IEEE Transactions on PAS, vol. PAS — 88, nr. 11, 1969, p. 1695.
4. B. C. Шаров, и в у з, электромеханика, nr. 1, 1961, p. 51
5. B. Шаров и в у з, электромеханика, nr. 12, 1961, p. 22
6. M. M. Connell, E. F. Sverdrup, AIEE Transactions, Part. III, PAS — 74, 1955, June, p. 343.
7. И. М. Постников, Л. Б. Останчук, В. И. Постников, электричество, nr. 1, 1975, p. 38.
8. J. Markielowski, Arch. elektrotech. (PRL), 1973, nr. 4, 22, p. 801.
9. Кучевалов В. М., Асинхронная машина с машинным ротором Рига, 1962.
10. N. Galan, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București, nr. 4, 1971, p. 93.
11. N. Galan, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotech. et Energ. 19, nr. 2, 1974, p. 307.
12. B. J. Chalmers, I. Woolley, Proceedings IEE, vol. 119, nr. 9, 1972, p. 1301.
13. A. J. Wood, AIEE Transactions, pt. III, PAS, vol. 78, 1959 (feb. 1960 section) p. 1657.
14. A. J. Wood, C. Concordia, AIEE Transactions, pt. III, PAS vol. 78, 1959 (feb. 1960 section) p. 1666.
15. A. J. Wood, C. Concordia, AIEE Transactions, PAS, April 1960, p. 21.
16. A. J. Wood, C. Concordia, AIEE Transactions, PAS, April 1960, p. 26.
17. H. Yamada, Electrical Engineering in Japan, vol. 90, nr. 2, 1970, (translated, vol. 90, nr. 3, 1970, p. 439–448).
18. И. Камарский Специальные вопросы расчета и исследования синхронных машин с массивным ротором, Москва-Ленинград, Наука, 1965.
19. N. Galan, Rev. Roum. Sci. Tech. — Electrotech. et Energ., 20, nr. 4, 1975, p. 129.
20. N. Galan, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București, nr. 3, 1975, p. 89.

Aspects de l'étude du moteur asynchrone triphase à rotor massif

On fait dans l'ouvrage l'analyse des paramètres du schéma équivalent du moteur à rotor massif, mettant en évidence la variation de ces paramètres en fonction des caractéristiques du rotor.

On indique un modèle idéalisé lequel puisse permettre de calculer plus précisément et de présenter des données expérimentales pour un nombre accru de rotors

CZ.: 621.3.014.31:621.317.1

SINTEZA ASUPRA POSIBILITĂȚILOR DE MĂSURARE ALE CURENTULUI POST-ARC*

FLORIN IONESCU

În articol după ce se arată rolul decisiv jucat de curentul post-arc din întrerup-tor în procesul de deconectare, se subliniază necesitatea măsurării lui în laboratoarele de încercare a aparatului de comutație, evidențiindu-se condițiile speciale ce trebuie să le îndeplinească instalația de măsură.

Sînt descrise principalele instalații de măsură ce pot fi utilizate în acest scop, analizîndu-se performanțele lor din punct de vedere al calității și fidelității măsurărilor. Ca rezultat al analizei comparative se recomandă folosirea în stația de încercări pentru măsurarea curentului post-arc a unei instalații formată din șunt coaxial, limitator și amplificator.

După stingerea arcului electric la trecerea naturală a curentului de scurtcircuit i_{sc} prin zero [1]:

$$i_{sc} = \hat{I} [\sin(\omega t - \alpha) + e^{-\frac{t}{T}} \sin \alpha] \quad (1)$$

între contactele întreruptorului mai există un mediu care posedă o conductivitate de rest (temperatura coloanei de plasmă și gradul ei de ionizare sînt încă importante). Din această cauză sub influența tensiunii tranzitorii de restabilire u_r între contactele întreruptorului va circula un curent i_{pa} , de intensitate mult mai mică decît a curentului de scurtcircuit, curent numit post-arc (fig. 1).

Prezența curentului post-arc poate influența în mod decisiv procesul de deconectare, căci el are 2 efecte importante:

— dacă puterea produsă de curentul post-arc $i_{pa} \cdot u_r$ și introdusă în coloana de plasmă este superioară celei evacuată de coloană prin conductibilitate, convecție și radiație, atunci temperatura plasmelor de rest crește și odată cu ea și gradul de ionizare, ceea ce determină o creștere în continuare a curentului post-arc, deci creșterea puterii introduse în coloană și așa mai departe pînă cînd are loc reaprinderea termică a arcului și deconectarea este nereușită.

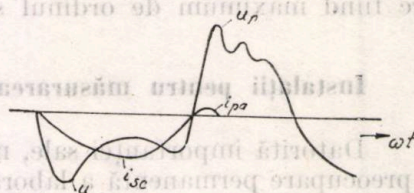


Fig. 1. Deconectarea reușită a unui scurtcircuit de către un întrerupător.

* Manuscris predat redacției la data de 19 februarie 1977.

— existența curentului post-arc duce la o amortizare a pantei tensiunii tranzitorii de restabilire, regimul ei liber de oscilație începînd numai după dispariția curentului post-arc,

Pentru un întreruptor determinarea mărimii curentului post-arc poate da indicații asupra procesului de interacțiune între întreruptor și circuit, asupra mecanismului de reaprîndere al arcului, poate arăta apropierea de limita puterii de rupere și servi la optimizarea camerei de stingere.

Deci cunoașterea curentului post-arc este foarte importantă pentru înțelegerea fenomenelor fizice din timpul procesului de deconectare. Dificultatea măsurării lui constă în faptul că el urmează după curentul de scurtcircuit a cărui valoare maximă este de 10^3 pînă la 10^5 ori mai mare, și durata lui este comparativ mai mică (10 pînă la 300 μ s).

În lucrare se prezintă principalele tipuri de instalații folosite pentru măsurarea curentului post-arc subliniindu-se avantajele și dezavantajele lor.

Condiții pentru instalația de măsurare a curentului post-arc

Instalația trebuie să prezinte o capacitate de suprasarcină foarte ridicată, adică să permită trecerea curentului de scurtcircuit ($10 \div 150$ kA) fără să reprezinte pentru el o impedanță importantă și fără ca să se deterioreze, după aceea urmînd să înregistreze curentul post-arc de ordinul amperilor sau fracțiunilor de amper [1, 3, 5].

Pentru măsurarea unui curent post-arc termic este necesară o bandă de frecvență de 0,5 MHz, iar pentru un curent post-arc dielectric 3—4 MHz [2], deci banda de frecvență a instalației trebuie să fie destul de largă.

Instalația trebuie să fie insensibilă la paraziții datorită cîmpurilor electromagnetice externe, foarte puternice, care apar în momentul încercării ca urmare a variațiilor mari de curent și tensiune.

Mijlocul de înregistrare trebuie să fie capabil să înregistreze fenomenele cu o viteză de baleiaj destul de ridicată, durata curentului post-arc fiind maximum de ordinul sutelor de μ s.

Instalații pentru măsurarea curentului post-arc

Datorită importanței sale, măsurarea curentului post-arc constituie o preocupare permanentă a laboratoarelor de încercare a aparaturii de comutație. Instalațiile folosite sînt variate, principalele fiind :

- 1) Instalație formată din șunt coaxial, limitator și amplificator.
- 2) Instalație formată din transformator de curent cu saturație și amplificator.
- 3) Instalație utilizînd tuburi catodice speciale.
- 4) Instalație utilizînd generatoare Hall.
- 5) Instalație utilizînd efectul magneto-optic (Faraday).

Toate aceste instalații folosesc drept mijloc de înregistrare oscilografii catodice. Acesta trebuie să se găsească într-un spațiu ecranat și să fie alimentat printr-un transformator de separație.

Schema instalației de la pct. 1 este dată în fig. 2. Șuntul Sh este în serie cu întreruptorul de încercat X . Căderea de tensiune la bornele șuntului, după stingerea arcului este proporțională cu curentul post-arc și servește la determinarea lui. Această cădere de tensiune fiind foarte mică, pentru a putea fi înregistrată este amplificată de amplificatorul A . Limitatorul

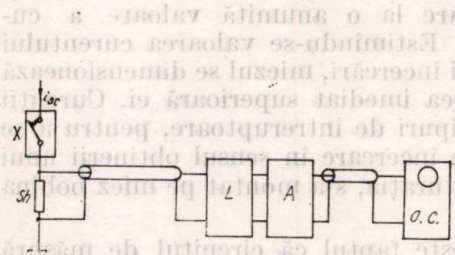


Fig. 2. Instalație formată din șunt coaxial Sh , limitator L și amplificator A .

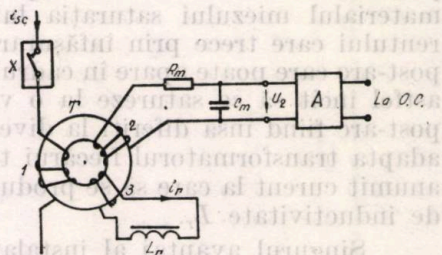


Fig. 3. Instalație formată din transformator de curent cu saturatie și amplificator.

L face ca tensiunea la intrarea amplificatorului, în timpul trecerii prin circuitul de încercare a curentului de scurtcircuit i_{sc} , să nu depășească tensiunea maximă admisă. Șuntul coaxial Sh trebuie să aibă o rezistență mică, pentru a nu influența caracteristicile circuitului și în același timp să dea o cădere de tensiune suficientă în timpul trecerii curentului post-arc. Este necesar ca inductanța lui să fie cât mai scăzută încît să nu apară nici un defazaj între curent și tensiune, care ar putea provoca înregistrarea unui curent post-arc inexistent. Stabilitatea termică și electrodinamică a șuntului trebuie să corespundă curentului maxim de scurtcircuit din circuitul de încercare [4, 7].

Factorul de amplificare al amplificatorului A este necesar să fie constant pentru un domeniu larg de frecvență și suficient de mare încît căderea de tensiune realizată pe șunt de curentul post-arc să poată fi înregistrată corespunzător de oscilograf $O.C.$

Utilizarea acestei instalații pentru înregistrarea curentului post-arc este indicată datorită preciziei, fidelității și reproductibilității măsurărilor, dar construcția șuntului și dispozitivului limitator amplificator pun probleme dificile ([1, 2, 4, 7].

Dacă se dispune de un osciloscop suficient de sensibil pentru a putea măsura căderea de tensiune dată pe șunt de curentul post-arc, acesta se poate utiliza la înregistrarea curentului post-arc declanșându-l baleiajul cu ajutorul unui dispozitiv electronic la un moment precis câteva μs înainte de ultima trecere prin zero a curentului, putîndu-se astfel elimina partea de amplificare.

Schema instalației de la pct. 2 este prezentată în fig. 3. Partea ei principală este transformatorul T cu miez toroidal din material cu permeabilitate ridicată. Curentul care trece prin înfășurarea 1 produce un cîmp magnetic de intensitate H în miez, fluxul total Φ care apare în miez fiind proporțional cu inducția și deci cu curentul. Fluxul Φ variabil în timp induce în înfășurarea 2 o tensiune U_2 care este deci o măsură pentru curentul care trece prin înfășurarea 1.

Transformatorul este astfel calculat încît se saturează puternic la trecerea curentului de scurtcircuit, în timp ce la trecerea curentului post-arc rămîne nesaturat. Aceasta face ca la trecerea curentului de scurtcircuit, fenomenul să apară limitat pe ecranul osciloscopului, deci face posibilă redarea curentului post-arc. În funcție de dimensiunile și materialul miezului saturația lui apare la o anumită valoare a curentului care trece prin înfășurarea 1. Estimîndu-se valoarea curentului post-arc care poate apare în cadrul unei încercări, miezul se dimensionează astfel încît să se satureze la o valoare imediat superioară ei. Curenții post-arc fiind însă diferiți la diverse tipuri de întreruptoare, pentru a se adapta transformatorul fiecărui tip de încercare în sensul obținerii unui anumit curent la care să se producă saturația, s-a montat pe miez bobina de inductivitate L_r .

Singurul avantaj al instalației este faptul că circuitul de măsură este separat galvanic de circuitul de curent intens, iar dezavantajele sînt legate de existența a 4 surse de perturbație care produc în momentul ultimei treceri prin zero a curentului de scurtcircuit fenomene tranzitorii care se suprapun peste mărimea de măsurat. Cele 4 surse de perturbații sînt: pierderile în cupru, pierderile prin histerezis, pierderile prin curenți turbionari și oscilațiile proprii ale transformatorului. Datorită lor apare o derivă de zero, afectată corespunzător de 4 constante de timp. Din această cauză rezultatele măsurătorii nu sînt utilizabile decît după prima sută de μs de la trecerea prin zero a curentului, încît nu se pot măsura curenți post-arc de scurtă durată. Fidelitatea și precizia măsurătorii sînt limitate.

Principiul de măsură al curentului post-arc cu instalația de la pct. 3 se poate înțelege urmărind fig. 4. Conductorul C este în serie cu întreruptorul de încercat, deci prin el va trece curentul de scurtcircuit i_{sc} . Pentru eviarea perturbațiilor datorită cîmpurilor de dispersie se utilizează cel puțin 2 tuburi catodice T_1 și T_2 montate în configurație simetrică față de conductorul C . Măsurarea curentului post-arc care trece prin conductorul C se bazează pe deflexia fascicolului de electroni sub influența cîmpului electromagnetic creat de curentul post-arc.

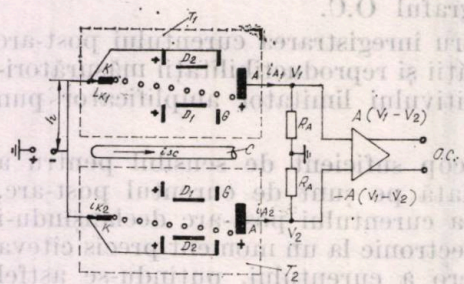


Fig. 4. Instalație utilizînd tuburi catodice speciale.

poate fi deviat prin modificarea potențialului plăcilor de deflexie D_1 și D_2 , deci este posibilă o modificare a curentului anodic între $i_A = 0$, $i_G = i_K$ și $i_A = i_K$, $i_G = 0$.

Reglajul este făcut astfel încît jumătate din fascicol ajunge la anod, iar cealaltă jumătate este preluată de grila de accelerație G . Potențialele de deflexie sînt astfel reglate încît ambele fascicule să aibă aceeași deflexie la un curent $i = 0$, adică $i_{A1} = i_{A2}$ și $V_1 - V_2 = 0$.

Cîmpul magnetic de inducție $B(r) = \frac{\mu_0 i_{pa}}{2\pi r}$ creat de curentul post-arc de măsurat i_{pa} , perpendicular pe fasciculele de electroni produce o deflexie a lor (deflexie magnetică) și deci o variație a curentului anodic :

$$\Delta i_{A1} = \Delta i_A \text{ și } \Delta i_{A2} = -\Delta i_A \quad (2)$$

rezultînd o variație de tensiune pe rezistențele anodice R_A :

$$\Delta V_1 = \Delta i_A R_A \text{ și } \Delta V_2 = -\Delta i_A R_A \quad (3)$$

Amplificatorul diferențial A amplifică diferența celor 2 căderi de tensiune, date de (3) încît la ieșirea lui se obține tensiunea :

$$V_i = 2\Delta i_A R_A A \quad (4)$$

Variația curentului anodic Δi_A fiind funcție de curentul de măsurat i_{pa} , înseamnă că semnalul la ieșirea amplificatorului este proporțional cu el. La valori mari ale curentului i (curent de scurtcircuit), deci ale cîmpului magnetic creat de el, se produce o deflexie puternică a fasciculelor de electroni, deci o limitare a curentului anodic, încît fenomenul apare limitat ca amplitudine pe ecranul osciloscopului $O.C.$

Caracteristicile unei astfel de instalații [4] sînt : bandă de frecvență : 20 MHz, zona liniară (admisibilă pentru curentul anodic) între 0,2 mA și 1,2 mA. Ea măsoară corect curenți post-arc de 200 mA cu un raport semnal zgomot egal cu 10.

Deși instalația are avantajul obținerii unei bande largi de frecvență și a separării nete între circuitul principal și cel de măsură, totuși realizarea tubului catodic special este foarte complicată și costisitoare.

Dificultățile sînt legate în special de obținerea unei zone liniare pentru curentul anodic, zonă care de fapt dă domeniul de amplitudine al curenților post-arc ce pot fi măsurați corect.

Schema principală a instalației de la pct. 4 este prezentată în fig. 5. Ea se compune dintr-un circuit magnetic M cu permeabilitate ridicată, în întrefierurile căruia se găsesc generatoarele Hall G.H. și care înconjoară conductorul C legat în serie cu întreruptorul X al cărui curent post-arc trebuie măsurat. Generatoarele Hall sînt parcurse de un curent de comandă I_c constant dat de sursele de curent constant S .

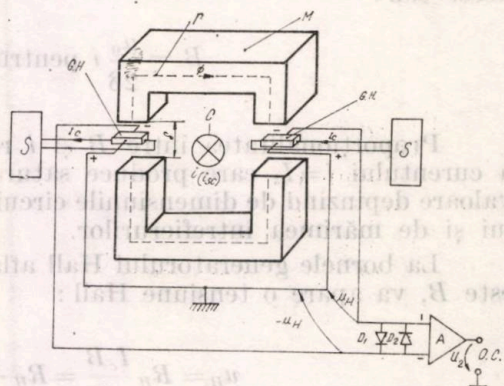


Fig. 5. Instalație utilizînd generatoare cu efect Hall.

Aplicînd teorema lui Ampère în lungul curbei închise Γ , se obține :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = H_1 \delta + H_2 \delta + H_{Fe} l_{Fe} = Ni \quad (5)$$

unde

H_1, H_2 sînt intensitățile cîmpului magnetic în cele 2 întrefieruri.

δ — mărimea egală a celor 2 întrefieruri.

l_{Fe} — lungimea în fier

$N = 1$ numărul de spire

i — curentul de măsurat (post-arc)

Dacă neglijăm influența conductorului de întoarcere a curentului i presupunînd că el este suficient de departe, în relația (5) se poate considera :

$$H_1 = H_2 = \frac{B}{\mu_0} \quad (6)$$

cu (6) relația (5) devine :

$$2 \frac{B}{\mu_0} \delta + H_{Fe} l_{Fe} = Ni \text{ sau } B = \frac{\mu_0}{2\delta} (Ni - H_{Fe} l_{Fe}) \quad (7)$$

Conform relației (7) ca să existe proporționalitate între inducția B din întrefier și curentul de măsurat i este necesar ca :

$$H_{Fe} l_{Fe} \ll Ni \quad (8)$$

condiție ce este îndeplinită dacă se alege un material magnetic moale, cu ciclul de histerezis îngust și inducție de saturație mare sau o ferită. În acest caz :

$$B = \frac{\mu_0}{2\delta} i \text{ pentru } N = 1 \quad (9)$$

Proporționalitatea între B și i rămîne valabilă pînă la o valoare a curentului $i = I_s$, care produce saturația circuitului magnetic, această valoare depinzînd de dimensiunile circuitului magnetic, de permeabilitatea lui și de mărimea întrefierurilor.

La bornele generatorului Hall aflat în întrefierul δ în care inducția este B , va apare o tensiune Hall :

$$u_H = R_H \frac{I_c B}{d} = R_H \frac{I_c \mu_0 i}{2\delta d} = K_1 i \quad (10)$$

unde :

R_H este constanta Hall

I_c — curentul de comandă

d — grosimea plăcuței Hall

Aşa cum este cunoscut efectul Faraday constă în rotirea planului de polarizare al unui fascicol luminos sub acţiunea unui cîmp magnetic paralel cu sensul de propagare al razelor luminoase, şi el se manifestă mai mult sau mai puţin puternic în funcţie de substanţele în care are loc fenomenul. Unghiul de rotaţie α este dat de legea lui Verdet :

$$\alpha = \rho l H \quad (12)$$

unde :

ρ — constanta lui Verdet este o constantă propriu-zisă numai pentru un mediu dat şi o radiaţie monocromatică, valoarea ei depinzînd de mediul traversat şi de lungimea de undă a luminii.

l — lungimea drumului parcurs de raza de lumină în interiorul corpului transparent asupra căruia acţionează cîmpul magnetic.

H — intensitatea cîmpului magnetic.

În absenţa unui curent i prin înfăşurarea N , adică a unui cîmp magnetic în bara de flint, aşa cum se poate urmări în tabelul din figura 6, la ieşirea din analizorul An , neglijînd absorbţiile de-a lungul parcursului optic, intensitatea luminoasă conform legii lui Malus va fi :

$$J = \frac{J_0}{2} \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{J_0}{4} \quad (13)$$

deoarece axele analizorului An şi polarizatorului P fac între ele un unghi de $\frac{\pi}{4}$ pentru ca sensibilitatea detectării optice să fie maximă.

Dacă prin înfăşurarea N trece curentul i , în flint se stabileşte un cîmp magnetic de intensitate $H = \frac{Ni}{1}$ şi planul de polarizare al luminii se va roti cu un unghi α dat de relaţia (12), intensitatea luminoasă la ieşirea din analizorul An avînd valoarea :

$$J = \frac{J_0}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{J_0}{4} (1 - \sin 2\alpha) \quad (14)$$

Relaţia (14) arată că semnalul la ieşire va fi liniar atît timp cît sinusul se poate aproxima cu arcul, deci practic unghiul de rotaţie al planului de polarizare trebuie să fie limitat la circa 10 grade, în acest caz :

$$J \approx \frac{J_0}{4} (1 - 2\alpha) = \frac{J_0}{4} (1 - 2\rho l H) = \frac{J_0}{4} (1 - 2\rho N i) \quad (15)$$

Semnalul u dat de celula fotoelectrică $C.F.$ este proporţional cu intensitatea fascicolului luminos captat de ea :

$$u = KJ = K \frac{J_0}{4} (1 - 2\rho N i) \quad (16)$$

Notînd $K \frac{J_0}{4} = U_0$ şi $2\rho N = C$ relaţia (16) se scrie :

$$u = U_0 (1 - Ci) \quad (17)$$

Relația (17) arată că pentru a exista proporționalitate între u și i este necesar să se înlăture componenta continuă U_0 și aceasta se realizează suprapunându-se în circuitul celei fotoelectrice o tensiune $-U_0$, reglajul ei făcându-se înainte de încercare printr-o metodă de zero.

În aceste condiții:

$$u = U_0 Ci = K_1 i \quad (18)$$

deci este posibilă măsurarea curentului i .

Din relația (14) se observă că datorită periodicității funcției sinus, cînd cîmpul magnetic crește peste valoarea care dă prima extincție, planul de polarizare va continua să se rotească, lumina reapărînd treptat cu o intensitate care va crește pînă la maximum, urmînd apoi din nou să scadă. La valorile mari ale cîmpului magnetic care apar la trecerea curentului de scurtcircuit i_{sc} prin înfășurarea N , planul de polarizare efectuează mai multe rotații peste el însuși astfel că semnalul de ieșire apare limitat în amplitudine, adică se poate spune că instalația prezintă o autolimitare care nu duce la saturație, deci este potrivită pentru înregistrarea curentului post-arc.

În figura 7 este arătată schema unei instalații de măsură a curentului post-arc, pe baza efectului Faraday [5].

Instalația este prevăzută cu o compensare electro-optică pentru înlăturarea eventualelor perturbații. În acest scop se folosesc 2 celule fotoelectrice C.F.C. (de compensare) și C.F.L. (de lectură) montate în opoziție, prima primind lumina înainte de trecerea ei prin analizor, iar cea de-a doua după trecere. Semnalele celor 2 celule se aplică amplificatorului diferențial A , al cărui semnal de ieșire va conține numai semnalul util.

Instalația este capabilă să măsoare curenți post-arc de ordinul 1 A, putînd să suporte trecerea unui curent de scurt-circuit de 40 kA. Banda de frecvență de trecere care depinde de comportarea în frecvență a mediului în care se exercită efectul Faraday, de banda de trecere a celulelor fotoelectrice și de banda de trecere a amplificatorului poate ajunge pînă la 1 MHz.

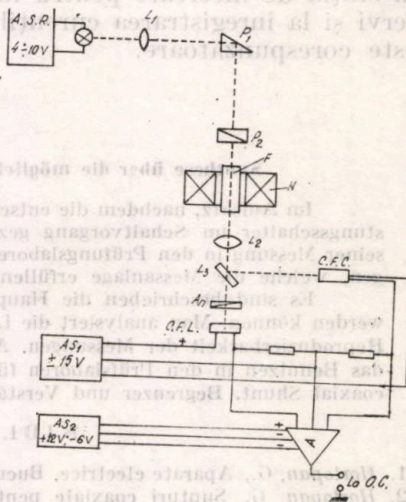


Fig. 7. Instalație pentru măsurarea curentului post-arc utilizând efectul Faraday.

Concluzii

Comparînd instalațiile descrise din punct de vedere al bandei de frecvență de trecere cel mai slab se comportă cea cu transformator de curent, banda începînd de la cîțiva Hz și mergînd pînă la zeci de KHz, celelalte avînd o bandă mult mai largă ($0 \div 1$ MHz).

Ca fidelitate și reproductibilitate a măsurării rezultate bune dau instalația cu tuburi catodice speciale și cea cu șunt coaxial, în timp ce instalația utilizând efectul Faraday necesită o corecție a derivatei amplificatoarelor și un etalonaj periodic al intensității sursei luminoase.

Instalația de măsură cu șunt coaxial permite practic înregistrarea unor curenți post-arc oricât de mici, în timp ce la alte tipuri de instalații valoarea minimă este limitată. În plus șuntul coaxial prin natura construcției sale este insensibil la parazii datorită cîmpurilor magnetice, spre deosebire de celelalte instalații unde acest deziderat se atinge prin luarea unor măsuri speciale.

Un inconvenient al instalației de măsură cu șunt coaxial este că nu asigură separarea netă între circuitul de încercare și circuitul de măsură. Șuntul avînd obligatoriu o bornă conectată la pămînt, trebuie să se urmărească ca potențialele locale ale pămîntului să nu varieze în timpul încercării.

Examinînd avantajele și dezavantajele instalațiilor menționate, reiese că din punct de vedere economic ca și al calității măsurării este recomandabil să se utilizeze în stația de încercări de mare putere de rupere, pentru măsurarea curentului post-arc o instalație cu șunt coaxial.

Construind o parte electronică adecvată, șunturile coaxiale existente în stația de încercare pentru înregistrarea curenților de scurtcircuit pot servi și la înregistrarea curenților post-arc, dacă banda lor de frecvență este corespunzătoare.

Catedra de măsuri și aparate electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

Synthese über die möglichkeiten der Messungen des Nachstromes

Im Aufsatz, nachdem die entscheidende Rolle des Nachstromes aus dem Hochleistungsschalter im Schaltvorgang gezeigt wird, unterstreicht man die Notwendigkeit seiner Messung in den Prüfungslaboren, indem man hervorhebt die spezielle Bedingungen, welche die Messanlage erfüllen muß.

Es sind beschrieben die Hauptmessanlagen, welche zu diesem Zweck benutzt werden können. Man analysiert die Leistungen aus dem Standpunkt der Qualität und Reproduzierbarkeit der Messungen. Als Resultat der Vergleichsanalyse empfiehlt man das Benutzen in den Prüfslaboren für die Nachstrommessung einer Anlage, die aus coaxial Shunt, Begrenzer und Verstärker gebildet ist.

BIBLIOGRAFIE

1. Hortopan, G., Aparate electrice, București, Ed. didactică și pedagogică, 1970.
2. Hortopan, G., Șunturi coaxiale pentru curenții limită. Comunicare la sesiunea comună I.P.B. — T.H. Darmstadt, 1976.
3. Spruth, W., Messung des Nachstroms and Hochleistungsschaltern. În: Arch. Elektr. 43, 1957 — 1958, p. 426 — 449.
4. W.M.C. van den Heuvel., Current Zero Measurement in Circuit Breaker Investigation. În: I.E.E.E. Conference Record. of The International Symposium on High Power Testing, 1971.
5. Poley, V., Contribution a l'étude du courant post-arc Teză de doctorat. 1972. Univ. științifică și medicală Grenoble.
6. Berhmann, U., Siebert, J., Die Grenzfrequenz vom Nachstrom Messeinrichtungen. În: ETZ-A, 85, 1964, pag. 139 — 147.
7. Hortopan, G., Hortopan, V., Trușcă, V., Echipament specific pentru încercarea aparatelor de comutație. În: Electrotehnica, 23, Nr. 1, ian. 1975, pag. 1 — 8.
8. Héroin, P., Benoit, Ch. Delamarre, Y., Mesure d'un courant par un ampèremètre a effet Faraday. În: R.G.E., 76, nr. 7 — 8, 1967, pag. 1045 — 1053.
9. Husa, V. Cihelka, J., Neue Meßmethode der Nachströme bei Hochspannungs und Höchstspannungsschaltern. În: E.u.M., 74, 1957, nr. 8, pag. 172 — 175.

ELECTRONICĂ

C.Z. : 681,325,6

MODELAREA STRUCTURILOR LOGICE DIGITALE CA SISTEME CU STĂRI FINITE *

SANDA DUMITRESCU, GH. M. ȘTEFAN

În lucrare se prezintă o clasificare a sistemelor logice care sînt modelate pornind de la teoria generală a sistemelor cu stări finite. Se analizează proprietățile fundamentale și modalitățile principale de implementare a acestora.

Dezvoltarea accelerată a tehnologiei a permis creșterea complexității structurilor logice, astfel încît tratarea acestora la nivel de sistem este deplin justificată, impunîndu-se cu necesitate în descrierea problemelor ce apar în modelare și proiectare. Scopul acestei lucrări este de a interpreta prin prisma teoriei sistemelor comportarea structurilor logice cunoscute : combinaționale, secvențiale, microprogramate.

Lucrarea pornește de la particularizarea definiției generale a sistemelor cu stări finite, SSF, pentru cazul structurilor logice, SL, prezentîndu-se proprietățile fundamentale și modalitățile principale de implementare a acestora.

Descrierea dată SL în lucrare este direct utilizabilă în simularea funcționării acestora pe calculator. În același context sînt prezentate principalele modalități de procesare a informației digitale, modelele utilizabile în procesul de simulare.

1. Sisteme cu stări finite

În acest capitol se vor reaminti cîteva noțiuni fundamentale privind definirea și proprietățile SSF [1], [2]. Un SSF este caracterizat prin următoarele aspecte :

- a) este un sistem invariant în timp ;
- b) evoluează în timp (T este mulțimea numerelor întregi) ;
- c) este descris prin cvintuplul $S = (X, Y, Q, f, g)$ în care :

X este mulțimea vectorilor de intrare admiși de sisteme, de forma

$$X = \{X_0, X_1, \dots, X_n\} \text{ cu } X_k = (X_{k0}, X_{k1}, \dots, X_{kn})$$

* Manuscris predat redacției la data de 6 iunie 1977

Y — mulțimea vectorilor de ieșire ai sistemului, de forma :

$$Y = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_m\} \text{ cu } Y_K = (Y_{K1}, Y_{K2}, \dots, Y_{Km})$$

Q — mulțimea stărilor sistemului sau spațiul stărilor. Are aceeași formă ca X și Y fiind diferit doar numărul p de elemente (stări) pe care le conține;

f — funcția de tranziție a stărilor (funcția de stare viitoare) și definește comportarea internă a sistemului, procesul de modificare a stărilor :

$f: X \times Q \rightarrow Q$ adică starea la momentul $t + 1$ este funcție de starea anterioară și de intrare,

$$Q_{t+1} = f[X(t), Q(t)];$$

g — funcția de tranziție a ieșirilor (de ieșire viitoare) $g: X \times Q \rightarrow Y$ (modelul Mealy) definește procesul de modificare a ieșirii funcție de intrare și stare.

Deci, în cazul SSF, mulțimile X, Y, Q sînt finite. Funcțiile f și g se numesc funcții caracteristice. Cu ajutorul lor, fiind dată o secvență de intrare și starea inițială, se poate determina evoluția sistemului.

O altă modalitate de descriere a unui SSF este specificată de tripletul :

$$S = (X, Y, M),$$

în care X și Y au aceeași semnificație ca în cazul anterior, iar M este clasa de funcții de intrare-ieșire, definite pe mulțimea de intrare și cu valori în mulțimea de ieșire :

$$M: X \rightarrow Y$$

Trebuie remarcat că, deoarece descrierea prin cvintuplu este mai completă, aceasta își găsește aplicare în proiectarea și realizarea sistemelor, în timp ce definirea cu ajutorul tripletului este deosebit de utilă în experimentare și diagnostic.

2. Structuri logice

SL pot fi studiate ca forme particulare de SSF. Acest mod de abordare permite o modelare foarte comodă, prin particularizări ulterioare a tuturor tipurilor de SL, precum și posibilitatea descrierii lor prin programe.

Pentru cazul uzual al SL lucrînd în logică bivalentă, mulțimea $[0,1]$ este cea în care iau valori elementele X_{kl}, Y_{kl}, Q_{kl} .

O altă particularitate a SL constă în aceea că, în mulțimea de intrare, există relația :

$$n + 1 = \log_2(n + 1).$$

Această relație, descriînd codificarea în spațiul de intrare, subliniază necesitatea ca acesta să conțină un număr $(n + 1)$ de elemente, variînd discret cu puterile lui 2 și care să fie baleată în totalitatea în proiectare. Altfel există riscul de a nu controla complet comportarea sistemului.

În spațiul stărilor există relația :

$$p' + 1 = [\log_2(p + 1)]$$

exprimind faptul că $p' + 1$ este cel mai mic număr mai mare sau egal cu $\log(p + 1)$. Trebuie remarcat că, din considerente de formă minimă a sistemului, egalitatea este întotdeauna de dorit.

În mulțimea de ieșire poate exista o relație similară cu cea din Q în cazul unei codificări totale, dar se poate realiza și o codificare parțială în scopul simplificării sistemelor ulterioare.

3. Structuri logice combinaționale (SLC)

SLC pot fi tratate drept cazuri particulare de SL la care spațiul stărilor este mulțimea vidă :

$$Q = \emptyset$$

Se observă că :

a) $f: \emptyset \times X \rightarrow 0$, deci funcția f nu există;

b) $g: \emptyset \times X \rightarrow Y$, deci $g: X \rightarrow Y$ este identică cu funcția M de intrare-ieșire, domeniul de definiție al funcției g reducându-se la mulțimea de intrare.

Deci pentru SLC, cvintuplul de definire se reduce la tripletul :

$$S_c = (X, Y, g = M)$$

punind în evidență că SLC este SL la care ieșirea nu depinde decit de vectorul de intrare din momentul de timp anterior.

Modul cel mai general de implementare a SLC este reprezentat în figura 1, unde circuitul logic combinațional (CLC) poate fi realizat cu multiplexoare, demultiplexoare și porți, ROM-uri sau PLA-uri în funcție de complexitatea sa și R este un registru de tip latch.

Prin CLC se înțelege :

$$S'_c = (X, Y', g')$$

unde $g': X \rightarrow Y'$ este funcția de ieșire actuală, iar timpul nu mai este discret. Utilizând modelul S_c se pot studia fenomenele de hazard care în S_c sînt eliminate dacă variabila de timp este discretizată suficient. Distincția între CLC și SLC este dată de faptul că cel de-al doilea

nu este influențat de fenomenele de hazard care sînt foarte neplăcute în cazul CLC. Studiere numai a CLC nu este semnificativă din punct de

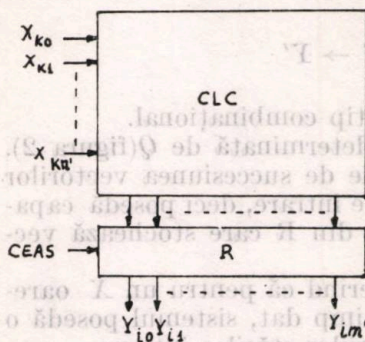


Fig. 1. Sistem logic combinațional C (SL)

vedere al interconectării între diversele subsisteme deoarece aceasta trebuie realizată independent de fenomenele de hazard.

În funcție de dimensiunea vectorilor din X și Y se pot evidenția următoarele proprietăți ale funcției g :

- a) dacă $m' < n'$, atunci g este o injecție;
- b) dacă $m' > n'$, atunci g este o surjecție;
- c) dacă $m' = n'$, atunci g poate fi o bijecție.

Cunoscând funcția g , dată sub formă de tabel de adevăr, diagrame Veitch-Karnaugh sau exprimată cu ajutorul termenilor canonici se poate reduce dimensiunea spațiului de intrare cu metodele de minimizare cunoscute, trecînd apoi la realizarea sistemului.

4. Structuri logice secvențiale (SLS).

Spre deosebire de SLC, la SIS, spațiul stărilor este diferit de mulțimea vidă, deci este definită funcția f . SLS este descris de:

$$\begin{aligned} S_s &= (X, Y, Q, f, g) \\ f: X \times Q &\rightarrow Q \\ g: X \times Q &\rightarrow Y \end{aligned}$$

Pentru a putea deduce modul de implementare generală a SLS vom defini două mulțimi X' și Y' astfel:

$$\begin{aligned} X' &= X \times Q \\ Y' &= Y \times Q \end{aligned}$$

Considerăm funcția compusă:

$$g' = f * g \text{ astfel că } g': X' \rightarrow Y'$$

care determină sistemul $S'_s = (X', Y', g')$ de tip combinațional.

Deci, un SLS este un SLC cu reacție determinată de Q (figura 2).

Sistemul se comportă la ieșire în funcție de succesiunea vectorilor de intrare și nu în funcție numai de vectorul de intrare, deci posedă capacitate de memorare (îndeplinită de porțiunea din R care stochează vectorii Q_k).

O altă interpretare poate fi dată considerînd că pentru un X oarecare la intrare, nemodificat în intervalul de timp dat, sistemul posedă o evoluție, manifestată la ieșire, datorită tranzițiilor stărilor interne.

În funcție de proprietățile mulțimilor X , Y , și Q se pot evidenția câteva tipuri uzuale de SLS:

— sisteme autonome, pentru care cardinalul mulțimii de intrare este 1, deci sisteme ce își modifică stările după o lege proprie. Ca exemple

se pot da generatoarele de tact, divizoarele de frecvență. Sistemele secvențiale autonome ar putea fi utilizate și pentru modelarea fenomenelor de hazard în CLC.

— sisteme la care $Y = Q$, exemple semnificative fiind bistabilii numărătoarelor.

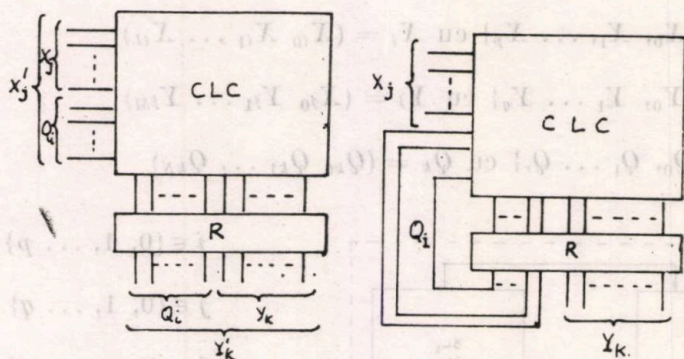


Fig. 2. Sistem logic secvențional (SLS)

5. Sisteme logice microprogramate (SLM)

Definim un SLM ca SL la care spațiul stărilor este structurat. Deci, Q nu va fi o mulțime, ci va fi un sistem descris prin :

$$Q = (X^{10}, Y^{10}, Q^{10}, f^1, g^1)$$

Vom putea deosebi mai multe cazuri în funcție de structura lui Q^{10} :

- $Q^{10} = \emptyset$ și $g^1 = 1_{x^{10}}$ (aplicație identică)
- $Q^{10} = \emptyset$ și $g^1 = 1_{x^{10}}$
- $Q^{10} = \Phi$
- $Q^{10} = \Phi$ și $Q^{10} = (X^{20}, Y^{20}, Q^{20}, f^2, g^2)$ unde Q^{20} poate îndeplini una din condițiile a, b, c, sau d.

Se observă că SLM se deosebește de SLS prin modalitatea mai complexă de introducere a reacției la nivelul SL. Reacția nu mai este direct aplicată intrării SL, ci prin intermediul altui sau altor SL de complexități diferite. Pentru cele patru cazuri enumerate, reacția este introdusă printr-un registru (a), SLC (b), SLS (c) și SLM (d). Ultimul caz evidențiază posibilitatea ca un SLM să fie format dintr-un număr oricât de mare de SL.

Se poate demonstra că există un Q^{n0} pentru care $Q^{(n+1)0}$ poate îndeplini condițiile a sau b. sau c. Numai în această situație SLM este finit.

Modul de implementare a SLM, în cazul general, este reprezentat în figura 3.

Pentru a fi explicitat modul de funcționare a sistemului descris anterior, vom defini în detaliu descompunerea minimă pe care o presupun S și Q . Vectorii care compun mulțimile X , Y , Q și X^{10} , Y^{10} se descompun în subvectori și, corespunzător, sistemele S și Q în subsisteme.

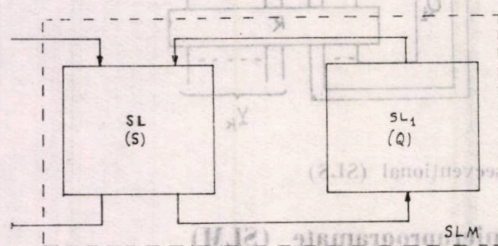
Mulțimile X , Y , Q sunt definite prin :

$$X = \{X_0, X_1, \dots, X_p\} \text{ cu } X_i = (X_{i0} X_{i1} \dots X_{iL})$$

$$Y = \{Y_0, Y_1 \dots Y_q\} \text{ cu } Y_j = (Y_{j0} Y_{j1} \dots Y_{jM})$$

$$Q = \{Q_0, Q_1 \dots Q_r\} \text{ cu } Q_k = (Q_{k0} Q_{k1} \dots Q_{kN})$$

unde :



$$i \in \{0, 1, \dots, p\}$$

$$j \in \{0, 1, \dots, q\}$$

$$k \in \{0, 1, \dots, r\}$$

Vom considera vectorii de tip X_i, Y_j, Q_k sub forma produselor carteziene :

$$X_i = X_i^1 \times X_i^2$$

$$Y_j = Y_j^1 \times Y_j^2$$

$$Q_k = Q_k^1 \times Q_k^2$$

unde :

$$X_i^1 = (X_{i0}^1 X_{i1}^1 \dots) \text{ și } X_i^2 = (X_{i0}^2 X_{i1}^2 \dots)$$

$$Y_j^1 = (Y_{j0}^1 Y_{j1}^1 \dots) \text{ și } Y_j^2 = (Y_{j0}^2 Y_{j1}^2 \dots)$$

$$Q_k^1 = (Q_{k0}^1 Q_{k1}^1 \dots) \text{ și } Q_k^2 = (Q_{k0}^2 Q_{k1}^2 \dots)$$

fiind îndeplinită condiția :

$$|X^1 + X^2| = L$$

$$|Y^1 + Y^2| = M$$

$$|Q^1 + Q^2| = N$$

unde $|Z|$ este dimensiunea vectorului Z .

Se pot defini următoarele mulțimi de vectori :

$$X^1 = \{X_i^1 / i \in \{0, 1, \dots, p\}\},$$

$$X^2 = \{X_i^2 / i \in \{0, 1, \dots, p\}\}.$$

Similar se pot defini și mulțimile Y^1, Y^2, Y^1, Y^2 .

Mulțimile asociate cvintuplului Q se descompun după o regulă similară, rezultând X^{11} , X^{12} , Y^{11} , Y^{12} .

Utilizând mulțimile anterior definite se pot evidenția următoarele subsisteme ale sistemului S :

$$S_0 = (X', Y', Q, f, g)$$

$$S_1 = (X^2, Y^2, Q_u, f_1, g_1)$$

$$S_2 = (Y^2, Y^2, Q_u, f_2, g_2)$$

Similar, sistemul Q se descompune în:

$$Q_0 = (X^{11}, Y^{11}, Q^{10}; f^1, g^1)$$

$$Q_1 = (X^{12}, Y^{12}, Q_u, f_1^1, g_1^1)$$

În ultimele două seturi de relații,

Q este sistem,

$$Q_u \neq \Phi,$$

$$g_1 = 1x^2, g_2 = 1x^2, g_1^1 = 1x^u.$$

În continuare vom interpreta modul de descompunere anterior prezentat, dînd un model concret pentru SLM.

Subsistemul S_0 prelucrează direct un subvector al vectorului de intrare, generînd un subvector de ieșire.

Subsistemul S_1 transmite spre prelucrare celălalt subvector de intrare subsistemului Q .

Q_0 este subsistemul care asigură prelucrarea subvectorilor de intrare transferați neprelucrați prin S . Q_0 poate fi și el un SLM.

Q_1 transferă direct un subvector de ieșire asigurînd reacția directă a sistemului S .

S_2 transferă neprelucrat la ieșire S , subvectorii generați de Q .

În cazul SLC și SLS, cantitatea de informație prelucrată (dimensiunea vectorilor de intrare și ieșire) era direct proporțională cu dimensiunea sistemului. Se poate demonstra că în cazul SLM, dimensiunea SL este dictată de modul în care vectorii X și Y sînt descompuși în subvectori.

Este evident că S_1 , S_2 , Q_1 sînt subsisteme evidențiate în mod formal numai pentru a putea explicita atît definiția dată la începutul capitolului cît și definirea și prelucrarea separată a subvectorilor de intrare:

Definirea subvectorilor se face în funcție de semnificația acodată vectorilor de intrare. În principiu, fiecărui subvector i se asociază un SL din SLM.

Structura evidențiată se poate extinde în momentul în care Q este considerat la rîndul său un SLM.

6. Procesarea

Prin procesare înțelegem prelucrarea vectorilor de intrare (informației digitale) în SLM. Se pot defini mai multe tipuri de procesare distincte asociindu-se fiecăruia un anumit tip de SLM particularizat prin structura mulțimilor.

Deosebim trei tipuri de procesare :

- a) transferul vectorilor ;
- b) prelucrarea vectorilor ;
- c) stabilirea unor decizii.

Orice SLM realizează cu o pondere mai mare sau mai mică toate cele trei feluri de procesare enumerate ; în continuare vom evidenția însă sisteme care realizează exclusiv un anumit tip de procesare.

a) SLM transfer.

Structura particulară a unui SLM care realizează transferul vectorilor (S_T) este definită prin cvintuplul :

$$S_T = (X \times X^1, X \times Y^1, Q, i^1, l_X * g^1)$$

unde :

X este subvectorul transferat ;

X^1 — subvectorul ce definește modul de transfer ;

Y^1 — subvectorul de control al transferului ;

$f^1 : \emptyset \times X^1 \rightarrow Q$;

$g^1 : Q \times X^1 \rightarrow Y^1$;

$l_X * g^1$ — funcția compusă de ieșire viitoare prin care se transferă X și se generează Y^1 .

Structura descrisă de cvintuplu este complexă față de modul uzual în care se realizează transferul, cuprinzând și posibilitatea controlării modului transferului. Cazul simplu este descris prin restricțiile următoare :

$$C = Y = \emptyset$$

care generează drept consecințe :

$g^1 : Q \times \emptyset \rightarrow \emptyset$, deci g este nedefinită ;

$f^1 : Q \times \emptyset \rightarrow Q$, deci evoluția stărilor este independentă de intrare. Pentru ca sistemul să fie determinist, f nu se definește,

În acest caz cvintuplul devide :

$$S'_T = (X, X, \emptyset, \cdot, 1_X)$$

În construcția SLM este utilizat atit modul general de realizare al transferului, între blocuri funcționale ce pot lucra independent, cît și cazul simplu transferului necontrolat pentru cuplarea blocurilor funcționale puternic independente.

Modul general de transfer este mai flexibil, dar mai puțin rapid, pe cînd transferul simplu este foarte puțin flexibil, dar rapid.

b) SLM de prelucrare a vectorilor.

Cazul particular al SLM de prelucrare a vectorilor poate fi explicat sub forma :

$$S_P = (X_1^1 \times X^2 \times X^3, Y, Q, f, g),$$

unde X^3 realizează o partiție a S_P în subsisteme echivalente de tipul :

$$S_{PK} = (X^1 \times X^2 \times X_K^3, Y, Q, f_K, g_K), \text{ cu } X_K^K = X^3.$$

Semnificația elementelor cvintuplului poate fi următoarea :

- X^1, X^2 — mulțimi de vectori de prelucrat,
- X_K^3 — mulțimea modulelor de prelucrare,
- Y — mulțimea vectorilor rezultați din prelucrare,
- Q, f, g au semnificația uzuală.

Se pot evidenția cîteva cazuri particulare, după cum urmează :

— $X^1 = Y, X^2 = \emptyset$, caz ce poate oferi un model pentru realizarea conversiilor de cod (prin păstrarea densității de împachetare a informației) sau deplasării conținutului unor registre ;

— $X^1 \neq Y^2, X^2 = \emptyset$, caz ce corespunde modelării generale a conversiilor de cod ;

— $X^1 = X^2 = Y$, modelînd realizarea operațiilor aritmetico-logice între vectorii X^1 și X^2 .

În toate cazurile, tipul prelucrării este definit de forma particulară a vectorului X_K^3 .

c) SLM de stabilit decizii.

Un SLM care este utilizat pentru a caracteriza rezultatul unei operații poate fi folosit la stabilirea unor decizii referitor la evoluția procesării. Formal, putem defini un SLM de decizie prin :

$$S = (X, Y^1 \times Y^2, Q, f, g),$$

unde :

Y^1 reprezintă rezultatul prelucrării vectorilor X , avînd o structură oarecare ;

Y^2 caracterizează rezultatul prelucrării determinînd stabilirea unei decizii.

Fiecare element Y_{kj}^2 al vectorilor mulțimii Y^2 definește în mulțimea Y^1 o relație care poate avea numai două valori. Caracterizarea este cu atît mai complexă cu cît Y_K^2 este mai mare, permițînd stabilirea unui set larg de decizii.

În concluzie putem spune că procesarea, în oricare din formele ei presupune existența unui sistem a cărui structură poate fi particularizată pornind de la forma generală definită de relația :

$$S = (X^1 \times X^2 \times \dots \times X^n, Y^1 \times Y^2 \times \dots \times Y^m, Q, f, g).$$

În funcție de definirea subvectorilor mulțimilor X și Y poate rezulta oricare din formele particulare de SL analizate în acest paragraf. Acest fapt sugerează posibilitatea realizării unor structuri cu funcționalitate adaptabilă tipului de aplicație.

Concluzii

În lucrare s-a încercat o descriere a sistemelor logice și a modalităților de procesare printr-un formalism unic. Aceasta are principalul avantaj de a permite analiza și simularea SL într-o manieră simplificată.

Definirea SLM ca un SL cu spațiul stărilor considerat tot ca un SL permite abordarea acestuia utilizând din plin facilitățile oferite de considerarea într-o manieră modulară a sistemelor logice.

*Catedra de dispozitive, circuite și aparate electronice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București*

BIBLIOGRAFIE

1. Kalamian R. E., Falb P. L., Arbib M. A., Teoria sistemelor dinamice, McGraw Hill, Inc., 1969
2. Zadeh L. A., Polak E., ș.a., Teoria sistemelor, McGraw Hill, Inc. 1969.
3. Kaufman A., Precigout M., Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă, Dunod, Paris. 1966.
4. Blakeslee T.R., Digital Design with Standard MSI and LSI, John Wiley, 1975.

The Modelling of Digital Logical Structures as Finite State Systems.

The paper presents a classification of the logic systems modelling them through the general theory of the discrete time systems.

They are analysed the fundamental proprieties and ways to implement them.

C.Z.: 62—52:517.94

PERFORMANȚELE SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE INVARIANTE*

DOINA STĂNESCU

În această lucrare s-au redefinit performanțele locale și globale ale sistemelor automate liniare.

O atenție deosebită a fost acordată extinderii performanțelor convenționale, pe baza conceptului de răspuns stabilizat, lucru care permite dezvoltarea de tehnici suboptimale cu un ridicat grad de implementare.

Introducere

Performanțele unui subsistem reprezintă indici calitativi sau cantitativi care descriu comportarea subsistemului în timp, respectiv dinamica răspunsului sistemului. Evidențierea acestor indici este funcție de o necesitate particulară sau de posibilități mai ușoare de caracterizare pe ansamblu (sau pe porțiuni) în raport cu timpul, fără a mai fi dedus complet răspunsul sistemului. Aprecierea performanțelor se poate face prin două categorii de criterii:

— Criterii locale: pentru o mulțime discretă $t_x \in [t_{x_1} \dots t_{x_q}]$ $q \geq 1$, se apreciază o anumită funcție $f(y)$, $t = t_{x_j}$.

— CRITERII GLOBALE: pentru o mulțime continuă $\{t_0\} \subset T$ se apreciază o funcție de $y: F(y, t)_{t \in (t_0)}$ definită de limitele submulțimii respective (t_{v_a}, t_{v_b}) , unde $y(t)$ este răspunsul în timp al sistemului.

Un astfel de criteriu dă o informație corespunzătoare dacă este independent de timp; dependența de timp este admisă destul de rar.

Stabilirea performanțelor precizează datele inițiale ale oricărei proiectări de sisteme automate.

1. Sub sisteme invariante

La un subsistem determinist a cărui mărime de comandă $u(t)$ se aproximează prin:

$$\tilde{u}(t) = \sum_{n=1}^q A_n t^{n-1}$$

* Manuscris predat redacției la data de 12 martie 1977

transformata răspunsului său are forma :

$$Y(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)} + \frac{P_u(s) P_1(s)}{s^q P_2(s)} = \frac{S(s)}{s^q} + \frac{T(s)}{P_2(s)}$$

Polinoamele $S(s)$ și $T(s)$ se pot determina dacă cunoaștem zerourile polinoamelor $P_1(s)$, $P_u(s)$ și $P_2(s)$, și au următoarele proprietăți (rezultate din teorema dezvoltării Heaviside) :

- $S(s)$ și $T(s)$ sînt polinoame care conțin numai zerouri
- grad. $S(s) = q - 1$, grad. $T(s) = k - 1$
- limitele polinoamelor $S(s)$ și $T(s)$ sînt finite pentru

$$s \rightarrow 0 : \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \text{finit}, \lim_{s \rightarrow 0} T(s) = \text{finit}$$

iar polinoamele $P_1(s)$, $P_u(s)$, $P_2(s)$ nu au zerouri în origină.

Se obține :

$$S(s) = \sum_{n=1}^q S_n s^{q-n} = S_q + S_{q-1} s + \dots + S_1 s^{q-1}$$

$$T(s) = \sum_{k=1}^{k-1} T_k s^k = T_0 + T_1 s + \dots + T_{k-1} s^{k-1}$$

Se vor face următoarele notații :

$$y_s(t) = L^{-1} \left[\frac{S(s)}{s^q} \right] \text{ componentă stabilizată (fixată)}$$

$$y_T(t) = L^{-1} \left[\frac{T(s)}{P_2(s)} \right] \text{ componentă de abatere (eroare) de la componenta stabilizată } y_s(t), \text{ respectiv componenta tranzitorie.}$$

Dacă $u(t)$ se aproximează prin polinomul în t^n :

$$u(t) = B_1 + B_2 t + \dots + B_q t^{q-1}$$

atunci se poate evidenția o componentă $y_s(t)$ în răspunsul sistemului care să repete intrarea printr-un polinom cu coeficienți diferiți și de același grad :

$$y_s(s) = S_1 + S_2 t + \dots + S_q t^{q-1}$$

Vom nota :

$$u(t)^* = \frac{u(t)}{B_j} \text{ pentru un subsistem stabil.}$$

$$B_j = \text{primul coeficient nenul din } u(t)$$

$$\tilde{y}_s^*(t) = \frac{y(t) S}{S_j}$$

$$S_j = \text{coeficientul termenului de același rang cu } B_j$$

Obținem :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_s^*(t) < \lim_{t \rightarrow \infty} u^*(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_s^*(t) = y(0_+) = \text{finit}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_s^*(t) = \lim_{t \rightarrow 0} u^*(t)$$

de unde : $\frac{S_q}{S_j} = \frac{B_q}{B_j} = K$ (factorul de amplificare staționar al subsistemului, respectiv cînd $t \rightarrow \infty$)

Componenta tranzitorie a răspunsului sistemului $y_T(t)$ are următoarele proprietăți :

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_T(t) = 0, \text{ rezultă că subsistemul este stabil}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_T(t) = y_T(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) - \lim_{t \rightarrow 0} y_s(t) = y(0_+) - y_s(0_+)$$

Datorită principiului superpoziției rezultă :

$$Y(s) = Y_I(s) + Y_S(s) + Y_T(s) \text{ unde}$$

$$Y_I(s) = H(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)}; \quad Y(s) = \frac{S(s)}{s^q}; \quad Y_T(s) = \frac{T(s)}{P_2(s)}$$

obținându-se $y_T(t)$ componenta tranzitorie forțată cu proprietățile următoare :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_T(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_T(t) = y_T(0) =$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 0} y_s(t) =$$

$$- y_s(0_+)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_T(t) + y_i(t)$$

$$y_T(t) = \sum_{i=1}^k \frac{T(s_i)}{P_2(s_i)} e^{s_i t}$$

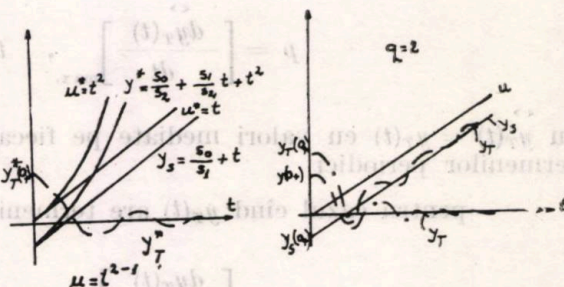


Fig. 1

Prin urmare $y_T(t)$ poate avea componente periodice sau / și aperiodice.

Determinarea coeficienților polinoamelor $T(s)$ și $S(s)$ se poate face prin intermediul următoarelor relații de recurență:

- pentru $y_T(t) : P_1(s) [s^q + P_u(s)] = P_2(s) S(s) + T(s) s_q$
- pentru $y_{T_f}(t) : P_1(s) P_u(s) = P_2(s) S(s) + T(s) s^q$

2. Performanțe definite local.

ABATEREA MAXIMĂ $|\sigma_{\max.}|$ a răspunsului unui sistem liniar neted și invariant reprezintă cea mai mare valoare absolută a lui $y_T(t)$ pentru $t > t_{0+}$.

SUPRAUMĂRIREA σ a răspunsului unui subsistem liniar neted și invariant reprezintă cea mai mare valoare pozitivă a lui $y_T(t)$ pentru $t > t_{0+}$.

TIMPUL DE STABILIRE t_s a răspunsului unui subsistem liniar neted și invariant reprezintă diferența $t_x - t_{0+}$, unde t_x este timpul finit, cel mai mic la care $y_T(t) = 0$.

TIMPUL DE CREȘTERE t_c al răspunsului unui subsistem liniar neted și invariant reprezintă $|y_T(t_{0+})/p|$, unde p este derivata de ordinul cel mai mare a lui $y_T(t)$ de semn contrar cu $y_T(t_{0+})$.

Mărimea p se definește astfel:

- pentru cazul în care $y_T(t)$ are termeni aperioidici

$$p = \left[\frac{dy_T(t)}{dt} \right]_{\max.}, \quad t < t_s$$

- pentru cazul în care $y_T(t)$ are termeni periodici amortizați (sistemul este stabil) și $T_{\max.}$ este cea mai mare perioadă a acestor termeni cu $t_s > \frac{T_{\max.}}{2}$

$$p = \left[\frac{d\langle y_T(t) \rangle}{dt} \right]_{\max.}, \quad t < t_s$$

cu $\langle y_T(t) \rangle = y_T(t)$ cu valori mediate pe fiecare perioadă corespunzătoare termenilor periodici

- pentru cazul când $y_T(t)$ are termeni periodici, iar $t_s < \frac{T_{\max.}}{2}$

$$p = \left[\frac{dy_T(t)}{dt} \right]_{\max.}, \quad t \ll \frac{T_{\max.}}{2}$$

Se remarcă faptul că t_c este totdeauna, iar t_s poate fi ∞ .

TIMPUL TRANZITORIU (durata regimului tranzitoriu) t_t al răspunsului unui subsistem liniar neted și invariant reprezintă diferența $t_v - t_{0+}$, în care :

$$|y_T(t_v)| = y_T, \quad |y_T(t_v)| < k |y_T(t_{0+})|$$

cu k o constantă subunitară. Pentru condiții inițiale nule

$$y_{T_s} \leq k |y_s(t_0)|$$

Se admite că $k = 0,05$ de unde rezultă t_t (intervalul de timp dintre t_{0+} și momentul cînd $y_T = 5\% y_T$ la t_{0+}).

Evaluarea performanțelor se poate face cu ajutorul polinomului caracteristic $P_2(s) = 0$, pe baza localizării zerourilor pe domenii în planul s .

Să considerăm un zero complex al lui $P_2(s)$: $s_{z_i} = \sigma_i \pm j\omega_i$ care devine: $s_{z_i} = -\xi_i\omega_{n_i} + j\omega_{n_i}\sqrt{1 - \xi_i^2}$ rezultînd :

$$\arg s_{z_i} = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi_i^2}}{-\xi_i} = \varphi_{z_i}$$

Un pol cu $\xi > \xi_i$ are și $\varphi_z > \varphi_{z_i}$, rezultă o dreaptă în planul s : $\varphi =$ = ct care determină o zonă în care $\varphi_i > \varphi$, $\xi_i > \xi$ și $\varphi_i < \varphi$, $\xi_i < \xi$.
Facem o schimbare de variabilă :

$$w = se^{-j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = se^{-j\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \frac{\pi}{2}\right)}$$

obținîndu-se planul w , al cărui semiplan stîng conține toate zerourile w_z corespunzătoare la $\xi_i > \xi$.

În aceste condiții polinomul caracteristic devine :

$$P_2(W) = \sum_{i=0}^k a_i e^{-ji\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} w^i = 0 \text{ sau}$$

$$P_2(jw) = \sum_{i=0}^k a_i e^{-ji\varphi} w^i = 0 \text{ pentru că :}$$

$$s = we^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = -jwe^{j\varphi} \text{ unde :}$$

$$\bar{k}_i = a_i e^{ji\varphi} = \operatorname{Re}(\bar{k}_i) + j\operatorname{Im}(\bar{k}_i) =$$

$$= a_i \cos(i \arccos \xi) + ja_i \sin(i \arccos \xi)$$

$$\text{Întrucît: } \cos(i \arccos \xi) = \frac{T_{i_1}(\xi)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \text{ pentru } i > 1$$

$$\sin(i \arccos \xi) = \frac{T_{i_2}(\xi)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \text{ pentru } i > 1$$

T_{i_1} și $T_{i_2}(\xi)$ sînt polinoamele Cebîșev de speța I și respectiv a II-a, rezultînd :

$$Re(\bar{k}_i) = a_i \frac{T_{i_1}(\xi)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}; \quad Im(\bar{k}_i) = a_i \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \frac{T_{i_2}(\xi)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}$$

$$\text{cu: } T_{0_1}(\xi) = 1, \quad T_{0_2}(\xi) = 0, \quad T_{1_1}(\xi) = \xi, \quad T_{1_2}(\xi) = 1$$

Astfel polinomul caracteristic devine :

$$\begin{aligned} P_2(j\omega) &= \sum_{i=0}^k a_i [T_{i_1}(\xi) + j\sqrt{1 - \xi^2} T_{i_2}(\xi)] w^i = \\ &= \sum_{i=0}^k (b_i^* + jc_i^*) w^i = 0 \end{aligned}$$

Procedura este similară cu cea de la analiza stabilității.

Pentru $0 < \xi < 1$ rezultă stabilitatea lui y_i și y_{T_j} , de unde rezultă $a_i > 0$ pentru orice $i = 0, 1, \dots, k$ (condiție necesară dar nu și suficientă). Suplimentul de condiții suficiente va fi dat de determinanții matricelor Hurwitz sau Jury.

Coeficienții c_i^* și b_i^* pot fi pozitivi sau negativi după i , avînd ca efect localizarea rădăcinilor după o matrice de coeficienți Hurwitz în formă hermitică. Se notează :

$$b_i = (-1)^i b_i^*; \quad c_i = (-1)^{i+1} c_i^* \text{ și se formează o matrice patrată } (2k \times 2k) \text{ Jury: } [J]_k.$$

Un subsistem neted, liniar și invariant are un $y_T(t)$ cu toate componentele avînd un $\xi_i > \xi$ dacă :

$$\det[J]_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

unde $[J]_i$ este matricea Jury de ordinul i a coeficienților c_i și d_i definiți prin funcții de a_i și polinoamele Cebîșev de speța I și II de ξ . Condiția de stabilitate structurală liberă : $a_i > 0$. Coeficienții c_i și d_i sînt funcții de ξ prin T_{i_1} și T_{i_2} și pentru $\xi = 1$: $d_i = 0$ și $c_i = ia_i$.

Dacă se păstrează condiția de stabilitate liberă $a_i > 0$ pentru orice i , se poate scrie o matrice Jury $(2k \times 2k)$ numai în ia_i .

Pentru ca un subsistem neted, liniar și invariant să aibe în răspunsul său componenta tranzitorie aperiodică este necesar și suficient ca $\det [J]_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, unde $[J]_i$ este o matrice Jury cu coeficienți ponderați ai lui $P_2(s)$. Se impune pentru condiția de stabilitate liberă $a_i > 0$.

Poziționarea restrictivă a zerourilor polinomului caracteristic în regiuni din semiplanul drept facilitează mult determinarea performanțelor. Dacă luăm câteva valori pentru ξ observăm că toate zerourile au $\xi > \xi_{\min}$ și se poate aprecia t_r din relația:

$$\lim y_T(t) \approx k_i e^{-\xi_{\min} \omega_{n_i \max} t} = k$$

La fel se poate aprecia și t_c după $\omega_{n_i \max}$.

Trebuie să avem în vedere următoarele:

— o componentă cu $\xi_a \omega_{n_a} > \xi_b \omega_{n_b}$ determină o componentă mai rapidă, rezultând că regimul tranzitoriu la valori mici ale timpului se apropie de $\xi_{\max} \omega_{n \max}$;

— o componentă cu $\xi_a \omega_{n_a} < \xi_b \omega_{n_b}$ determină o componentă mai întârziată, rezultând că regimul tranzitoriu la valori mari ale timpului se apropie de $\xi_{\min} \omega_{n \min}$.

Astfel apar zerouri dominante ale polinomului caracteristic după relația:

$$\xi \times \omega_{n_x} \ll \xi_i \omega_{n_i} \text{ pentru } x \neq i; x, i \in (1, \dots, k)$$

neglijându-se la valori mici ale timpului factorul $\xi_i \omega_{n_i}$.

3. Performanțe definite global.

Criteriile privind performanțele sistemelor liniare, netede și invariante sînt evidențiate prin operatori funcționali care transformă o funcție definită pe un interval de timp deschis sau închis, inițializat în t_{0+} sau 0_+ într-o valoare nenulă.

Deoarece studiem subsistemele liniare avem operatori liniari integrali:

$$F'_{(0+)} = C, \text{ unde } C \text{ este criteriu global, iar}$$

$$F = \int_{0_+}^0 \cdot [\cdot] w(\cdot) dt$$

$w(\cdot)$ este funcția de ponderare, care are rolul de a orienta criteriul C către anumite grupe din mulțimea deschisă sau închisă t . Criteriul C se referă la performanțele care descriu funcția $y_T(t)$, evidențiind abaterile subsistemului de la $y_S(t)$, de unde rezultă faptul că criteriul C nu este satisfăcător și trebuie modificată structura; se va modifica și $y_S(t)$ prin coeficienții polinomului de aproximare în t^q .

A. CRITERII NEPONDERATE :

a). criteriul de abatere : $C = \int_0^{\infty} y_T(t) dt$

Posibilitățile de evaluare sînt descrise de relația :

$$C(s)_{s=0} = \int_0^{\infty} y_T(t) dt = \int_0^{\infty} y_T(t) e^{-st} dt = Y_T(0) = \left[\frac{P_1(s) + T(s)}{P_2(s)} \right]_{s=0}$$

care pentru $y_T(t)$ devine : $C = \left[\frac{T(s)}{P_2(s)} \right]_{s=0}$

Acest criteriu dă indicații asupra conținutului aperiodic.

b). criteriul de modulul abaterii : $C = \int_0^{\infty} |y_T(t)| dt$

Acest criteriu dă indicații asupra conținutului periodic, dar evaluarea lui este dificilă întrucît conduce la relația :

$$C = \int_0^{\infty} \left| \sum_{i=1}^k \frac{P_1(s_i) + T(s_i)}{P_2(s_i)} e^{s_i t} \right| dt$$

unde s_i sînt zerourile lui $P_2(s)$.

c). criteriul de abatere pătratică : $C = \int_0^{\infty} y_T^2(t) dt$

Dacă folosim integrala Parseval C devine :

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{[P_1(s) + T(s)][P_1(-s) + T(-s)]}{P_2(s) \cdot P_2(-s)} ds$$

care se rezolvă rapid prin reziduri. Acest criteriu c cuprinde și regimul periodic.

B. CRITERII PONDERATE

În ceea ce privește criteriile ponderate sînt necesare unele precizări cu privire la funcția pondere $w(t)$, astfel că la aproximarea prin polinoame ortonormale se folosesc următoarele ponderări :

— total monotone $w(t) = e^{-at}$ (în sens Laguerre) care dau o caracterizare mai bună la t_0 ;

— $w(t) = e^{-at^2}$ (în sens Hermite) tot pentru t_0 ;

— constante pe porțiuni $w(t) = 1$ cu $t_a < t < t_b$ (în sens Legendre)

— monotone pe porțiuni (în sens Cebîșev de speța I)

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^{*2}}} \text{ cu } -1 < t^* < 1$$

Evaluarea unor criterii ponderate este o operație de rutină și se fac următoarele precizări :

a) — criteriul de abatere monotonic total este de forma :

$C = \int_0^{\infty} y_T(t) e^{-at^q} dt$ pentru $q=1$ are o evaluare simplă în sens Laguerre :

$$C(s)_{s=a} = \int_0^{\infty} y_T(t) e^{-at} dt = \left[\frac{P_1(s) + T(s)}{TP_2(s)} \right]_{s=a}$$

b) — criterii cu alte tipuri de ponderări au formele :

$$C = \int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^k \frac{P_1(s) + T(s)}{P_2(s)} e^{s_i t - \sqrt[2]{at^2}} \right]^v dt$$

pondere uniformă monotonă.

$$C = \int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^k \frac{P_1(s_i) + T(s_i)}{P_2(s_i)} e^{s_i t} \right]^v dt \quad \text{cu}$$

$-1 < t^* \rightarrow 1$, pondere în sens Legendre

$$C = \int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^\infty \frac{P_1(s_i) + T(s_i)}{P_2(s_i)} e^{s_i t} \right]^v \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^{*2}}}$$

$-1 < t^* < 1$, ponderare în sens Cebîșev $v = 1, 2, \dots$

Aceste criterii se aplică numai după verificarea stabilității :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_T(t) = 0$$

În funcție de necesități se stabilesc criterii de alt tip sau criterii combinate. Criteriile globale sînt utilizate mai ales atunci cînd se urmăresc condiții de minim/maxim sau de punct, care se vor putea obține prin modificări de structură sau prin variabila de intrare.

Catedra de automatică II
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. C. Penescu, V. Ionescu, E. Rodinger *Procese optimale* Ed. Acad. R. S. România, 1970.
2. W. M. Wohnam, IEEE Trans. on AC 12, 6/dec. 1967
3. Chi-Tseng-Chen, W. M. Wohnman, IEEE Trans. on Electr. 8/1964.
4. D. G. Luenberger IEEE Trans. on AC 13, oct. 1968.
5. E. J. Davison, IEEE Trans. on AC, iun. 1970.

The Performances of the Linear Invariant Automatic Systems

In this work an attempt has been made for redefining the concepts concerning the local and global performances of a linear system.

Many attention has been paid for extending the conventional performances via the so-called stabilized response as well as for providing new techniques for optimizing the behaviour of the system in a neighborhood of stabilized response.

b) - critériu cu alte tipuri de ponderări au formele:

$$C = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_1(s) + Y(s)}{P_2(s)} e^{s t} \right] dt$$

pondere uniformă monotoni.

$$C = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_1(s) + Y(s)}{P_2(s)} e^{s t} \right] dt \text{ cu}$$

$-1 < \nu^* \rightarrow 1$, pondere în sens Lăskare

$$C = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_1(s) + Y(s)}{P_2(s)} e^{s t} \right] \frac{dt}{\sqrt{1 - \nu^2}}$$

$-1 < \nu^* < 1$, pondere în sens Čepicev $\nu = 1, 2, \dots$
 Aceste criterii se aplică numai după verificarea stabilității:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

În funcție de necesități se stabilesc criterii de alt tip sau criterii combinate. Criteriile globale sunt utilizate mai ales atunci când se urmăresc condiții de minim maxim sau de punct care se vor putea obține prin modificări de structură sau prin variabilă de intrare.

Centrul de Automatizări II
 Institutul Politehnic "Gheorghe Gheorghiu-Del", București

BIBLIOGRAFIE

1. C. Pănescu, I. Ionescu, E. Nedelcu, Process optimum Bd. Acad. H. Z. România, 1970.
2. W. M. Horowitz, IEEE Trans. on AC 12, 8, dec. 1967.
3. G. A. Tzafestas, W. M. Horowitz, IEEE Trans. on Electr. 8, 1964.
4. D. E. Anderson, IEEE Trans. on AC 13, oct. 1968.
5. E. A. Davison, IEEE Trans. on AC, Jan. 1970.

The Performance of the Linear Invariant Automatic Systems

In this work an attempt has been made for redefining the concepts concerning the local and global performance of a linear system.
 Many attention has been paid for extending the conventional performance via the so-called stabilized response as well as for providing new techniques for optimising the behavior of the system in a neighborhood of stabilized response.

C.Z.: 681.04/06

ALGORITM DE PROIECTARE PRIN COMPENSARE A UNUI SISTEM LINIAR INVARIANT ÎN TIMP *

IOANA MIHU

Lucrarea prezintă un algoritm de proiectare a unui compensator pentru un sistem liniar cu o singură intrare și o singură ieșire astfel încât să se obțină alocarea în totalitate și în mod arbitrar a polilor sistemului rezultat.

Alocarea dorită se obține fără estimarea stărilor numai din măsurarea directă a ieșirii sistemului (la estimare se cere și măsurarea intrării).

Introducere

Încadrat în problema generală a stabilizării sistemelor, alocarea polilor prin reacția completă, reprezintă operația de bază utilizată în proiectarea sistemelor pentru care se urmărește invariarea la perturbații nepersistente. Este cunoscut că pentru o pereche (A, B) complet controlabilă se poate realiza prin reacție completă alocarea în totalitate și în mod arbitrar a polilor. Mai exact, dându-se un set simetric de n numere complexe (n dimensiunea sistemului) există F astfel încât spectrul lui $(A + BF)$ să fie identic cu Λ . Implementarea efectivă a legii de reacție completă $u = Fx + Gv$ implică în mod obligator proiectarea fie a unui estimator de stare, fie a unui estimator de lege de reacție.

În vederea simplificării acestei ultime operații o tehnică din ce în ce mai utilizată o reprezintă compensarea dinamică. Operația de compensare, așa cum va fi abordată revine la extinderea sistemului inițial (A, B, C) presupus complet, astfel încât printr-o reacție incompletă realizată asupra sistemului extins să se obțină aceleași efecte de alocare ca în cazul unei reacții complete acționând asupra sistemului original.

1. Procedura de compensare

Din punct de vedere funcțional operația de compensare revine la introducerea unui bloc, adecvat sintetizat, pe reacția după ieșire a sistemului (obiectului) dat. (vezi fig. 1).

Lucrarea de față ia în considerare obiecte cu o intrare și o ieșire descrise fie printr-o funcție de transfer $H(s)$, fie prin realizarea minimală asociată (A, b, c^T) .

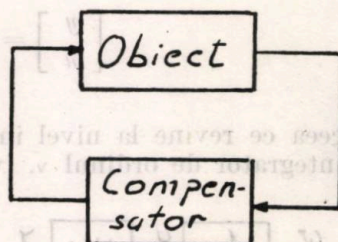


Fig. 1

* Manuscris predat redacției la data de 17 februarie 1977

Fie

$$H_c(s) = \frac{\sum_{i=0}^v \beta_i s^i}{s^v + \sum_{i=0}^{v-1} \alpha_i s^i} = \frac{U(s)}{Y(s)} \quad (1)$$

funcția de transfer a compensatorului. În care v reprezintă ordinul compensatorului, iar β_i și α_i parametri necunoscuți. Problema constă în determinarea ordinului minim v și a coeficienților α_i și β_i în acord cu un proces de alocare arbitrar impus pentru sistemul rezultat $(n + v)$ dimensional. În vederea obținerii acestui deziderat, se va proceda conform dezvoltării de mai jos.

Fie sistemul complet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned} \quad (2)$$

pentru care se realizează extensiunea

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= u_3 \\ &\vdots \\ \dot{u}_v &= w \end{aligned} \quad (3)$$

rezultind din compunerea lui (2) și (3) sistemul extins (4)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b & 0 \\ 0 & I_{v-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega \quad (4)$$

ceea ce revine la nivel intrare-ieșire la plasarea în cascadă a unui bloc integrator de ordinul v . (vezi fig. 2).

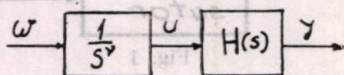


Fig. 2

Un calcul simplu arată că sistemul extins continuă să fie complet controlabil și complet observabil și în consecință alocarea prin reacție completă este în continuare posibilă.

O lege de reacție pentru sistemul (4) este de forma (5).

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \quad (5)$$

Se încearcă acum o operație de echivalare a reacției complete (5) cu reacția operațională incompletă

$$U(s) = H_c(s) Y(s) \quad (6)$$

Pentru convertizarea lui (6) în ecuația de stare considerăm ecuația diferențială intrre-ieșire asociată lui (1) care este

$$\sum_{i=0}^v \beta_i s^i Y(s) = s^v U(s) + \sum_{i=0}^v \alpha_i s^i U(s) \quad (7)$$

Folosind cea de a doua ecuație din (2) și ecuațiile (3) rezultă (8)

$$\omega = - \sum_{i=0}^{v-1} \alpha_i u_{t+1} - \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} c^T A^{i-1} x - \sum_{i=1}^v \beta_i \sum_{j=1}^i c^T A^{i-j} b u_j \quad (8)$$

unde s-a utilizat dezvoltarea cunoscută

$$y^{(i)} = c^T A^i x + \sum_{j=1}^i c^T A^{i-j} b u_j \quad (9)$$

Identificînd (8) cu (5) se obțin ecuațiile (10) și (11)

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} c^T A^{i-1} x_i \quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^v h_i u_i = \sum_{i=0}^{v-1} \alpha_i u_{i+1} + \sum_{i=1}^v \beta_i \sum_{j=1}^i c^T A^{i-j} b u_j \quad (11)$$

Ecuația 10 se scrie matricial

$$[cA^T c(A^T)^2 c \dots (A^T)^v c] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

se constată acum că această ecuație are sigur o soluție și în acest caz particular numai una, dacă v este indicele de observabilitate al perechii (c^T, A) , adică după cum este cunoscut

$$v = n - 1 \quad (13)$$

atunci soluția lui (12) și implicit a lui (10) este

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = [c^T A^T c (A^T)^3 c \dots (A^T)^{n-1} c]^{-1} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

Înlocuind (14) în (11) se obține imediat

$$\begin{cases} \alpha_0 = h_1 + \sum_{i=0}^{n-2} \beta_{i+1} c^T A^i b \\ \alpha_1 = h_2 - \sum_{i=0}^{n-3} \beta_{i+2} c^T A^i b \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} = h_{n-1} - \beta_{n-1} c^T b \end{cases} \quad (15)$$

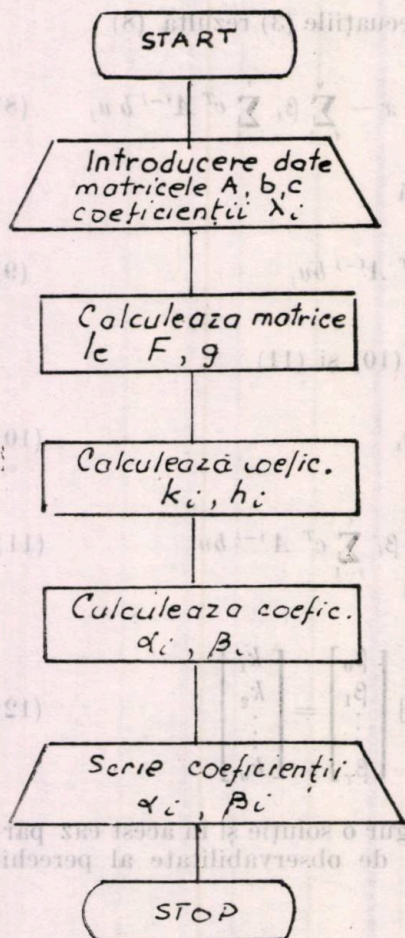


Fig. 3

Astfel $H_c(s)$ este determinat în totalitate.

2. Proiectarea compensatorului și algoritmul de calcul

Pe baza dezvoltării de mai sus rezultă imediat următorul algoritm pentru proiectarea compensatorului.

Se cunoște sistemul (A, b, c^T) și setul simetric extins Λ_c , constând din $n + v = 2n - 1$ numere complexe. Atunci:

1 — Se realizează sistemul extins (4) de dimensiune $2n - 1$.

2 — Se proiectează legea (5) pentru acest sistem conform tehnicii de alocare a polilor la sistemele cu o intrare. Aceasta se realizează prin tehnica binecunoscută a reducerii la forma canonică standard complet controlabilă.

3 — Odată cunoscut (5) se folosesc ecuațiile (14) și (15) care furnizează parametrii compensatorului. Algoritmul de calcul este conform organigramei de mai jos.

3. Exemple de calcul

Fie sistemul (A, b, c) complet controlabil, complet observabil

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = [1 \ 0 \ 1]$$

și setul simetric extins $\Lambda_e = (-1 \pm j, -1, 2)$

a. Se realizează sistemul extins (F, g) de dimensiune $2n - 1$ conform relației (4), unde $n = 3$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. Se aduce sistemul (F, g) la forma companion matricial utilizând algoritmul Ramaswani — Raman.

Se calculează matricea $T = [g, Fg, \dots, Fg^4]$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ și } T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cu ultima linie $s = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ a matricei T^{-1} se formează matricea transformării $S = [s \ sF \ sF^2 \ \dots \ sF^4]$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ și } S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Aplicând transformarea S matricea F devine

$$\hat{S} S^{-1} F = F^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

c. Cu ultima linie a matricei $\hat{F}$ (coeficienții polinomului caracteristic) și setul Λ_e impun calculăm coeficienții legii de reacție (5).

$$\hat{K}^T = [-8 \quad -14 \quad -1 \quad -6 \quad -3]$$

$$K^T = \hat{K} S = [4 \quad -23 \quad -34 \quad -12 \quad -3]$$

d. Din relația (14) rezultă coeficienții β_i

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = [c \quad A^T c \quad A^{T^2} c] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

respectiv;

$$\begin{cases} \beta_0 = 10 \\ \beta_1 = 8 \\ \beta_2 = -15 \end{cases}$$

Din relația (15) rezultă coeficienții α_i

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= h_1 - \beta_1 c^T b - \beta_2 c^T A b \\ \alpha_1 &= h_2 - \beta_2 c^T b \end{aligned}$$

deci:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 10 \\ \alpha_1 = 12 \end{cases}$$

Concluzii

În lucrare s-a pus în evidență o tehnică simplă de stabilizare prin compensare a sistemelor cu o intrare și o ieșire. Metoda evidențiază caracterul ingineresc, întrucât furnizează compensatorul direct în limbajul funcțiilor de transfer, ceea ce face metoda deosebit de utilă proiectantului. Totodată ecuația (1) poate fi discretizată și direct implementabilă în reglarea numerică directă.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Călin, *Const. Belea*, Sisteme automate complexe Ed. Tehnică, 1973.
2. V. Ionescu, *Introducere în teoria structurală a sistemelor liniare*, Ed. Academiei R. S. România, 1975.
3. J. B. Pearson, Compensator Design for Dynamic Optimization Int. J. Contrrr., 9, 4 April (1969).

Compensation Design Algorithm of a Time-invariant Linear System

This paper describes a computer — aided design algorithm for the compensator of a single — input, single — output linear plant. The algorithm is build so that any poles assignement is available over all poles of the rezulting system. The poles assignement is derived by direct measurements on the output signal and no state estimation is required (the estimation would have implied input measurements as well).

BIBLIOGRAPHIE

1. S. L. Kozlov, *Constr. Neliney. Sistemy avtomaticheskogo kompensa*, Ed. Tekhnika, 1973.
2. V. L. Kozlov, *Introducere la teoria structurilor a sistemelor dinamice*, Ed. Academiei R. S. Romania, 1975.
3. A. R. Krasovskiy, *Compensator Design for Dynamic Optimization*, Int. J. Control, 8, 4 April (1969).

Compensation Design Algorithm of a Time-Invariant Linear System

The paper describes a computer-aided design algorithm for the compensation of a single-input, single-output linear plant. The algorithm is built so that any poles assignment is available over all poles of the resulting system. The poles assignment is derived by direct measurements on the output signal and no state estimation is required (the estimation would have implied input measurements as well).

THE GENERALIZED LEAST SQUARES METHOD WITH MOVING AVERAGE MODEL FOR RESIDUALS*

PETRE STOICA

The paper presents a new version of the generalized least squares (GLS) method, in which a moving-average (MA) model for residuals is assumed.

The direct consequence is the obtaining of the maximum likelihood (ML) estimate (or an estimate very close to this one) by a much more simple method and less consuming of computer time and memory than the nonlinear programming utilization for the likelihood function maximization. A discussion concerning the solution uniqueness is also included.

The method is checked using simulated data and the estimates obtained are compared to those of the maximum likelihood method.

Introduction

In the case of fitting a model with differences to a process, the resulted residuals are not white. As a consequence, estimation methods to work in the situation of correlated residuals have been looked for. Some of these, provide besides the parameters of the process transfer function, a noise model useful in the designing of the prediction algorithms and minimal variance control strategies. For example :

- The generalized least squares (GLS) method : an autoregression (AR) model for residuals.
- The maximum likelihood (ML) method : a moving-average (MA) model for residuals.

Although the two above methods can be interpreted [1] as consisting in the maximization of the same likelihood function, by different techniques, the estimates provided cannot be compared as a whole, owing to the utilization of different models for residuals. In addition, many times in practice it is remarked that the AR models are of higher orders (they imply more parameters) than the MA models obtained in the same situation.

As a consequence, a GLS method with MA model for residuals is proposed. This appears like a maximization of the likelihood function by a technique close to the relaxation and therefore the estimate such

* Manuscript received 10 February 1977

obtained has the nice statistical properties of the ML estimate. The resulted algorithm, is much more simple than that which uses the nonlinear programming (Newton-Raphson) for the likelihood function maximization and therefore requires less computer memory and time. The numerical difficulties which appear in the case of Newton-Raphson algorithm application (e.g. the noise model instability, owing to the oscillations around the maximum), are excluded. In addition, for the noise model structure determination it is not necessary to successively apply the entire method as in the ML case, but it is an implicit result of the proposed technique.

1. The problem statement

It what is follows, it is considered that the process is described by the equation with differences:

$$A(z^{-1})y(t) = z^{-r}B(z^{-1})u(t) + e(t) \text{ with } e(t) = C(z^{-1})w(t) \quad (1)$$

where:

r = dead time

$y(\cdot)$ = output

$u(\cdot)$ = input

$e(\cdot)$ = residuals

$w(\cdot)$ = white noise with variance s^2 .

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na} \quad (2)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \quad (3)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{nc} z^{-nc} \quad (4)$$

The least squares (LS) estimate of the parameters of (1) minimizes:

$$V = \sum_{t=m}^N e^2(t) \quad \begin{matrix} m = \max(na, nb + r) \\ N = \text{the data number} \end{matrix} \quad (5)$$

and it is obtained with the following relation:

$$\hat{p} = \left[\sum_{k=m}^N S^T(k) S(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=m}^N S^T(k) y(k) \right] \quad (6)$$

where:

$$\hat{p}^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{na} \hat{b}_0 \dots \hat{b}_{nb}] \quad (7)$$

$$S(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-na) u(k-r) \dots u(k-nb-r)]$$

In the real case of the correlated residuals ($C(z^{-1}) \neq 1$), the estimate provided by (6) is biased.

The utilization of the ML method leads to the obtaining of an estimate with nice statistical properties: unbiased, asymptotic efficiency and normality [2]. The parameter vector

$$p^T = [a_1 \dots a_{na} \ b_0 \dots b_{nb} \ c_1 \dots c_{nc}] \quad (8)$$

is determined so that the criterion

$$V = \sum_{t=1}^N w^2(t) \quad w(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) \quad (9)$$

be minimum.

The loss function (9) is quadratic in a_j , b_k , but strong nonlinear in c_j . This feature can be exploited using for the minimization of (9) a relaxation method:

$$V = \sum_{t=1}^N w^2(t) \quad w(t) = C^{-1}(z^{-1}) [A(z^{-1}) y(t) - z^{-r} B(z^{-1}) u(t)] \quad (10)$$

Iteration i

$$a. \ C(z^{-1}) = \hat{C}_{i-1}(z^{-1}) \quad (11)$$

b. V is minimized with respect to a_j , b_k to obtain $\hat{A}_i(z^{-1})$ and $\hat{B}_i(z^{-1})$

$$c. \ A(z^{-1}) = \hat{A}_i(z^{-1}) \quad (12)$$

$$B(z^{-1}) = \hat{B}_i(z^{-1})$$

(10) is minimized with respect to c_j to get $\hat{C}_i(z^{-1})$

(Usually $\hat{C}_0(z^{-1}) = 1$)

Acting in this manner, the a_j , b_k estimation is a LS problem, but the $\hat{c}_j$ determination remains a strong nonlinear problem of which solving implies difficulties similar to those which appear at the treatment of the entire problem by the nonlinear programming.

The attempt of applying at step c., for the estimation of parameters $\hat{c}_j$, the covariance method [9], comes up against the same difficulty: the necessity of solving a nonlinear system. In addition:

— The application of the covariance method leads to a polynomial $\hat{C}(z^{-1})$ with real coefficients only if the noise to be done white is white enough.

— Even if the previous difficulties would be overcome, the method in which the determination of $\hat{C}(z^{-1})$ would be done by the covariance procedure, would cease to be a ML method.

2. The GLS solution

The parameter estimation problem by GLS method in which $C(z^{-1})$ is obtained as a first order filter product, leads to a very simple computation algorithm :

$$u_0(t) = u(t) \quad y_0(t) = y(t) \quad t = 1, \dots, N \quad \hat{g}_0 = 0 \quad (13)$$

Iteration i a. $y_i(t) = (1 + \hat{g}_{i-1} z^{-1})^{-1} y_{i-1}(t)$

$$u_i(t) = (1 + \hat{g}_{i-1} z^{-1})^{-1} u_{i-1}(t) \quad (14)$$

b. There are determined $\hat{A}_i(z^{-1})$ and $\hat{B}_i(z^{-1})$ such as :

$$\sum_{t=m+q}^N \hat{e}_i^2(t) = \min \quad \hat{e}_i(t) = \hat{A}_i(z^{-1}) y_i(t) - z^{-r} \hat{B}_i(z^{-1}) u_i(t) \quad (15)$$

$$(15')$$

c. A new whitening filter is estimated such as :

$$V_i = \sum_{t=m+q}^N \hat{w}_i^2(t) = \min \quad \hat{w}_i(t) = (1 + \hat{g}_i z^{-1})^{-1} \hat{e}_i(t) \quad (16)$$

$$(16')$$

$i = 1, 2, \dots, L$ until the decreases of the loss function (16) are not significant :

$$\frac{|V_L - V_{L-1}|}{V_L} \leq \varepsilon \quad (17)$$

The MA model which results for the noise is :

$$\hat{C}(z^{-1}) = \prod_{i=1}^L (1 + \hat{g}_i z^{-1}) \quad (18)$$

The method appears, on the whole, like a maximization of the likelihood function (equivalent to the (10) minimization) by a technique close to the common relaxation : at the iteration i the minimization of (10) on the directions a_j, b_k is followed by a minimization on the direction g_i (it is noticed that in this way, at the iteration i all $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_i$ are modifying).

The next remark has to be done as regard to the lower limit modification of the sums (15) and (16) : owing to the necessity of initialising (14) and (16') it is to be expected to lose a number q of data. Although the q value is usually small (q must cover the transitory regime of the filters $1 + \hat{g}_i z^{-1}$), however a data loss is an unpleasant thing. Fortunately,

it is remarked (see the numerical example), that for usual values of $N \geq 100$ the q equals zero consideration does not affect the estimate. This can be explained, of course, by the fact that the transitory regime of the filters determined at the different iterations are very small as compared to N .

3. The noise model computation

The noise model is obtained by chaining the first order whitening filters determined at the different iterations. The filter choosing from the iteration i under the form $1 + \hat{g}_i z^{-1}$ has two immediate implications:

- The possibility of testing all the $C(z^{-1})$ orders, $nc = 1, 2, \dots$
- The determination of the maximum likelihood estimate of the whitening filter appears as a nonlinear problem, but with only one variable, consequently easy to be solved.

In the sense of the minimization of (10) with respect to g_i it has been used a Fibonacci search technique. Therefore the unimodality of (10) for $g_i \in (-1, 1)$ is to be desired. The problem of studying the extremes of (10) in the interval $(-1, 1)$ can be formulated as follows: the process

$$e(t) = C(z^{-1})w(t) \quad C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_f z^{-f} \quad (19)$$

the model

$$e(t) = G(z^{-1})\hat{w}(t) \quad G(z^{-1}) = 1 + g z^{-1} \quad (20)$$

The maximum likelihood estimate of g is obtained by the minimization of the function

$$V^N(g) = 1/N \sum_{t=1}^N \hat{w}^2(t) \quad (21)$$

The study of the extremes of the likelihood function for the case in which the model is of a lower order than the process (the present situation) is not generally solved, a particular analysis, from case to case, being necessary. Using the ergodic theory, the extreme study of (21) can be done, for great N , on the deterministic function [3]:

$$V(g) = \lim_{N \rightarrow \infty} V^N(g) = E[\hat{w}^2(t)] = 1/2\pi i \oint \frac{C(z) C(z^{-1})}{G(z) G(z^{-1})} \frac{dz}{z} \quad (22)$$

where the integration path is the unit circle.

The determination of the extremes of (22) in the general case is a difficult problem, but it can be done for different particularly values

of f . In what it follows, it is analysed the case when the MA process is of a second order ($f = 2$):

$$V(g) = 1/2\pi i \oint \frac{(1 + c_1 z + c_2 z^2)(z^2 + c_1 z + c_2)}{(1 + gz)(z + g)z^2} dz =$$

$$= \frac{2c_2 g^2 - 2c_1(1 + c_2)g + (1 + c_1^2 + c_2^2)}{1 - g^2} \quad (23)$$

It follows

$$dV/dg = \frac{2c_1(1 + c_2)g^2 + 2[(1 + c_2)^2 + c_1^2]g + 2c_1(1 + c_2)}{(1 - g^2)^2} \quad (24)$$

and consequently

$$\hat{g}_1 = c_1/(1 + c_2) \quad \hat{g}_2 = 1/\hat{g}_1 = (1 + c_2)/c_1$$

Because $c_1 \neq 1 + c_2$ ($z^2 C(z^{-1})$ it is assumed to have no zeros on the unit circle) it follows that indifferent of the process parameter values, (22) will have in the interval $|g| < 1$ only one extremum and that one will be a minimum because:

$$\text{sign}[d^2V/dg^2] = \text{sign}[c_1^2 + (1 + c_2)^2 - 2c_1(1 + c_2)g] \quad (25)$$

4. Numerical example

It is considered the following system

$$(1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2})y(t) = z^{-1}(1 + 0.5z^{-1})u(t) + (1 - z^{-1} + 0.2z^{-2})w(t) \quad (26)$$

where

- $u(\cdot)$ = PRBS of amplitude ± 1 and periode 127
- $w(\cdot)$ = white noise of zero mean and variance $s^2 = 0.81$
- the number of input-output data is $N = 130$
- the dead time is assumed to be known $r = 1$

The number of input-output samples used is chosen relatively small, to study the way in which it is influenced the estimate by the different values given to q ((15) and (16)). To be able to compare the values determined for the parameters at different q , to the real ones, the process order has been assumed to be known. The obtained results, considering $u(t) = y(t) = 0$ $t < 0$ and respectively $u(t) \neq 0$ $y(t) \neq 0$ $t < 0$, are those of the Table 1 and Table 2 respectively.

Table 1

The influence of q upon the estimate, when only the noise model is badly initialized.

Parameter	Estimated values			True values
	$q = 0$	$q = 15$	$q = 30$	
a_1	-1.448	-1.487	-1.483	-1.50
a_2	0.693	0.694	0.693	0.70
b_0	1.034	1.065	1.000	1.000
b_1	0.484	0.468	0.567	0.50
c_1	-1.024	-1.014	-1.003	-1.00
c_2	0.262	0.261	0.242	0.20
s^2	0.82	0.83	0.81	0.81

They show that the consideration of $q = 0$, even for small N values, does not worsen the estimate.

Table 2

The influence of q upon the estimate, when both the noise model and the input-output data filtering are badly initialized.

Parameter	Estimated values			True values
	$q = 0$	$q = 15$	$q = 30$	
a_1	-1.489	-1.490	-1.488	-1.50
a_2	0.697	0.699	0.699	0.70
b_0	1.054	1.028	0.995	1.00
b_1	0.481	0.518	0.563	0.50
c_1	-1.017	-1.079	-1.057	-1.00
c_2	0.278	0.305	0.293	0.20
s^2	0.83	0.83	0.84	0.81

It what it follows, the problem of determining both the structure and parameters is tackled, and the resulted estimate is compared to that obtained by the ML method using the first 100 data. A second order model appears as being suitable for the following reasons:

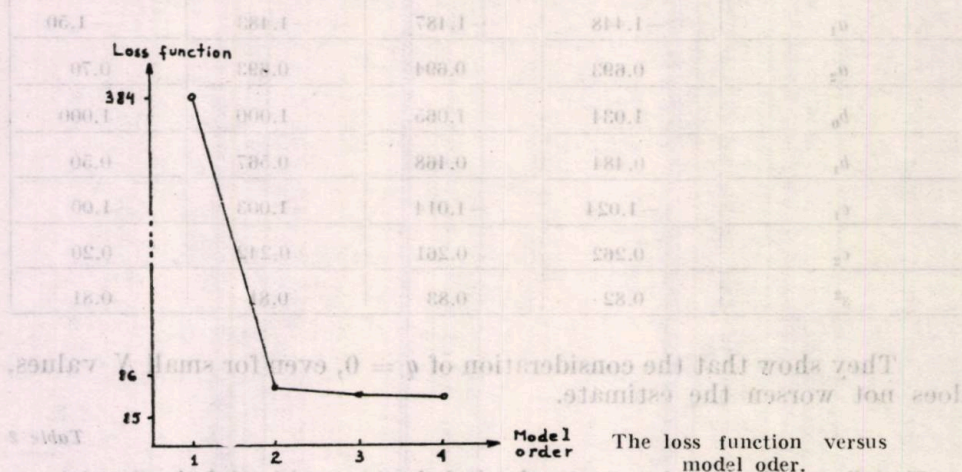
— The insignificant diminution of the loss function for higher orders than two. (Figure 1).

— The great standard deviates for the parameters corresponding to the additional degrees of freedom

— The slower convergence in the case of models of higher order than two. It is owed to the appearance of common zeros between $\hat{A}(z^{-1})$,

$\hat{B}(z^{-1})$ and $\hat{C}(z^{-1})$ and therefore to the corresponding increase of the noise model order.

The intermediate estimates obtained at the different iterations in the case of a second order model, as well as a comparison with the parameters obtained by the ML method, are shown in Table 3.



The iterations of the GLS method with moving-average model for residuals, and the comparison with ML estimate.

Table 3.

Parameter	Iteration				ML estimate	True values
	1	2	3	4		
a_1	-1.307	-1.454	-1.484	-1.484 ± 0.021	-1.504 ± 0.026	-1.5
a_2	0.528	0.667	0.693	0.693 ± 0.018	0.702 ± 0.021	0.7
b_0	1.060	1.063	1.035	1.034 ± 0.073	0.976 ± 0.081	1.0
b_1	0.578	0.501	0.484	0.484 ± 0.096	0.441 ± 0.111	0.5
c_1	-0.587	-1.007	-1.023	-1.024	-1.145 ± 0.106	-1.0
c_2	0	0.247	0.262	0.262	0.264 ± 0.104	0.2
c_3	0	0	-0.004	-0.0041	—	0.0
c_4	0	0	0	0.000	—	0.0
s^2	1.01	0.84	0.82	0.82	0.82	0.81

Owing to the small values of the parameters c_3 and c_4 they can be neglected, such as the estimate obtained by the presented methods is very close to the maximum likelihood estimate.

Conclusions

Sometimes, the utilization of the GLS method with AR residuals is followed by a determination stage of an MA model for residuals [5] which in some applications is a better characterization of the noise.

In these situations the direct application of the GLS method with MA model for residuals appears as being more indicated.

The GLS method with MA model for residuals provides parameter estimate very close to those obtained with the ML method. Given this last method, the presented method has some advantages:

- Smaller complexity and consequently a smaller consumption of computer time and memory.
- The problems which arise at the likelihood function maximization by Newton-Raphson method (e.g. [8] singularity, instability, etc.) are here excluded.
- The determination of the noise model order is an intrinsic stage of the presented method. For the ML method the application of the entire procedure for different orders of the noise model is necessary.

REFERENCES

1. T. Soderstrom, *Automatica* 10, 617 (1974).
2. K. J. Astrom and T. Bohlin, Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records. IFAC Symposium on Theory of Self-Adaptive Systems, Teddington, England (1965).
3. K. J. Astrom and T. Soderstrom, *IEEE Trans. Aut. Control* AC — 19, 769 (1974).
4. D. W. Clarke, Generalized Least Squares Estimation of the Parameters of a Dynamic Model. 1st IFAC Symposium on Identification in Automatic Control Systems, Prague (1967).
5. D. W. Clarke, D. A. J. Dyer, R. Hastings-James, R. P. Ashton and J. B. Emery, Identification and Control of a Pilot-scale Boiling rig. 3 rd IFAC Symposium Identification and System Parameter Estimation, Hague (1973).
6. S. Gentil, J. P. Sandraz and C. Foulard, Different Methods for Dynamic Identification of an Experimental Paper Machine, 3 rd IFAC Symposium Identification and System Parameter Estimation, Hague (1973).
7. P. Stoica, Estimation Methods for Control System Parameters. (AMC 1976, vol. 23, in Rumanian).
8. T. Bohlin, *IBM J. Res. Develop.*, 41 (1970).
9. D. N. P. Murthy and R. E. Kronauer, *IEEE Trans. Aut. Control* AC—18, 549 (1973).

Metoda generalizată a celor mai mici pătrate cu model de medie alunecătoare pentru zgomot

Articolul prezintă o nouă versiune a metodei generalizate a celor mai mici pătrate în care pentru reziduuri este considerat un model de medie alunecătoare. O consecință directă este obținerea estimăției verosimilității maxime (sau a unei estimății foarte apropiate de aceasta) printr-o metodă mult mai simplă și care cere mai puțină memorie și timp de calculator decât maximizarea funcției de verosimilitate prin programare neliniară. Este de asemenea inclusă o discuție privind unicitatea estimăției.

Metoda este verificată utilizând date simulate iar estimățiile obținute sînt comparate cu acelea obținute utilizînd metoda verosimilității maxime.

Automatic Control Department
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej” Bucharest

Conclusions

Sometimes, the utilization of the GLS method with AR residuals is followed by a determination stage of an MA model for residuals [5] which in some applications is a better characterization of the noise. In these situations the direct application of the GLS method with MA model for residuals appears as being more indicated. The GLS method with MA model for residuals provides parameter estimates very close to those obtained with the ML method. Given this last method, the presented method has some advantages:

- Smaller complexity and consequently a smaller consumption of computer time and memory.
- The problems which arise at the likelihood function maximization by Newton-Raphson method (e.g. [8] singularity, instability, etc.) are here excluded.
- The determination of the noise model order is an intrinsic stage of the presented method. For the ML method the application of the entire procedure for different orders of the noise model is necessary.

REFERENCES

1. A. Soderstrom, *Automatica* 10, 617 (1974).
2. A. J. Astrom and T. Soderstrom, *Normal Operating Records, IFAC Symposium on Theory of Self-Adaptive Systems*, Teddington, England (1965).
3. A. J. Astrom and T. Soderstrom, *IEEE Trans. Aut. Control* AC-19, 769 (1974).
4. D. W. Clarke, *Generalized Least Squares Estimation of the Parameters of a Dynamic Model*, 1st IFAC Symposium on Identification in Automatic Control Systems, Prague (1967).
5. D. W. Clarke, D. A. J. Dyer, R. Hastings-Jones, R. P. Johnson and A. R. Farrow, *Identification and Control of a Pilot-scale Rolling Mill*, 3rd IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Hague (1973).
6. A. S. Grew, A. P. Soderstrom and C. Fomberg, *Differential Methods for Dynamic Identification of an Experimental Paper Machine*, 3rd IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Hague (1973).
7. V. Sotoca, *Estimation Methods for Control System Parameters* (AEC 1976, vol. 23, in Hungarian).
8. T. Soderstrom, *IBM J. Res. Develop.* 11 (1970).
9. D. W. P. Murray and A. R. Kinnear, *IEEE Trans. Aut. Control* AC-18, 549 (1973).

Metoda generalizata a celor mai mici patrate cu model de zgomot autoregresiv pentru sisteme

Articolul prezinta o noua varianta a metodei generalizate a celor mai mici patrate in care pentru reziduali este considerat un model de medie autoregresiv. Consecinta directa este obtinerea estimatilor parametrilor sistemului (sau a unui estimabil) foarte apropiate de cele obtinute cu metoda ML, mai simplu si care cere mai putina memorie si timp de calcul decat metoda ML. Este de asemenea inclusa o discutie privind aplicatiile metodei.

Metoda este verificata utilizand date simulatice iar estimatiile obtinute sunt comparate cu cele obtinute utilizand metoda celor mai mici patrate.

Automatic Control Department
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Bucuresti” Bucharest

CALCULATOARE

CZ.: 681.3.04

**VERIFICAREA UNUI ALGORITM DE SINCRONIZARE A PROCESELOR
ÎN SISTEMUL SISIF***

VALENTIN CRISTEA

Introducere

Lucrarea prezintă o metodă de verificare a excluderii mutuale a două sau mai multe procese. Verificarea presupune caracterizarea comportării unei combinații de procese pe baza comportării fiecărui proces din combinație, în conformitate cu anumite reguli care reflectă natura combinației.

Una din problemele dificile în realizarea sistemelor de programe este verificarea corectitudinii acestora. O importantă cantitate de muncă s-a consumat în direcția găsirii unor tehnici generale de verificare: lucrările [1, 2, 3], date cu titlu de exemplu, descriu câteva din rezultatele obținute atât pentru sistemele secvențiale cât și pentru sistemele paralele. Lucrarea de față, bazată pe noțiunile prezentate în [4] și [5], descrie o metodă de a verifica corectitudinea unei combinații de procese, pornind de la comportarea fiecărui proces din combinație. Descrierea este susținută de un exemplu concret de verificare, referitor la un algoritm de sincronizare utilizat în sistemul SISIF [7], realizat la Catedra de calculatoare a I.P.B.

Pentru a ușura urmărirea prezentării dăm câteva elemente din lucrările amintite mai sus. Înțelegem prin:

- variabile de stare-entități elementare care pot lua anumite valori;
 - stare-mulțimea S de valori ale tuturor variabilelor de stare dintr-o mulțime dată V ;
 - spațiul stărilor — mulțimea φ a stărilor posibile pentru V ;
 - acțiune — o mulțime de atribuiri de valori unor variabile din V ;
 - funcție de acțiune — o aplicație din stări în acțiuni;
 - proces — tripletul $P = (\varphi, df, s)$
- unde φ este spațiul stărilor, f este o funcție de acțiune în φ , iar s este o submulțime a lui φ , reprezentând stările inițiale ale procesului.

În studiul sistemelor de calcul complexe se întâlnesc colecții de procese mai mult sau mai puțin independente. Două procese sînt *disjuncte* dacă nu au variabile de stare în comun. Procesele sînt *coexistente* dacă au

* Manuscris predat redacției la data de 1 aprilie 1977

variabile de stare în comun. Procesele coexistente se pot găsi într-o combinație serială, în care caz, în fiecare stare este activ cel mult un proces. Combinația proceselor mai poate fi sincronă (funcția de acțiune a procesului rezultant este o combinație a funcțiilor de acțiune ale tuturor proceselor active) sau asincronă (combinația cea mai generală).

Interacțiunile între procese, care au loc numai prin intermediul variabilelor de stare comune, se pot încadra într-una din următoarele categorii :

- cooperarea, care include interacțiunile anticipate și dorite
- interferența, incluzînd interacțiunile neanticipate sau neacceptabile
- competiția, care include acele interacțiuni care, deși sînt anticipate și acceptabile, sînt nedorite.

1. Corectitudinea cooperării proceselor

Ideea care stă la baza metodei de verificare este de a caracteriza comportarea unei combinații asincrone de procese pe baza comportării fiecărui proces din combinație. Deoarece ne interesează un proces numai din punctul de vedere al relațiilor sale cu celelalte procese, scoatem în evidență setul variabilelor comune, în locul celorlalte variabile, locale procesului utilizând o variabilă de stare fictivă, care caracterizează porțiuni ale acestuia. La algoritmul din [7], a cărui organigramă este prezentată în fig. 1, pentru procesul P1 considerăm variabila fictivă π_1 , cu patru valori (0—3), iar pentru procesul P2 considerăm variabila fictivă π_2 , cu trei valori (0—2). Pentru uniformitatea notației convenim ca variabilele fictive să ia valoarea 1 în secțiunile critice și valoarea 0 în „restul” procesului.

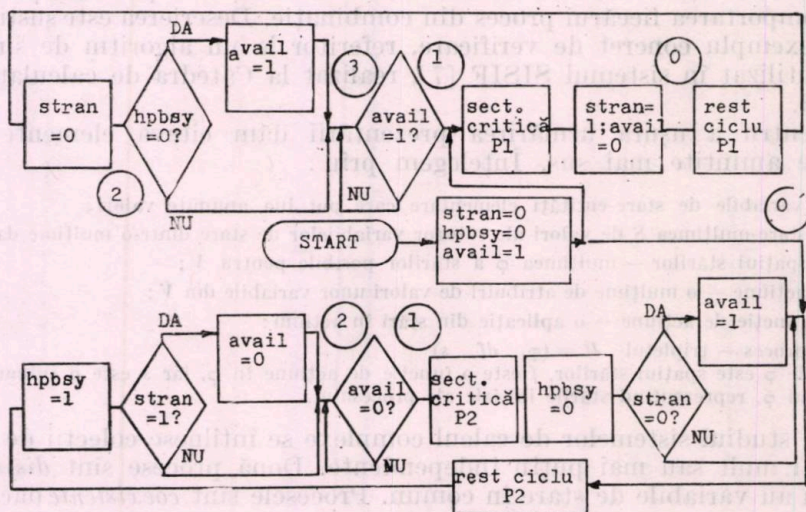


Fig. 1

Menționăm că variabilele comune (stran, hpbsy și avail) au fost păstrate cu semnificația lor reală, astfel că combinația celor două procese este caracterizată de mulțimea de variabile de stare :

$$V = \{\pi_1, \pi_2, \text{stran}, \text{hpbsy}, \text{avail}\}$$

Starea inițială a combinației este (conform fig. 1):

$$S_0 = (10001)$$

Algoritmul prezentat este corect dacă în orice moment, cel mult un proces se va afla în secțiunea sa critică. Această afirmație ne conduce la definirea unei mulțimi de stări interzise, în care ambele procese se află în secțiunea critică :

$$I = \{(11xxx)\}$$

unde x reprezintă valori ne semnificative. Algoritmul este corect dacă combinația de procese nu ajunge, în evoluția ei, într-una din stările interzise. Alte condiții de corectitudine, la care nu facem referire în prezentul material, sînt acelea de operabilitate parțială și de blocare în fața secțiunii critice.

2. Metoda de verificare

Să considerăm un proces în starea S . Aplicînd funcția de acțiune acestei stări vom determina o acțiune, care aplicată variabilelor de stare va conduce procesul în S' . Spunem că are loc tranziția de la S la S' și notăm regula de tranziție (valoarea particulară a funcției de tranziție în starea S):

$$S \Rightarrow S'.$$

Avînd succesiunea de reguli de tranziție :

$$S_0 \Rightarrow S_1, S_1 \Rightarrow S_2, \dots, S_{k-1} \Rightarrow S_k$$

vom nota $S_0 \stackrel{+}{\Rightarrow} S_k$

Considerînd pentru un proces P , spațiul stărilor φ finit și mulțimea de reguli de tranziție $T = \{S \Rightarrow S'\}$ de asemenea finită, o conjuncție a lui T și a unei stări inițiale S_0 selectează în spațiul stărilor submulțimea stărilor obținabile :

$$O(T, S_0) = \{S \in \varphi \mid S_0 \stackrel{+}{\Rightarrow} S\} \cup \{S_0\}$$

Corectitudinea este verificată dacă intersecția $I \cap O$ este mulțimea vidă.

Pentru verificarea practică a corectitudinii, vom considera graful stărilor, alcătuit pe baza regulilor de tranziție. În acest graf, nodurile reprezintă stări din φ , iar arcele reprezintă tranziții din T . Definim ma-

tricea de adiacență X a grafului astfel :

$$x_{ij} = 1 \text{ dacă } (S_i \Rightarrow S_j) \in T$$

$$x_{ij} = 0 \text{ dacă } (S_i \Rightarrow S_j) \notin T$$

Matricea de căi P a grafului se definește astfel :

$$p_{ij} = 1 \text{ dacă există o cale de lungime nonzero de la } S_i \text{ la } S_j$$

$$p_{ij} = 0 \text{ altfel.}$$

Definim de asemenea operațiile booleene asupra matricilor (SI, SAU) :

$$C = A \wedge B$$

$$D = A \vee B$$

pentru matrici pătrate de ordinul n , în modul următor :

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

$$d_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij} \quad \text{pentru } i = 1, n, j = 1, n$$

Se poate demonstra că : $P = X \vee X^2 \vee X^3 \vee \dots \vee X^n$, unde $X^k = X^{k-1} \wedge X$. Se observă ușor că matricea de adiacență se deduce direct din mulțimea regulilor de tranziție. Matricea căilor se poate calcula simplu din matricea de adiacență, utilizând următorul algoritm :

1. $P = X$

2. $j = 1$

3. $i = 1$

4. dacă $x_{ij} = 1$ atunci $p_{ik} = p_{ik} \vee p_{jk}$ pentru k de la 1 la n

5. $i = i + 1$; dacă $i \leq n$ mergi la 4

6. $j = j + 1$; dacă $j \leq n$ mergi la 3, altfel stop.

Între stările i și j nu există nici o cale dacă $p_{ij} = 0$. Considerând i starea inițială (sau stările inițiale), iar j starea interzisă (sau stările interzise) cooperarea este corectă dacă toate p_{ij} sint zero.

3. Deducerea regulilor de tranziție

Regulile de tranziție ale combinației de procese, pe baza cărora se alcătuiește matricea de adiacență și se calculează matricea de căi, se deduc din reguli parțiale, referitoare la fiecare proces din combinație. Aceste reguli parțiale se compun considerînd succesiv combinațiile serială, sincronă și asincronă ale proceselor.

Forma unei reguli parțiale referitoare la procesul i este :

$$(x \dots x p_i x \dots x) (x \dots x d_{i_1} x \dots x d_{i_m} x \dots x) \rightarrow (x \dots x p'_i x \dots x) (x \dots x d_{k_1} x \dots x d_{k_n} x \dots x)$$

unde :

- p_i, p'_i — sînt valorile variabilei fictive π_i (a procesului P_i)
 $d_{j_1}, \dots, d_{j_m}$ — valorile variabilelor testate în tranziția procesului i de la p_i la p'_i
 $d_{k_1}, \dots, d_{k_n}$ — valorile variabilelor modificate
 x — rezultat sau condiție nesemnificativă.

De exemplu, procesul 1 în tranziția din starea 0 în 2 nu testează valoarea nici unei variabile comune și atribuie valoarea zero variabilei „stran” (conform fig. 1). Aceasta se scrie :

$$(0x) (xxx) \rightarrow (2x) (0xx).$$

Similar se deduc celelalte reguli parțiale.

Pentru scrierea regulilor de tranziție considerăm mai întii combinația serială de procese. Presupunem că procesul 1 este activ și dezvoltăm regulile de tranziție pe baza regulilor parțiale scrise : în afara modificărilor impuse în tranziție de regula parțială, celelalte valori trebuie să rămână neschimbate. Din regula parțială scrisă anterior deducem următoarele reguli de tranziție :

$$(00)(100) \Rightarrow (20)(000) \quad (01)(110) \Rightarrow (21)(010)$$

$$(00)(101) \Rightarrow (20)(001) \quad (01)(111) \Rightarrow (21)(011)$$

$$(00)(110) \Rightarrow (20)(010) \quad (02)(100) \Rightarrow (22)(000)$$

$$(00)(111) \Rightarrow (20)(011) \quad (02)(101) \Rightarrow (22)(001)$$

$$(01)(100) \Rightarrow (21)(000) \quad (02)(110) \Rightarrow (22)(010)$$

$$(01)(101) \Rightarrow (21)(001) \quad (02)(111) \Rightarrow (22)(011)$$

Similar se scriu regulile de tranziție din celelalte reguli parțiale. Să considerăm acum combinația sincronă : toate procesele active își schimbă starea. În cazul nostru vom considera toate combinațiile posibile a cîte două reguli parțiale. Modificările asupra variabilelor ca și valorile testate trebuie să satisfacă ambele reguli parțiale din pereche. De exemplu, pentru regulile parțiale :

$$(2x)(01x) \rightarrow (3x)(0xx)$$

$$(x2)(x10) \rightarrow (x1)(x1x)$$

se obține regula de tranziție :

$$(22)(010) \Rightarrow (31)(010).$$

În schimb regulile parțiale :

$$(0x)(1xx) \rightarrow (2x)(0xx)$$

$$(x1)(01x) \rightarrow (x0)(x01)$$

nu se pot combina pentru deducerea unor reguli de tranziție deoarece procesul 1 reclamă ca variabila comună „stran” să aibe valoarea 1 în timp ce procesul 2 reclamă valoarea 0 pentru a putea efectua tranzițiile specificate. Regulile descriu acțiuni incompatibile.

În fine, în combinarea regulilor parțiale putem întâlni situația :

$$(1x)(0xx) \rightarrow (0x)(1x0)$$

$$(x1)(01x) \rightarrow (x0)(x01)$$

din care se obține regula de tranziție :

$$(11)(010) \Rightarrow (00)(100)$$

dacă se consideră că procesul 1 reușește în acțiunea de a atribui valoarea 0 lui „avail”, sau :

$$(11)(010) \Rightarrow (00)(101)$$

dacă procesul 2 reușește în acțiunea de a atribui valoarea 1 lui „avail” (combinație asincronă).

În cazul algoritmului nostru, în urma stabilirii regulilor de tranziție se obține graful din fig. 2, în care sînt reprezentate numai stările obținabile. Stările interzise nu apar în acest graf, ceea ce dovedește corectitudinea algoritmului.

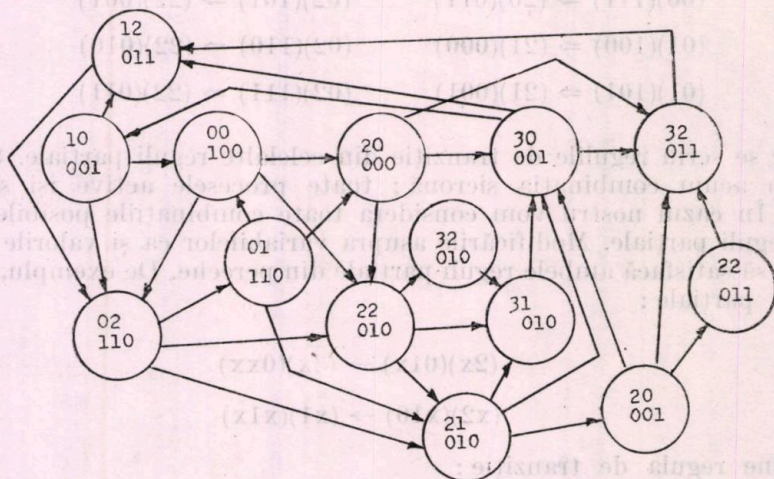


Fig. 2.

Concluzii

În prezenta lucrare a fost abordată problema corectitudinii cooperării proceselor coexistente asincrone numai în ceea ce privește excluderea mutuală în secțiunea critică. Alte două criterii care se pretează la o tratare similară sînt operabilitatea parțială și blocarea în fața secțiunii critice. Metoda prezentată permite programatorilor să verifice validitatea soluțiilor adoptate înainte de implementarea lor.

Catedra de calculatoare

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. B. Elspas s. a. : Computing Surveys, vol. 4, nr. 2, 1972
2. A. N. Habermann : CACM vol. 15, nr. 3, martie 1972
3. K. Lautenbach, H. A. Schmid : Use of Petri Nets for Proving Correctness of Concurrent Process Systems, Information Processing 1974.
4. J. J. Horning, B. Randell : Computing Surveys, vol. 5, nr. 1, martie 1973.
5. P. Gilbert, W. J. Chandler : CACM nr. 6, iunie 1972.
6. A. T. Bertiss : Data Structures. Theory and Practice, ed. W. Rheinboldt, Academic Press, 1971.
7. V. Cristea : Sincronizarea proceselor sistemului SISIF, comunicare Craiova 1974.

La verification d'un algorithm de synchronisation de proces dans le system SISIF

Le travail présente une méthode de vérification de l'exclusion mutuelle des processus parallèles asynchrones. La vérification du processus combiné suppose l'existence d'une description séparée du comportement de chaque processus et leur composition conformément aux règles qui correspondent à la nature de la combinaison.

C.Z. : 621.24.01 : 517.923

**OBSERVAȚII ASUPRA ECUAȚIEI DE STARE A FLUIDELOR
ȘI ASUPRA RELAȚIEI LUI EULER PENTRU TURBOMAȘINI***

DAN GH. IONESCU

Se prezintă două noi demonstrații privind : 1) Ecuația de stare a fluidelor ; 2) Relația lui Euler pentru turbomașini.

În continuarea lucrării [1], în nota de față propunem două prezentări, pe care le credem noi, privind ecuația de stare a fluidelor și relația lui Euler pentru turbomașini.

1. Ecuația de stare a fluidelor

De obicei, ecuația de stare se prezintă în mod independent, pentru lichide și pentru gaze. Pornind de la o idee a lui R. C. Pefley și R. I. Murray, ([2], pp. 32—34), propunem o prezentare unitară. Adoptînd notațiile uzuale, ecuația de stare a unui fluid se poate scrie sub una dintre formele

$$\rho = \rho(p, T) \quad \text{sau} \quad v = v(p, T), \quad (1)$$

unde $v = 1/\rho$. Din a doua relația (1) se deduce

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT, \quad (2)$$

unde indicii arată în mod explicit mărimile presupuse constante atunci cînd se calculează derivatele parțiale respective. Împărțind cu v și introducînd coeficientul de compresibilitate izotermică κ_T și coeficientul de dilatare volumică izobară α ,

$$\kappa_T = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T, \quad \alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p,$$

mai putem scrie relația (2) sub forma

$$\frac{dv}{v} = \alpha dT - \kappa_T dp. \quad (3)$$

* Manuscris predat redacției la data de 26 aprilie 1975.

sau, dacă se pornește de la (5),

$$\rho = \rho_0[2 + \alpha_T(p - p_0) - \alpha(T - T_0)], \quad (8)$$

relații utilizate în hidraulică.

La gazele ideale, în cazul unei transformări izoterme avem prin definiție $p v = C$, ($C = \text{const.}$), (legea lui Boyle și Mariotte), deci

$$\alpha_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{p}{C} \cdot \frac{-C}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

În cazul unei transformări izobare avem prin definiție $v/T = v_0/T_0 = C'$, ($C' = \text{const.}$), (legea lui Gay-Lussac), deci

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{C' T} \cdot C' = \frac{1}{T},$$

ceea ce arată că α este același pentru toate gazele ideale și depinde numai de temperatură. Ecuația de stare (4) devine

$$v = v_0 e^{\ln(T/T_0) - \ln(p/p_0)},$$

sau încă

$$p v = \frac{p_0 v_0}{T_0} T.$$

Notînd $\alpha_0 = 1/T_0$ și $R = p_0 v_0 / T_0 = p_0 v_0 \alpha_0$, această relație devine

$$p v = R T, \quad \text{sau} \quad \frac{p}{\rho} = R T. \quad (9)$$

R este constanta caracteristică a gazului considerat și depinde de natura acestuia, deoarece $R = p_0 \alpha_0 / \rho_0$, iar pentru valorile inițiale p_0 , T_0 coeficientul α are aceeași valoare α_0 pentru toate gazele, dar densitatea ρ are o valoare ρ_0 care variază de la un gaz la altul. Pentru o masă m de gaz, ecuația caracteristică se obține înmulțind cu m prima relația (9); notînd $\mathfrak{V} = m v = m / \rho$, rezultă astfel ecuația lui Clapeyron:

$$p \mathfrak{V} = m R T \quad (10)$$

2. Relația lui Euler pentru turbomașini

De obicei, relația lui Euler pentru turbomașini este dedusă fie considerînd o suprafață de control S fixă în raport cu un reper fix (inertial) și care este formată din două suprafețe de revoluție coaxiale ce cuprind

în interiorul lor palele rotorului și din două suprafețe plane care fac ca S să fie o suprafață închisă, fie considerind o suprafață de control S fixă în raport cu rotorul și care mărginește domeniul dintre două pale. Demonstrațiile respective, deși conduc la rezultatul exact, sînt principial nesatisfăcătoare. Într-adevăr, în primul caz se consideră că în interiorul lui S sînt cuprinse și palele rotorului; or, principiul momentului cinetic pentru un fluid presupune că S este o suprafață închisă, complet umplută cu fluid și numai cu fluid. În al doilea caz se aplică teorema momentului cinetic sub forma valabilă pentru S fixă în raport cu un reper inerțial, deși S este fixă în raport cu un reper neinerțial; or, dacă S este fixă în raport cu un reper neinerțial, teorema momentului cinetic are o formă mai complicată decît în cazul cînd S este fixă în raport cu un reper inerțial. De aceea, în ultimul timp au fost date demonstrații care urmăresc o rezolvare corectă a problemei, (cf. [3]). Demonstrația care urmează este principial mai simplă decît cea din [3], dar necesită demonstrarea prealabilă a teoremei momentului cinetic în raport cu un reper neinerțial, ([4], pp. 136–139*):

$$\int_S \vec{r} \times \rho \vec{v}_r (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA = \quad (11)$$

$$= \Sigma \vec{r}_e \times \vec{F}_e - \int_D \vec{r} \times \rho [\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r] d^3r.$$

În (11) se utilizează notațiile uzuale: suprafața de control S este fixă în raport cu reperul mobil $Oxyz$ a cărui mișcare în raport cu reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ este caracterizată prin viteza $\vec{v}_0(t)$ a lui O și prin vectorul vitează unghiulară $\vec{\omega}(t)$, $\vec{r}$ este vectorul de poziție în raport cu reperul mobil, $\vec{v}_r$ viteza relativă a fluidului, $\vec{n}$ normala exterioară la S , iar $\Sigma \vec{r}_e \times \vec{F}_e$ momentul, în raport cu O , al forțelor exterioare aplicate fluidului din S .

Ideea de a demonstra relația lui Euler pornind de la (11) este exprimată explicit de W. M. Swanson, ([5], p. 291), dar acest autor nu o aplică, deoarece crede că efectuarea integralei de volum nu este posibilă. Vom arăta că, cel puțin în cadrul anumitor ipoteze simplificatoare, acest calcul este posibil. Anume, vom demonstra relația lui Euler în următoarele ipoteze simplificatoare: 1°. Fenomenul este plan, adică traiectoriile particulelor de fluid sînt curbe situate în plane perpendiculare pe axa rotorului, iar mișcarea fluidului este identică în toate aceste plane, (ipoteză realizată aproape exact în cazul turbinelor Francis ultralente). 2°. Rotorul are un număr finit de pale infinit subțiri. 3°. Rotorul are o viteză unghiulară constantă $\vec{\omega}$. 4°. Fluidul este perfect. Se consideră o suprafață de control S fixă în raport cu rotorul și formată din doi cilindri circulari coaxiali cu rotorul și care coincid cu suprafața de intrare S_1 a fluidului în rotor și respectiv cu suprafața de ieșire S_2 din rotor, din suprafața S_1

* cf. Dan Gh. Ionescu, Introducere în hidraulică, Editura tehnică, București, 1977, p. 111. (Notă adăugată la corectură)

a palelor rotorului și din două suprafețe S' și S'' paralele cu planul desenului și care fac ca S să fie o suprafață închisă (fig. 2). Asupra fluidului

din S se exercită greutatea sa proprie $\vec{F}_g$, forțele de presiune aplicate pe $S - S_l$, precum și forțele datorate palelor și a căror sumă va fi notată cu $\Sigma \vec{F}_l$. Se alege reperul fix $O_1x_1y_1z_1$ și reperul mobil $Oxyz$ astfel încît O_1 și O să coincidă cu centrul de greutate al volumului $\mathcal{V}$ limitat de S , iar O_1z_1 și Oz să coincidă cu axa rotorului. Se consideră momentele în raport cu

O . Momentul lui $\vec{F}_g$ este nul, deoarece $\vec{F}$ trece prin O . Momentul total al forțelor elementare de presiune exercitate pe $S - S_l$ este și el nul, deoarece aceste forțe sînt distribuite simetric față de axa rotorului, deci față de O au două cîte două momente de modul egal, dar de semn contrar. Singurul moment nenul în raport cu O este dat de forțele exercitate, asupra lichidului din S , de

către pale. Ținînd seamă că $\vec{a}_0 = 0$, $\vec{\omega} = 0$ și că fluidul circulă numai prin S_1 și S_2 , apoi notînd componentele vitezei ca în teoria mașinilor hidraulice, ($\vec{v}_a = \vec{c}$, $\vec{v}_r = \vec{w}$, $\vec{v}_t = \vec{u}$), rezultă că relația (11) devine

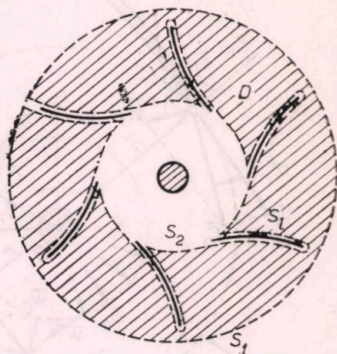


Fig. 2

$$\rho \int_{S_1} \vec{r} \times \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA + \rho \int_{S_2} \vec{r} \times \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA = \quad (12)$$

$$= \Sigma \vec{r}_e \times \vec{F}_l - \rho \int_D \vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{w}] d\mathcal{V}.$$

Cuplul exercitat de fluid asupra palelor fiind preluat de arborele rotorului, interesează numai momentele în raport cu axul acestuia. Deoarece vectorii $\vec{F}_l$, $\vec{w}$ și $[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{w}]$ sînt paraleli cu Oxy , rezultă că ecuația de momente în raport cu Oz se obține înmulțind scalar relația (12) cu versorul $\vec{k}$ al lui Oz . Notînd $\vec{M} = -\Sigma \vec{r}_e \times \vec{F}_l$, rezultă că momentul, în raport cu Oz , al forțelor exercitate de lichid asupra rotorului este $\vec{M} = -\vec{M} \vec{k} = -\vec{k} \Sigma \vec{r}_e \times \vec{F}_l$, sau încă, ținînd seamă de (12),

$$\begin{aligned} M = & -\rho \vec{k} \int_{S_1} \vec{r} \times \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA - \rho \vec{k} \int_{S_2} \vec{r} \times \vec{w} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dA - \\ & - \rho \vec{k} \int_D \vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{w}] d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (13)$$

Introducînd pe S_i viteza relativă medie $\vec{W}_i$ eși coeficientul de moment cinetic β'_i și notînd cu A_i aria lui S_i , ($i = 1, 2$), rezultă

$$\int_{S_i} \vec{r} \times \vec{\omega} (\vec{w} \vec{n}) dA = \beta'_i \vec{r}_i \times \vec{W}_i (\vec{W}_i \vec{n}_i) A_i = \beta'_i \vec{r}_i \times \vec{W}_i W_i A_i \cos \gamma_i, (i = 1, 2).$$

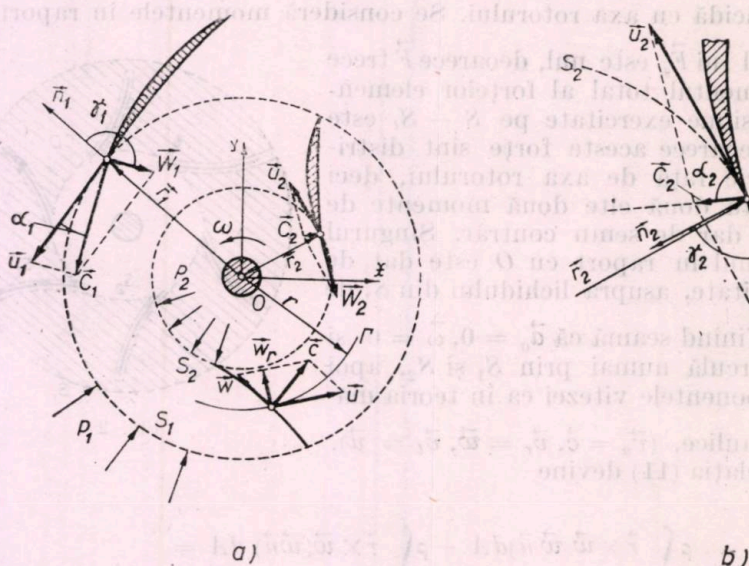


Fig. 3

Dar, (fig. 3), $\vec{r}_i \times \vec{W}_i = r_i W_i \sin \gamma_i \cdot \vec{k}$, ($i = 1, 2$), iar debitul care trece prin S_1 și S_2 este $Q = W_1 \cos(\pi - \gamma_1) \cdot A_1 = -W_1 \cos \gamma_1 \cdot A_1 = W_2 \times \cos \gamma_2 \cdot A_2$, deci

$$\begin{aligned} -\rho \vec{k} \int_{S_1} \vec{r} \times \vec{\omega} (\vec{w} \vec{n}) dA - \rho \vec{k} \int_{S_2} \vec{r} \times \vec{\omega} (\vec{w} \vec{n}) dA = \\ = Q(\beta'_1 r_1 W_1 \sin \gamma_1 - \beta'_2 r_2 W_2 \sin \gamma_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Pe de altă parte, deoarece $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \vec{c}) \vec{a}$, avem

$$\begin{aligned} -\vec{k} \int_D \vec{r} \times [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{w}] dV = - \\ - 2 \vec{k} \int_D (\vec{w} \vec{r} \cdot \vec{\omega}) dV = - 2 \int_D (\vec{w} \vec{r}) \omega dV. \end{aligned} \quad (15)$$

Dar $\omega = \text{const.}$ și $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega r \cos(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega r$, unde ωr este proiecția lui $\vec{\omega}$ pe direcția razei. Presupunând că dimensiunea domeniului D pe direcția axei Oz este egală cu unitatea, avem $d\varphi = dA \cdot dr = (r d\theta \cdot 1) \cdot dr = ds \cdot dr$, unde ds este elementul de arc al cercului Γ de rază r și centrat în O . Chiar dacă ω_r nu are aceeași valoare pe întreaga circumferință Γ , adică chiar dacă $\omega_r = \omega_r(s)$, avem $\int_{\Gamma} \omega_r(s) ds = Q$; deci, neglijând grosimea palelor, rezultă

$$\begin{aligned} -2 \int_D (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \omega d\varphi &= -2\omega \int_{r_1}^{r_2} r \left(\int_0^{2\pi} \omega_r r d\theta \right) dr = -2\omega \int_{r_1}^{r_2} r \left(\int_{\Gamma} \omega_r ds \right) dr = \\ &= -2\omega Q \int_{r_1}^{r_2} r dr = \omega Q(r_1^2 - r_2^2) = Q(r_1 u_1 - r_2 u_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Introducînd expresiile (14)–(16) în (13), se obține

$$M = \rho Q [r_1(u_1 + \beta'_1 W_1 \sin \gamma_1) - r_2(u_2 + \beta'_2 W_2 \sin \gamma_2)]. \quad (17)$$

Presupunînd că $\beta'_1 = \beta'_2 = 1$, ținînd seamă că viteza absolută medie pe S_i este $\vec{C}_i = \vec{W}_i + \vec{u}_i$ și notînd cu C_{ui} proiecția lui $\vec{C}_i$ pe direcția lui $\vec{u}_i$, ($i = 1, 2$), (17) se mai poate scrie

$$M = \rho Q (r_1 C_{u1} \cos \alpha_1 - r_2 C_{u2} \cos \alpha_2) = \rho Q (r_1 C_{u1} - r_2 C_{u2}). \quad (18)$$

Puterea dezvoltată de fluid asupra rotorului este

$$P = M \omega = \rho \omega Q (r_1 C_{u1} - r_2 C_{u2}) = \rho Q (u_1 C_{u1} - u_2 C_{u2}) \quad (19)$$

Catedra de hidraulică și mașini hidraulice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. Dan Gh. Ionescu, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București, seria electrohnică, tomul XXXIX, nr. 1, 1977, 107–112.
2. Richard K. Pefley, R. Ian Murray, Thermofluid Mechanics. McGraw-Hill Book Company, New York ..., 1966.
3. St. Zarea, M. Exarhu, Rev. Roumaine des Sci. Techn., Sér. de Mécanique Appliquée, 18, 1973, 427.
4. Irving H. Shames, Mechanics of Fluids. McGraw-Hill Book Company, New York ..., 1962.
5. W. M. Swanson, Fluid Mechanics. Holt, Rinehard and Winston, New York ..., 1970.

Some Remarks Concerning the Equation of State, and Euler's Turbine Equation

- Two new proofs are presented, concerning: 1) The equation of state of a fluid;
2) Euler's turbine equation.



**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ**

apare trimestrial, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehniceii din București“ și Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din institut. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Correspondența privind articolele, schimburile de publicații și abonamentele se fac pe adresa institutului.

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
РАЗДЕЛ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

выходит четыре раза в год, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehniceii din București“, и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут публиковаться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SERIES OF ELECTROTECHNICS**

The Bulletin is issued quarterly, continuing the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehniceii din București“ and Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the folwing address

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SÉRIE ELECTROTECHNIQUE**

paraît tous les trois mois continuant les anciens periodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehniceii din București“ et Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnamants est :

Adresa :

**INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
ROMANIA
Splaiul Independenței nr. 313
Căsuța Poștală nr. 2356
(pentru Buletinul Institutului)
Seria Electrotehnică**

1978 APR 27

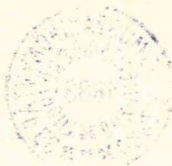
Lei 20

= 1130/2

**BULETINUL
INSTITUTULUI
POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ”
BUCUREȘTI**

SERIA ELECTROTEHNICĂ

**TOMUL XXXIX NUMĂRUL 4 ANUL 1977,
OCTOMBRIE—DECEMBRIE**



COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL : Academician *Radu Voinea*

MEMBRII : Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* (redactor responsabil adjunct); Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Gheorghe Cartianu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România; Prof. dr. docent ing. *Virgil Constantinescu*; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu*; Prof. dr. ing. *Gleb Drăgan*; Prof. dr. ing. *Nicolae Geru*; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald*; Prof. dr. *Ion Grădișteanu*; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan*; Prof. ing. *Jean Moncea*; Academician *Ecaterina Ciorănescu Nenitescu*; Prof. dr. ing. *Aurel Oprean*; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu*; Prof. dr. ing. *Ion Popescu*; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu*; Prof. dr. ing. *Călin Sergiu* (secretar științific); Prof. dr. *Octavian Stănășilă*; Prof. dr. docent ing. *Ion Teoreanu*; Prof. dr. docent *Rodica Vilcu*.

Editor : Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București,
Splaiul Independenței 313. Cod. 77206 Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356
TELEX : 10.490 PIBUH

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ILEXIM
import-export press, 13 Decembrie St. Nr. 3, P.O.B. 2001, telex 011226, Bucharest
ROMANIA

Sumar

MATEMATICA

D. Homentcovich

Asupra determinării unor cimpuri potențiale, plan-paralele în condiții de frontieră mixte

3

FIZICA

I. M. Popescu, G. A. Stanciu, C. M. Stoichița

Nou sistem de testare a dispozitivelor semiconductoare și a circuitelor integrate prin baleaj cu laser

11

D. Bogdan, Tr. Crețu, [H. Fuia,] G. Macarie, D. G. Popescu

Unele aspecte ale dezintegrării Beta ^{186}Re ^{186}Os

17

ELECTRONICA

Ed. Nicolau

Oscilații în sisteme cibernetice (cu reacție)

27

AUTOMATICA

N. Sprinceană, R. Dobrescu, Fl. Ionescu, Th. Boran-
giu, C. Frankenfeld

Contributions to Implementation of Numerical Adaptive Control Systems for Milling Machines

35

M. Tertișco, P. Stoica

Identificarea funcției de transfer folosind semnale pseudoaleatoare binare (SPAB)

47

I. Russ

Synthesis of a Suboptimal Control Using the Sensitivity Functions

55

CALCULATOARE

Eugenia Kalisz, P. Dimo

Macroprocesorul TRAC

63

M. Vărtosu, P. Alexandru Dan, A. Vild-Maior

Asupra unor operații necesare în prelucrarea automată a informației conținute în imagini

73

ENERGETICA

A. Carabulea, R. Tenovici, C. Dumitriu,
Algoritm privind optimizarea bilanțurilor energetice în structura ingineriei sistemelor

83

M. Eremia

Modele simplificate pentru studiul stabilității la mici perturbații a sistemelor electrice prin metoda modală

97



1983 MAR. 9



MATEMATICĂ

D. Homentcovski

Asupra determinării unor clasuri potențiale prin parabolă în condiții de frontieră mixte

TEHNICĂ

I. M. Popescu, G. A. Stancu, G. M. Stoichiță

Un sistem de testare a dispozitivelor semiconductoare și a circuitelor integrate prin metoda

11

D. Popescu, T. Căciuc, H. Tătaru, G. Mărușter, D. G. Popescu

17

ELECTRONICĂ

Ed. Nicolae

27

AUTOMATIZARE

N. Spătaru, H. Dobrescu, R. Ionescu, T. Botea

și C. Frankel

Contribuții la implementarea sistemelor de control adaptiv

35

M. Tătaru, P. Stoichiță

Identificarea funcției de transfer folosind metodele parametrice

47

L. Rădu

55

CALCULATOARE

Eugenia Kallay, P. Dima

63

M. Vălculescu, P. Alexandru, Dan, A. Vild-Majur

Asupra unor aspecte necesare în proiectarea calculatoarelor

73

INDUSTRIALĂ

A. Ciabulea, R. Tănăsescu, C. Dumitriu

Algoritmi pentru optimizarea energiei în sisteme industriale

83

M. Ecim

Metode simplificate pentru studii de stabilitate în mișcare

97

MATEMATICĂ

C.Z. : 517.5

**ASUPRA DETERMINĂRII UNOR CÎMPURI POTENȚIALE,
PLAN-PARALELE ÎN CONDIȚII DE FRONTIERĂ MIXTE.***

DOREL HOMENTCOVSCHI

Se consideră problema determinării unei funcții armonice într-un domeniu plan, simplu conex, atunci cînd se cunosc valorile ei pe anumite arce ale frontierei și valoarea derivatei sale normale pe restul frontierei. În continuare se determină cîmpul electrostatic al unui condensator cu armăturile aliniate și al unui sistem plan-paralel de electrozi aliniați încărcăți la potențiale diferite.

Introducere

Numeroase probleme fizice privind regimurile staționare ale cîmpului electromagnetic, curgerea staționară a fluidelor incompresibile, mișcarea fluidelor în medii poroase etc., ..., conduc la problema matematică a determinării unei funcții armonice într-un domeniu plan, simplu conex, cunoscînd valorile funcției pe anumite arce ale frontierei și valorile derivatei sale normale pe celelalte arce.

Abordarea acestei probleme prin metode numerice directe (ca metoda diferențelor finite sau metoda elementelor finite) este dificilă întrucît în general soluția problemei are singularități în unele puncte ale frontierei.

Să considerăm un domeniu plan D mărginit de curba simplă închisă C pe care o presupunem netedă pe porțiuni. Fie de asemenea $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n, 2n$ puncte de pe curba C înfîlțite în această ordine la parcurgerea frontierei (Fig. 1).

* Manuscris predat redacției la data de 1 aprilie 1977

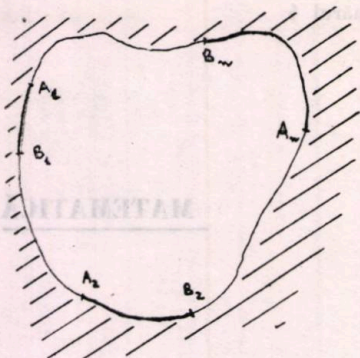


Fig. 1.

Ne punem problema determinării unei funcții $U(x, y) \in C^{(2)}(\bar{D}) \cap C^{(0)}(D - \{A_1; B_1; \dots; A_n; B_n\})$ care să fie armonică în D :

$$\Delta U(x, y) = 0 \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

și să satisfacă următoarele condiții la frontieră:

$$U(P) = \Phi(P) \quad (2)$$

$$P \in \overline{A_1 B_1} \cup \overline{A_2 B_2} \cup \dots \cup \overline{A_n B_n}$$

$$\frac{\partial U(P)}{\partial n} = \Psi_1(P) \quad P \in \overline{B_n A_1} \cup \overline{B_1 A_2} \cup \dots \cup \overline{B_{n-1} A_n} \quad (3)$$

$\Phi(P)$ și $\Psi_1(P)$ fiind două funcții date, mărginite și continue pe domeniul lor de definiție, cu excepția unui număr finit de puncte unde pot avea discontinuități de primă speță.

În cazul particular $n = 2$ și al datelor la limită $\Phi(P)$ și $\Psi_1(P)$ constante problema enunțată a fost considerată recent în [5]. Metoda de abordare utilizată este mai complicată decît cea pe care o prezentăm mai jos și nu poate fi extinsă la cazuri mai generale.

Funcția $U(x, y)$ fiind armonică în D admite o conjugată armonică în acest domeniu, cu alte cuvinte există o funcție $V(x, y) \in C^2(D)$ astfel ca funcția

$$F(z) = U(x, y) + i V(x, y) \quad (4)$$

să fie o funcție olomorfă de variabila complexă $z = x + iy$ în D [1]. Problema determinării funcției $U(x, y)$ este echivalentă cu problema determinării funcției $F(z)$ (abstracție făcînd de o cuadratură).

Condiția (2) dă valorile părții reale a funcției $F(z)$ pe arcele $\overline{A_1 B_1}$; $\overline{A_2 B_2}$; ... $\overline{A_n B_n}$. Pe celelalte arce din (3) avem:

$$\frac{\partial V(P)}{\partial s} = \frac{\partial U(P)}{\partial n} = \Psi_1(P)$$

și de aici

$$V(P) = \int \Psi_1(P) ds_p + C \equiv \Psi(P) \quad (5)$$

În definitiv problema la limită (1) + (2) + (3) a fost redusă la următoarea:

Să se determine funcția $F(z) = U(x, y) + i V(x, y)$ olomorfă în domeniul D cunoscînd valorile părții sale reale pe arcele $\overline{A_1 B_1}$; $\overline{A_2 B_2}$; ... $\overline{A_n B_n}$ ale frontierei și valorile părții imaginare pe arcele $\overline{B_n A_1}$; $\overline{B_1 A_2}$; ... $\overline{B_{n-1} A_n}$.

Această problemă la limită pentru funcția complexă $F(z)$ este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de problema lui Volterra [2].

Domeniul D fiind simplu conex poate fi totdeauna reprezentat conform pe semiplanul superior Ω din planul $Z = X + iY$. Odată soluționată problema lui Volterra pentru semiplanul superior soluția problemei inițiale se obține cu ajutorul funcției de reprezentare conformă.

Fie $(a_1, b_1); (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ ($-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n < +\infty$) segmentele axei OX ce corespund arcelor $\widehat{A_1B_1}, \widehat{A_2B_2}, \dots, \widehat{A_nB_n}$ prin transformarea conformă. Desemnăm prin $\Phi(X)$ valorile funcției $U(X, 0) = \Phi(P(X))$ pe segmentele $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ iar prin $\Psi(X) = \Psi(P(X))$ valorile funcției $V(X, 0)$ pe celelalte segmente ale axei reale. Formula ce soluționează problema lui Volterra în cazul semiplanului superior are forma [2]:

$$F(Z) = \frac{i}{\pi} \sqrt{P_1(Z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(t)}{\sqrt{P_1(t)}} \frac{dt}{Z-t} + \frac{Q(Z)}{\sqrt{P_1(Z)}} \quad (6)$$

unde

$$P_1(Z) = \prod_{j=1}^n (Z - a_j)(Z - b_j)$$

$$\mu(t) = \begin{cases} \Phi(t) & t \in (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup \dots \cup (a_n, b_n) \\ i\Psi(t) & t \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup \dots \cup (b_n, +\infty) \end{cases}$$

iar $Q(Z)$ este un polinom de grad cel mult egal cu n și cu coeficienți reali arbitrari.

1. Cîmpul electrostatic al unui condensator plan cu armăturile aliniate.

Fie de determinat cîmpul electrostatic al condensatorului din figura 2 la care armătura (a_1, b_1) se presupune că are potențialul V_1 iar armătura (a_2, b_2) potențialul V_2 .

Întrucît regimul este electrostatic iar dielectricul se presupune omogen izotrop linear și fără sarcini electrice, cîmpul electrostatic va satisface în exteriorul armăturilor ecuațiile [4]:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

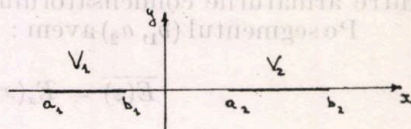


Fig. 2.

Aceste relații pot fi interpretate ca fiind condițiile lui Cauchy-Riemann pentru funcțiile E_x și $-E_y$ astfel că funcția complexă

$$\overline{E(z)} = E_x(x, y) - i E_y(x, y) \quad (9)$$

este o funcție olomorfă de variabila complexă $z = x + iy$.

Mai avem

$$E_x(x, 0) = 0 \quad x \in (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$$

$$E_y(x, 0) = 0 \quad x \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, +\infty)$$

întrucât (a_1, b_1) și (a_2, b_2) sînt segmente echipotențiale iar $(-\infty, a_1)$; (b_1, a_2) și $(b_2, +\infty)$ sînt linii de cîmp.

Astfel conjugatul cîmpului electrostatic complex $E(z)$ este soluția unei probleme a lui Volterra pentru semiplanul superior cu date la limită omogene. Vom avea atunci din (6):

$$\overline{E(z)} = \frac{Q(z)}{\sqrt{P_1(z)}} \quad (10)$$

unde $P_1(z) = (z - a_1)(z - b_1)(z - a_2)(z - b_2)$.

(Pentru simplificarea scrierii am notat cu z variabila complexă).

$Q(z)$ este un polinom de grad cel mult egal cu doi și cu coeficienții reali. Cum $\overline{E(z)}$ trebuie să se comporte la infinit ca z^{-2} sîntem conduși la expresia:

$$\overline{E(z)} = \frac{A_0}{\sqrt{(z - a_1)(z - b_1)(z - a_2)(z - b_2)}} \quad (11)$$

Constanta A_0 o vom determina din condiția ca diferența de potențial dintre armăturile condensatorului să fie $V_2 - V_1$.

Pe segmentul (b_1, a_2) avem:

$$\overline{E(z)} = E_x(x, 0) = -\frac{\partial V(x, 0)}{\partial x}$$

$$\sqrt{P_1(z)} = \sqrt{P_1(x)}$$

De aici rezultă

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, 0) = \frac{A_0}{\sqrt{P_1(x)}}$$

relație care integrată între b_1 și a_2 dă

$$V_2 - V_1 = A_0 \int_{b_1}^{a_2} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}}$$

Sau :

$$A_0 = (V_2 - V_1) \cdot \left\{ \int_{b_1}^a \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} \right\}^{-1/2} \quad (12)$$

Integrala ce intervine în relația (12) se poate exprima cu ajutorul funcțiilor eliptice rezultînd în definitiv următoarea expresie a cîmpului electrostatic complex :

$$\overline{E(z)} = \frac{(V_2 - V_1) \sqrt{(b_2 - b_1)(a_2 - a_1)}}{2K(k) \sqrt{P_1(z)}} \quad (13)$$

unde

$$k = \sqrt{\frac{(a_2 - b_1)(b_2 - a_1)}{(b_2 - b_1)(a_2 - a_1)}}$$

Din (13) se poate determina și densitatea de sarcină electrică superficială de pe cele două armături.

Astfel :

$$\rho_s(x) = \pm \frac{\varepsilon(V_2 - V_1) \sqrt{(b_2 - b_1)(a_2 - a_1)}}{K(k) \sqrt{(x - a_1)(x - b_1)(x - a_2)(x - b_2)}} \quad (14)$$

semnul „+” corespunzînd armăturii (a_2, b_2) iar semnul „-” armăturii (a_1, b_1) .

În cazul armăturilor egale această problemă a fost soluționată de I. Sneddon în [5] pe o cale mult mai complicată.

2. Cîmpul electrostatic al unui sistem plan-paralel de electrozi aliniați

Considerăm acum cazul general al unui sistem de n electrozi aliniați încărcăți la potențialele $V_1, V_2, \dots, V_n$ (Figura 3).

Din considerații asemănătoare celor de la secțiunea precedentă rezultă că în acest caz cîmpul electrostatic complex are forma

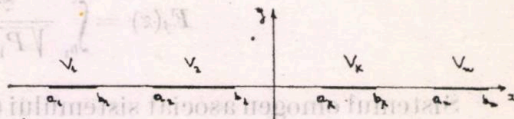


Fig. 3

$$\overline{E(z)} = \frac{A_0 + A_1 z + \dots + A_{n-2} z^{n-2}}{\sqrt{P_1(z)}} \quad (15)$$

Constantele $A_0, A_1, \dots, A_{n-2}$ care intervin în (15) se vor determina din condițiile ca diferențele de potențial dintre electrozi să fie cele rezultate din figura 3. (Determinarea radicalului în (15) este cea care ia valori pozitive pentru $z = x < a_1$).

Din relația (15) mai rezultă :

$$V(x) - V(b_1) = \int_{b_1}^x \frac{\partial V(x, 0)}{\partial x} dx = \int_{b_1}^x \frac{A_0 + A_1 t + \dots + A_{n-2} t^{n-2}}{\sqrt{P_1(t)}} dt \quad (16)$$

Condițiile $V(b_k) = V_k$ conduc la următorul sistem de ecuații liniare pentru determinarea constantelor $A_0, A_1, \dots, A_{n-2}$

$$\begin{cases} A_0 \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} + A_1 \int_{b_1}^{b_2} \frac{x dx}{\sqrt{P_1(x)}} + \dots + A_{n-2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{P_1(x)}} = V_2 - V_1 \\ A_0 \int_{b_1}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} + A_1 \int_{b_1}^{b_3} \frac{x dx}{\sqrt{P_1(x)}} + \dots + A_{n-2} \int_{b_1}^{b_3} \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{P_1(x)}} = V_3 - V_1 \\ \dots \\ A_0 \int_{b_1}^{b_n} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} + A_1 \int_{b_1}^{b_n} \frac{x dx}{\sqrt{P_1(x)}} + \dots + A_{n-2} \int_{b_1}^{b_n} \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{P_1(x)}} = V_n - V_1 \end{cases} \quad (17)$$

Sistemul (17) are soluție unică dacă determinantul său

$$\Delta = \begin{vmatrix} \int_{b_1}^{b_j} \frac{x^k dx}{\sqrt{P_1(x)}} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} j = 2, \dots, n \\ k = 0, 1, \dots, n-2 \end{matrix}$$

este diferit de zero.

Să presupunem prin absurd că avem $\Delta = 0$. Notăm :

$$F_j(z) = \int_{b_1}^z \frac{z^j}{\sqrt{P_1(z)}} dz \quad (18)$$

Sistemul omogen asociat sistemului (17)

$$\sum_{k=0}^{n-2} B_k F_k(b_j) = 0 \quad j = 2, \dots, n$$

va admite soluții neidentice nule și atunci funcția

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-2} B_k F_k(z)$$

se anulează în punctele $b_2, b_3, \dots, b_n$. Din (18) se observă că avem și $F_j(b_1) = 0$ deci funcția $F(z)$ are n rădăcini $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Să considerăm derivata sa :

$$F'(z) = \sum_{k=0}^{n-2} B_k F'_k(z) = \sum_{k=0}^{n-2} B_k \frac{z^k}{\sqrt{P_1(z)}}$$

Rădăcinile ecuației $F'(z) = 0$ coincid cu cele ale ecuației

$$\sum_{k=0}^{n-2} B_k z^k = 0 \quad (20)$$

Ecuația (20) are $n-2$ rădăcini. Dar cum $F(z)$ are n rădăcini $F'(z)$ trebuie să admită cel puțin $n-1$ rădăcini. Această contradicție conduce la concluzia că determinantul sistemului (17) este diferit de zero și deci problema enunțată admite soluție unică.

Densitatea de sarcină electrică superficială pe placa (a_p, b_p) este dată de formula :

$$\rho_s(x) = \frac{2\varepsilon \sum_{k=0}^{n-2} A_k x^k}{(-1)^{n+p} \sqrt{|P_1(x)|}}$$

Catedra de matematici III
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. D. Homencovski Funcții complexe Curs litografiat I.P.B. (1974)
2. Caius Iacob Introducere matematică în Mecanica Fluidelor, Editura Academiei, București 1952
3. N. Papamichael și J. R. Whiteman, Journal of Applied Mathematics and Physics (Z.A.M.P.) t 24 (1973) pp 304–316.
4. Remus Rădulescu Bazele Teoretice ale Electrotehnicii, vol I, Lit. Învățămîntului, București 1955
5. I. Sneddon Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory, North-Holland (1966).

Sur la détermination des certains champs potentiels plan-parallèles, avec des conditions mixtes sur la frontière

On considère le problème mathématique de la détermination d'une fonction harmonique dans un domaine plan, simplement connexe, quand on connaît ses valeurs sur certains arcs de la frontière et la valeur de sa dérivée normale sur le reste de la frontière. Ensuite, on détermine le champ électrostatique d'un condensateur avec armatures alignées, et d'un système plan-parallèle d'électrodes alignées, chargés avec des potentiels différents.

FIZICĂ**NOU SISTEM DE TESTARE A DISPOZITIVELOR
SEMICONDUCTOARE ȘI A CIRCUITELOR
INTEGRATE PRIN BALEIAJ CU LASER***

I. M. POPESCU, G. A. STANCIU, C. M. STOICHÎȚA

În lucrare se descrie un sistem de baleiaj cu laser folosit pentru studiul diferitelor fenomene ale dispozitivelor semiconductoare și localizarea unor defecte ale acestora.

Sistemul deflectionează automat un fascicul laser colimat folosind doi deflector electromagnetici de înaltă frecvență.

Fasciculul laser focalizat pe probă are un rastru de $2\mu\text{m}$.

Introducere

În etapa actuală de dezvoltare a microelectronicii se pun următoarele probleme tehnologice esențiale: — micșorarea dimensiunilor dispozitivelor semiconductoare, — creșterea complexității circuitelor integrate într-un volum cât mai mic și — controlul acestora din punct de vedere al proprietăților electrice. Acest lucru este posibil dacă se respectă cerința de creștere a uniformității spațiale a plachetei semiconductoare. Metodele moderne pentru controlul nedistructiv asupra plachetelor semiconductoare se bazează, în special, pe tehnica baleiajului laser. Lucrările efectuate până în prezent au utilizat pentru tehnica de baleiaj, fie radiații obținute de la un laser cu He-Ne acordat pe lungimea de undă $\lambda = 3390 \text{ nm}$ [1], [2], fie radiații în infraroșu obținute de la o lampă cu halogen [3].

Principiul metodei baleiajului cu radiații luminoase se bazează pe faptul că proprietățile electrice ale materialelor semiconductoare sînt influențate de lumină. Astfel, răspunsul electric al circuitului semiconductor poate fi utilizat pentru a studia diferitele fenomene care au loc într-un semiconductor și pentru a-l caracteriza în raport cu defectele pe care le conține.

La început s-a folosit baleiajul manual al radiației luminoase monocromatice pentru localizarea microplasmelor [4]. Radiația laserului cu

* Manuscris predat redacției la data de 1 iulie 1977

He-Ne avînd lungimea de undă $\lambda = 632,8$ nm a fost utilizată la studiul dispozitivelor cu aplicații în microunde [5], [6].

De asemenea, defectele sub forma de canale de suprafață la tranzistoare au fost studiate cu un spot de lumină monocromatică, baleiajul fiind realizat cu un disc Nipkow [7].

În cazul studiului unor fenomene și defecte ale circuitelor integrate și dispozitivelor semiconductoare s-a folosit baleiajul electromagnetic al fasciculului laser cu He-Ne. Aceste sisteme au fost realizate fie imprimînd o mișcare oscilatorie unei oglinzi după două direcții perpendiculare [8], [9], fie la două oglinzi în plane perpendiculare [10].

Sistemul de baleiaj realizat de noi poate fi folosit, în special, pentru localizarea defectelor de suprafață ale dispozitivelor și circuitelor integrate. Același sistem este util pentru a localiza microplasma în semiconductoare și străpungeri de avalanșă la joncțiune, verificarea răspunsului fotodetectorilor de microunde și controlul elementelor active ale unui circuit integrat.

1. Bazele fizice ale sistemului de baleiaj cu laser

Sistemul de baleiaj realizat utilizează radiația cu lungimea de undă $\lambda = 632,8$ nm a laserului cu He-Ne. Pornind de la faptul că energia unui foton este legată de lungimea de undă asociată prin relația :

$$\lambda[\text{nm}] = \frac{1240}{E_g[\text{eV}]},$$

rezultă că în cazul în care energia fotonului este mai mare decît energia benzii interzise, E_g , are loc o reflexie „metalică”, iar cînd energia fotonului este mai mică decît energia benzii interzise materialul semiconductor se comportă ca un mediu transparent.

Reflexia „metalică” este caracterizată prin transferul electronilor din banda de valență în banda de conducție, radiația luminoasă pătrunzînd în materialul semiconductor pe o adîncime de aproximativ 2000 nm (aceasta depinzînd de concentrația de purtători a materialului). Regiunea de joncțiune fiind plasată la această adîncime, poate fi studiată în acest fel. Metalizările existente pe suprafața materialului semiconductor reflectă radiația, iar în materialul semiconductor datorită radiației apar fotocurenți, care se suprapun peste curentul de polarizare inveră al dispozitivului semiconductor. Acești fotocurenți dau o tensiune variabilă pe o rezistență aflată în serie cu dispozitivul semiconductor. Această tensiune constituie semnalul care se aplică pe axa Z a unui osciloscop.

2. Dispozitivul experimental

În figura 1 este prezentată instalația experimentală realizată. Radiația cu lungimea de undă $\lambda = 632,8$ nm a laserului cu He-Ne este focalizată la un diametru de 0,7 mm și trimisă pe oglinda (O_1) montată pe spira

(S) a unui electromagnet care poate oscila în domeniul de frecvență (1 — 3200) Hz. Imaginea dată de oglinda O_1 este translatată cu un sistem format din două lentile convergente (A), așezate focar în focar și o oglindă

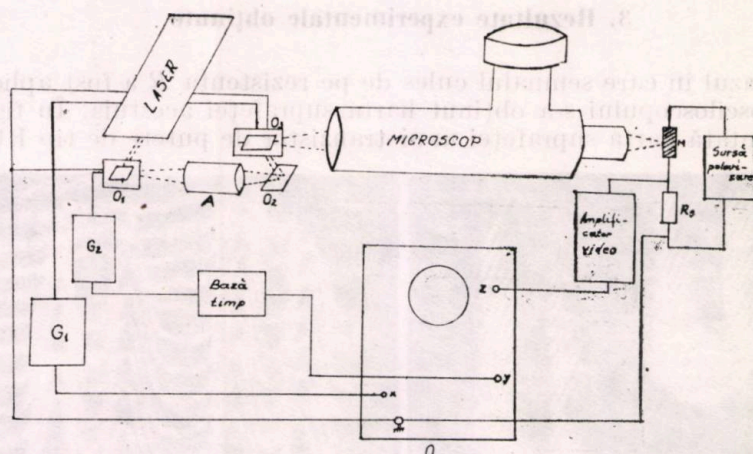


Fig. 1 Montajul experimental folosit pentru testarea prin baleiaj cu lumină laser a dispozitivelor semiconductoare.

fixă (O_2), pe suprafața unei a doua oglinzi mobile (O_3). Oglinda O_3 oscilează în jurul unei axe perpendiculare pe axa oglinzii O_1 . Oglindile O_1 și O_3 sînt identice, avantajînd interschimbabilitatea lor. În plus, avantajul cel mai important al acestui sistem îl constituie posibilitatea acționării prin comandă digitală, frecvența limită superioară de oscilație a oglinzilor fiind mare.

Rastrul obținut după oglinda O_3 este focalizat cu un microscop metaografic de tip Zeiss pe suprafața materialului sau dispozitivului studiat (M). Cu ajutorul unei oglinzi semitransparente plasată corespunzător și al unui ocular s-a urmărit baleiajul pe dispozitiv. Diametrul spotului luminos obținut, după trecerea prin obiectivul microscopului, este de 2 μm (corespunzător limitei de difracție). Diametrul spotului a fost determinat cu ajutorul unei rețele de difracție avînd 200 mm^{-1} și fiind montată în locul dispozitivului M . Posibilitățile de mișcare pentru măsura microscopului asigură atît o focalizare optimă, cît și studierea regiunii de interes.

Baleiajul celor două oglinzi este realizat folosind bazele de timp a două osciloscóape. Lucrul acesta a fost posibil datorită frecvenței limită superioare ridicată a celor doi deflectorii. S-a obținut astfel o explorare diagonală. Frecvențele de baleiaj ale oglinzilor au fost de 100 Hz și $(100 + \Delta f)$ Hz. În funcție de f s-au obținut o viteză variabilă de explorare și un număr de linii variabil.

Electromagneții pe care se află montate cele două oglinzi au rezistența de intrare foarte scăzută, fapt ce a necesitat acționarea lor cu generatori de curent (G_1 și G_2).

Răspunsul dispozitivului semiconductor aflat sub acțiunea luminii este cules de pe o rezistență R aflată în serie cu acesta și pus să moduleze

fasciculul de electroni al unui osciloscop cu memorie (O). S-a folosit oscilograful Zeiss de tip O.G.2.

3. Rezultate experimentale obținute

În cazul în care semnalul cules de pe rezistența R a fost aplicat pe axa Z a osciloscopului s-a obținut harta suprafeței acestuia. În figura 2 este prezentată harta suprafeței unui tranzistor de putere de tip BU 102.

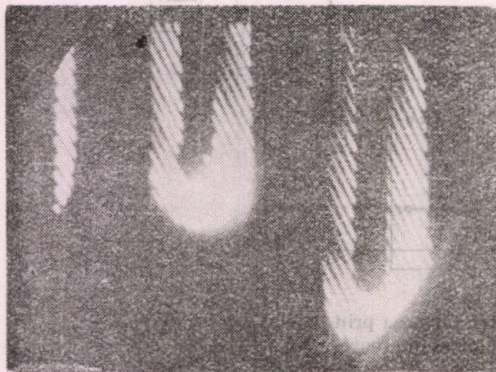


Fig. 2 Harta suprafeței unui tranzistor de putere de tip BU 102.

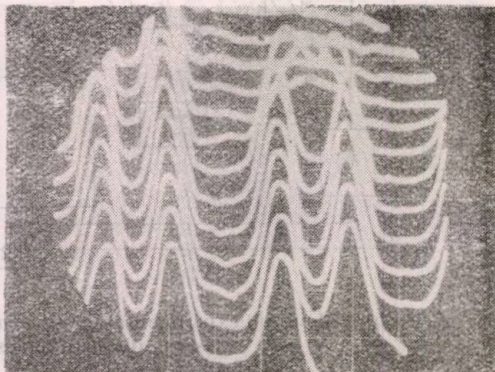


Fig. 3 Curbele determinate de fotocurenții induși de lumina laser în tranzistorul BU 102.

Regiunile luminoase sînt porțiuni semiconductoare, iar cele întunecate sînt metalice.

Trecînd la un regim sincronizat al celor două baze de timp, oglinzile fiind baleiate la 5 Hz respectiv, 500 Hz și însumînd semnalul dat de probă pe axa OY a osciloscopului, s-au obținut curbele din figura 3. Se observă curenții ce apar în regiunile semiconductoare expuse luminii.

În figurile 4 și 5 este prezentat un stabilizator de tensiune de tip TAA 550. În figura 4 se observă harta suprafeței dispozitivului, regiunea cea mai luminoasă apărînd datorită concentrației de purtători ridicată.

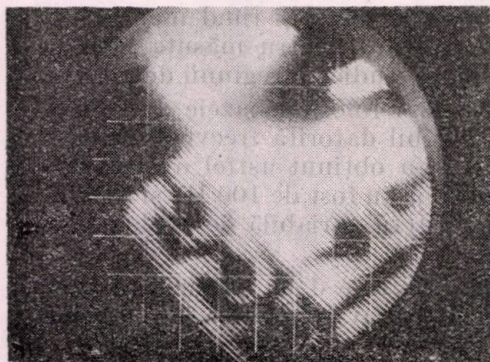


Fig. 4 Harta suprafeței stabilizatorului de tensiune TAA 550.

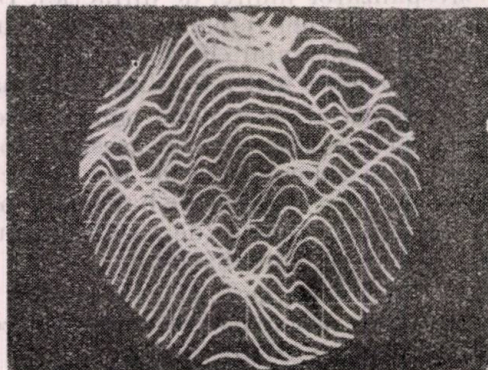


Fig. 5 Fotocurenții induși în TAA 550 de baleiajul laser, în regim sincronizat.

În figura 5 sînt prezentate curbele obținute pentru același circuit, cînd s-a lucrat în al doilea regim expus. În toate experiențele realizate s-a folosit în calea semnalului de la probă un amplificator ajustator (B) de tip Ithaco.

Concluzii

Parametrii sistemului realizat prezintă avantajul de a se acționa deflectorii cu semnale de tip dinte de ferăstrău. Explorarea diagonală este o caracteristică a baleiajului efectuat la obținerea hărții suprafeței dispozitivului.

Cu ajutorul unei programări și al baleiajului digital prin cuplarea cu un calculator se poate efectua un studiu succesiv al diferitelor elemente componente ale unui circuit integrat. Toate măsurătorile posibile asupra dispozitivelor semiconductoare și asupra circuitelor integrate, pe lîngă faptul că aduc cele mai importante informații privind caracterizarea electrică a acestora, se pot face în mod rapid și sînt nedistructive.

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. B. Sherman, J. T. Black, *Applied Optics*, 9, 802 (1970)
2. D.C. Gupta, E. D. Jungbluth, B. Sherman, J. F. Black, *Solid State Technology*, 3, 44 (1971)
3. D. L. Lile, N. M. Davis, 18, 699 (1974)
4. R. Haitz, A. Goetzberger, R. Scarlett, W. Sockley, *J. Appl. Phys.*, 34, 1581 (1963)
5. I. M. Naqvi, C. A. Lee, G. C. Dalman, 11, 2051 (1968)
6. I. M. Naqvi, *Proceedings of the 2 rd Conference on Solid State Devices*, Tokyo, 1970
7. J. Tihanyi, G. Pasztor, *Solid State Electron.* 10, 235 (1967)
8. Robert McMahon, *Electronics*, 4, 12 (1971)
9. R. C. Phelan, Jr., N. L. De Meo Jr., *Appl. opt.* 10, 4, 858 (1971)
10. C. N. Patter, D. E. Sawyer, *Rewiev of Scientific Instruments*, 38, 2, 180 (1968).
11. J. Haberer, *Phys. Filure Electron.* 5, 51, (1967)

A New Laser System for the Test of the Semiconductor Devices and ICs

A scanning laser system used to study various device phenomena and to identify the causes of anomalous device behaviour is described. The instrument automatically deflects a collimated laser beam using two identical electromagnetic deflectors with high upper frequency.

The resolution of the system referred to the sample is about 2 μm .

C. Z.: 535.33

UNELE ASPECTE ALE DEZINTEGRĂRII BETA ^{186}Re $^{186}\text{Os}^*$

D. BOGDAN, Tr. CREȚU, H. FUIA, G. MACARIE, D. G. POPESCU

Au fost calculate valorile absolute log ft, forma spectrelor pentru tranzițiile de ordinul întâi interzise $1^- \rightarrow 0^+$ și $1^- \rightarrow 2^+$ ale dezintegrării beta $^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$ precum și coeficientul de corelație direcțională al cascadei $^{186}\text{Re} (1^-(\beta) 2^+(\gamma) 0^+)$, în cadrul modelului generalizat. Funcțiile de undă au fost obținute folosind procedeul Hird de diagonalizare a Hamiltonianului nuclear pentru diferiți parametri ai potențialului Woods-Saxon cu luarea în considerare a corecțiilor de suprafluid. S-au determinat unele valori ale parametrilor potențialului WS pentru care se poate obține o concordanță bună între teorie și experiment a tuturor observabilelor beta studiate.

Introducere

Compararea datelor experimentale privind dezintegrarea beta a nucleelor radioactive cu rezultatele obținute teoretic prezintă o importanță deosebită în testarea valabilității formalismului dezintegrării beta dezvoltat în ultimii ani [1–2]. De asemenea folosirea în calculul funcțiilor de undă pentru stările nucleare inițiale și finale ale unui set de valori al parametrilor conținuți în potențialul nuclear poate furniza informații prețioase privind valorile reale ale acestor parametri.

Tranzițiile β^- de tipul $1^- \rightarrow 0$ și $1^- \rightarrow 2^+$ au fost studiate în detaliu din punct de vedere experimental în lucrările [2, 5, 1, 1, 12]. În aceste lucrări se obțin informații privind energia maximă a spectrelor β , forma spectrului $C(W)$ și corelația unghiulară $\beta - \gamma$ pentru tranziția $1^-(\beta^-) 2^+(\gamma) 0^+$.

Ambele tranziții $\beta^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$ sînt tranziții de ordinul întâi interzise. Calculul observabilelor pentru astfel de tranziții prezintă greutatea legate de faptul că acesta depinde de un număr mare de elemente de matrice [1–2]. În afară de aceasta elementul de matrice dominant pentru aceste tranziții este relativist și deci concordanța rezultatelor teoretice cu cele experimentale poate constitui o dovadă a valabilității ipotezei conservării curentului vectorial.

1. Metoda de calcul

În calculul efectuat de noi s-a folosit formalismul dezintegrării $\gamma\beta$ dezvoltat în lucrarea [2] în care dezvoltarea funcțiilor de undă electronice radiale este mult mai riguroasă decît în lucrările anterioare.

* Manuscris predat redacției la data de 15 februarie 1977

Nucleele ^{186}Re și ^{186}Os sînt situate la marginea unei regiuni importante de nuclee deformate. Pentru această regiune există ambiguități asupra valorilor parametrilor de deformare β_2 și β_4 . De asemenea nu există în literatură valori determinate pentru parametrii V_{on} și V_{op} ce intră în potențialul nuclear Wood-Saxon.

Pentru obținerea funcțiilor de undă a stărilor nucleare inițiale și finale a fost elaborat un program de diagonalizare a hamiltonianului nuclear. Ca bază a fost luat următorul hamiltonian nuclear pentru descrierea mișcării intrinsece a nucleonilor [6].

$$H_{\text{intr}} = -(\hbar^2/2M)\nabla^2 - V_0 f(r) - V_0(\hbar/M\pi c)^2(1/r_1)(df/dr) \vec{l} \vec{s} + \\ + V_0 R_0 A^{1/3} (df/dr) (\beta_2 Y_{20} + \beta_4 Y_{40}) \quad (1)$$

În acest hamiltonian dependența radială de oscilator armonic este înlocuită printr-o dependență de tip Woods-Saxon:

$$f(r) = (1 + x)^{-1} \text{ unde } x = \exp \left[\frac{(r - R_0 A)}{a_0} \right] \quad (2)$$

Programul de diagonalizare a hamiltonianului (1) ia în considerare amestecul de stări $\Delta N = \pm 2$.

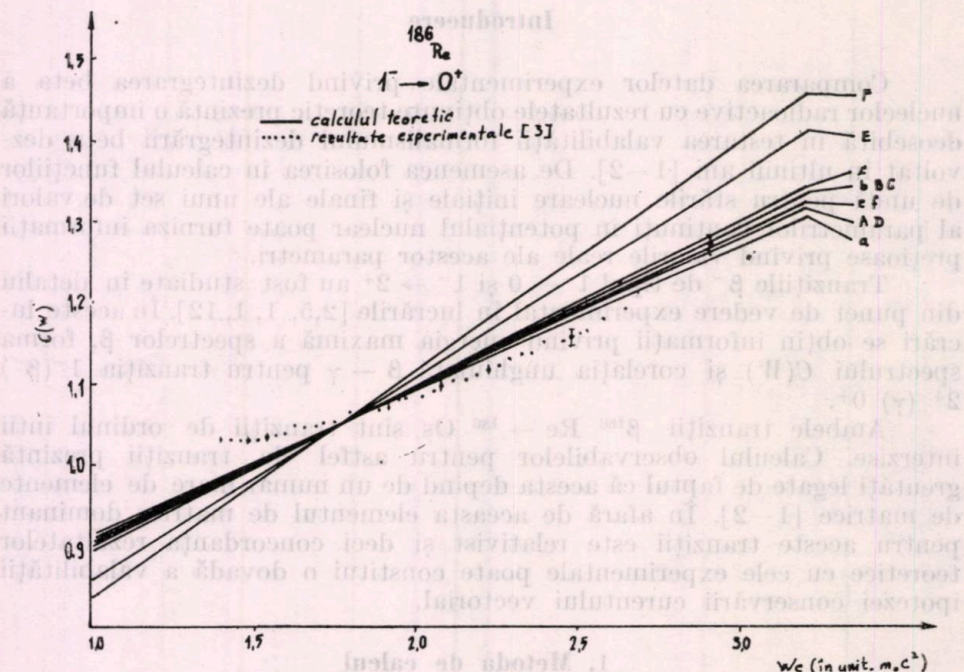


Fig. 1

Pentru calculul stărilor de neutroni s-a luat $V_{on} = -43$ MeV și $V_{on} = -48$ MeV. În calculul stărilor protonice la hamiltonianul (1) s-a adăugat termenul interacției coulombiene luându-se $V_{op} = -58$ MeV și $V_{op} = -61$ MeV.

Pentru obținerea setului de funcții de undă necesar în calculele observabilelor β^- pentru aceste tranziții diagonalizarea hamiltonianului nuclear (1) s-a efectuat pentru parametri V_{on} și V_{op} indicați și pentru următoarele valori ale parametrilor de deformare:

$$\begin{array}{rcl} & 0.15 & \beta_1 = \begin{array}{l} -0,04 \\ -0,16 \end{array} \\ \beta_2 = & 0.20 & \beta_4 = \begin{array}{l} -0,04 \\ -0,16 \end{array} \\ & 0.25 & \beta_1 = \begin{array}{l} -0,04 \\ -0,16 \end{array} \end{array} \quad (3)$$

Folosind formulele corespunzătoare pentru elementele de matrice în modelul nuclear generalizat [7, 8] și funcțiile de undă obținute s-au calculat coeficienții factorilor de formă $V, A_{Fk\lambda\sigma}^{(N)}$ pentru cele două tranziții β^- $^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$.

Starea fundamentală a nuclidului ^{186}Re a fost considerată ca descrisă de o funcție de undă de tip biparticulă:

$$|T_i \pi_i K_i = 1 - 1 \rangle = p \ 5/2^+ [402] + n \ 3/2^- [512] \quad (4)$$

obținând valorile energiilor pentru toate stările uniparticulă neutronice respectiv protonice, s-au calculat parametri Δ și λ corespunzători modelului suprafluid al nucleului. Cu ajutorul acestor parametri s-au calculat corecțiile corespunzătoare R a efectului de împerechere [9].

Dependența de energie a formei spectrului $C(W)$ precum și a corelațiilor unghiulare beta-gama $\varepsilon(W)$ a fost calculată după formalismul dezintegrării β^- dezvoltat în lucrarea [2].

2. Rezultatele obținute

În scopul unui calcul cât mai corect posibil al observabilelor dezintegrării β^- $^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$ au fost calculate toate elementele de matrice corespunzătoare tranzițiilor β^- de ordinul întâi interzise. În tabela 1,2 sînt date valorile obținute pentru coeficienții factorilor de formă $V, A_{Fk\lambda\sigma}^{(N)}$ în cazul cînd $V_{on} = -43$ MeV și $V_{op} = -58$ MeV, iar tabela 3,4 conține valorile $V, A_{Fk\lambda\sigma}$ pentru $V_{on} = -48$ MeV și $V_{op} = -61$ MeV pentru toate valorile β_2 și β_4 din relația (3). Elementele de matricea dezintegrării $\beta V_{Mk\lambda\sigma}^{(N)}$ (k_e, m, n, ρ) și $A_{(M)Fk\lambda\sigma}^{(N)}$ (k_e, m, n, ρ) sînt exprimate prin coeficienții factorilor de formă astfel [2]:

$$(-1)^{k-\lambda} V_{Fk\lambda\sigma}^{(N)}(k_e, m, n, \rho) = V_{Fk\lambda\sigma}^{(N)}(k_e, m, n, \rho) \quad (5)$$

$$(-1)^{k-\lambda} A_{Fk\lambda\sigma}^{(N)}(k_e, m, n, \rho) = C_A A_{Fk\lambda\sigma}^{(N)}(k_e, m, n, \rho)$$

În aceste relații mărimile k_e, m, n, ρ indică diverșii termeni după care are loc dezvoltarea funcțiilor electronice radiale: k_e este legat de momentul cinetic total j_e al electronului; m este puterea produsului

$(m_e R) (W_e R) (\alpha Z)$; n este puterea produsului $(W_e R) (\alpha Z)$ iar ρ este puterea lui (αZ) . Coeficienții factorilor de formă $F_{K\lambda\gamma}$ care nu conțin în tabelele 1 și 2 parametrii k , m , n ρ corespund cazului obișnuit cînd $\rho = 0$. Elementele de matrice relativiste care pot fi calculate prin teoria CVC au fost calculate folosind relațiile de recurență ce decurg din această teorie [2].

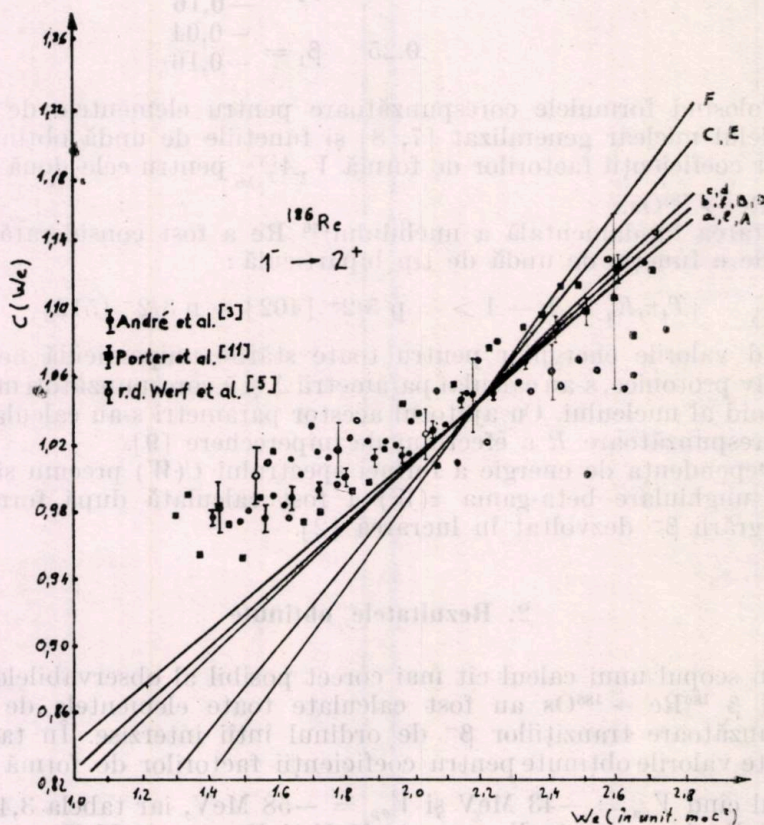


Fig. 2

Folosind elementele de matrice din tabelele 1, 2, 3, 4 au fost calculate valorile $\log (ft)$ pentru tranzițiile β^- $1^- \rightarrow 0^+$ și $1^- \rightarrow 2^+$ $^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$. Valorile obținute pentru diferenții parametrii β_2 , β_4 , V_{0n} și V_{0p} sînt date în tabela 5. În această tabelă sînt date și valorile $\log (ft)_R$ în care sînt incluse corecțiile ce derivă din modelul suprafluid al nucleului. Conform rezultatelor obținute în lucrarea [9] pentru cazul dezintegrării β în care numărul perechilor de neutroni nu se schimbă iar numărul perechilor de protoni se schimbă, corecția de suprafluid este:

$$R = V_N^2 U_p^2 \quad (6)$$

și avem relația

$$(ft)_R = \frac{(ft)}{R} \quad (7)$$

În tabela 6 sînt date valorile pentru corecțiile de suprafluid obținute de noi pentru tranziția $\beta^- n \ 3/2^- [512] \rightarrow p \ 5/2^+ [402]$.

În tabela 5 sînt date și valorile experimentale $\log (ft)_{\text{exp}}$ luate din lucrarea [10].

În figura 1 se reprezintă dependența de energia electronului a formei spectrului $c(W)$ pentru tranziția $\beta^- 1^- \rightarrow 0^+$ iar în figura 2 se indică această dependență pentru tranziția $1^- \rightarrow 2^+$. De asemenea pentru comparare în aceste figuri se reprezintă și forma spectrului obținută experimental [3, 5, 11]. Datele teoretice obținute în această lucrare precum și cele experimentale [12] pentru coeficientul corelațiilor unghiulare beta ($1^- \rightarrow 1^+$) gama ($2^+ \rightarrow 0^+$) sînt date în fig. 3.

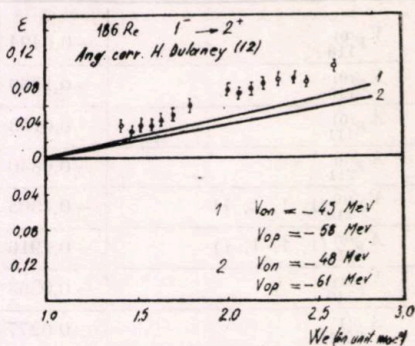


Fig. 3

Valorile coeficienților factorilor de formă pentru tranziția beta $1^- \rightarrow 0^+$ în dezintegrarea $^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$ și pentru valorile parametrilor $V_{on} = -43 \text{ MeV}$ și $V_{op} = -58 \text{ MeV}$

Tabelul 1

β_4	-0,004			-0,16		
β_2	0,15	0,20	0,25	0,15	0,20	0,25
$A \, V_{Fk\lambda\gamma}(N)$						
$V_{F_{110}}^{(0)}$	-0,0698	-0,0686	-0,0670	-0,0679	-0,0656	-0,0627
$A_{F_{111}}^{(0)}$	-0,2742	-0,2172	-0,2685	-0,2660	-0,2614	-0,2509
$A_{F_{211}}^{(0)}$	0	0	0	0	0	0
$V_{F_{110}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$	-0,1188	-0,1135	-0,1136	-0,0983	-0,1279	-0,1155
$A_{F_{111}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$	-0,1846	-0,1807	-0,1792	-0,1787	-0,1746	-0,1683
$V_{F_{110}}^{(1)}$	-0,2710	-0,2543	-0,2393	0,2655	-0,2523	-0,2352
$V_{F_{111}}^{(1)}$	-0,0090	-0,0169	-0,0239	-0,0017	-0,0027	-0,0042
$A_{F_{211}}^{(1)}$	0	0	0	0	0	0
$V_{F_{110}}^{(1)}$	3,2255	2,6427	2,1316	2,7872	2,4436	2,0513
$A_{F_{111}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$	-14,5408	-14,2823	-14,1485	-13,9302	-13,5742	-13,1551
$V_{F_{101}}^{(0)}$	0,0046	0,0068	0,0081	0,0069	0,0079	0,0083
$V_{F_{101}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$	0,0781	0,0735	0,0696	0,0770	0,0737	0,0702
$V_{F_{101}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$	-0,2125	-0,2619	-0,2577	-0,2832	0,2942	-0,2715
Semnificațiile pentru $C(w_e)$ de pe fig. 1	a	b	c	d	e	f

Valorile coeficienților factorilor de formă pentru tranziția beta $1^- \rightarrow 2^+$ în dezintegrarea $^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$ și pentru valorile parametrilor $V_{on} = -43$ MeV, $V_{op} = -58$ MeV

Tabelul 2

β_4	β_2					
	β_2					
$A, V_{F_{k\lambda\gamma}}(N)$	0,15	0,20	0,25	0,15	0,20	0,25
$V_{F_{110}}^{(0)}$	-0,0494	-0,0485	-0,0474	-0,0480	-0,0464	-0,0443
$V_{F_{110}}^{(0)}$	-0,1939	-0,1917	-0,1898	-0,1880	-0,1848	-0,1774
$A_{F_{111}}^{(0)}$	0,0153	0,0105	0,0073	0,0031	-0,0105	-0,0240
$A_{F_{211}}^{(0)}$	-0,0840	-0,0803	-0,0803	-0,0695	-0,0904	-0,0817
$V_{F_{110}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$	-0,1305	-0,1278	-0,1267	-0,1263	-0,1235	-0,1233
$A_{F_{111}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$	-0,1916	-0,1798	-0,1692	-0,1877	-0,1784	-0,1791
$V_{F_{110}}^{(1)}$	-0,0263	-0,0119	-0,0169	-0,0012	-0,0026	-0,0029
$A_{F_{211}}^{(1)}$	-0,0277	-0,0280	-0,0287	-0,0332	-0,0347	-0,0338
$V_{F_{110}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$	2,2809	1,8688	1,5074	1,9710	1,7280	1,4506
$A_{F_{111}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$	-10,2815	-10,0988	-10,0041	-9,8498	-9,5981	-9,3318
$V_{F_{101}}^{(0)}$	0,050	0,0066	0,0076	0,0062	0,0068	0,0071
$V_{F_{101}}^{(1)}$	0,0560	0,0528	0,0501	0,0550	0,0527	0,0502
$V_{F_{101}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$	-0,2308	-0,2543	-0,2417	-0,2546	-0,2524	-0,2325
Semnificațiile pt. $C(W_e)$ de pe fig. 2	a	b	c	d	e	f

Concluzii

Din datele și graficele prezentate rezultă că formalismul utilizat precum și funcțiile de undă obținute conduc la rezultate compatibile cu datele experimentale. Se remarcă însă o slabă dependență a valorilor față de variația parametrilor de deformare precum și a parametrilor potențialului Woods-Saxon (tab. 5). De asemenea din forma spectrului pentru tranziția $1^- \rightarrow 0^+$ am putea considera o discordanță cu datele experimentale pentru $\beta_4 = -0,16$ și $\beta_2 = 0,20; 0,25$. În cazul tranziției $1^- \rightarrow 2^+$ o asemenea discordanță este greu de apreciat. Deoarece parametrul corelației unghiulare nu depinde practic de β_2 și β_4 în fig. 3, este prezentată dependența $\epsilon(W)$ pentru cele două seturi de valori V_{on} și V_{cp} considerate. Setul 1 de valori indicat pe figura 3 furnizează dependența $\epsilon(W)$ cea mai apropiată de cea experimentală.

Catedra de fizică

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București
Institutul de Fizică și inginerie nucleară

Valorile coeficienților factorilor de formă pentru tranzițiile beta $1^- \rightarrow 0^+$ în dezintegrarea $^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$ și pentru valorile parametrilor $V_{on} = -48 \text{ MeV}$ și $V_{op} = -61 \text{ MeV}$

Tabelul 3

β_4 $A, V_{F_{k\lambda\gamma}}(N)$	β_2	-0,04			-0,16		
		0,15	0,20	0,25	0,15	0,20	0,25
$V_{F_{110}}^{(0)}$		-0,1072	-0,0915	-0,0912	-0,0831	-0,0843	-0,0801
$A_{F_{111}}^{(0)}$		-0,2691	-0,2569	-0,2464	-0,2491	-0,2343	-0,2226
$A_{F_{211}}^{(0)}$		0	0	0	0	0	0
$V_{F_{110}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$		-0,1361	-0,1429	-0,1388	-0,1406	-0,1389	-0,1352
$A_{F_{111}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$		-0,2433	-0,2403	-0,2152	-0,2237	-0,2043	-0,1990
$V_{F_{110}}^{(1)}$		-0,2749	-0,2547	-0,2375	-0,2464	-0,2312	-0,2177
$A_{F_{111}}^{(1)}$		-0,0341	-0,0384	-0,0459	-0,0305	-0,0334	-0,0360
$A_{F_{211}}^{(0)}$		0	0	0	0	0	0
$V_{F_{110}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$		2,4120	1,3205	0,6947	3,6824	0,8173	0,0516
$A_{F_{111}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$		-1,134553	-12,8575	-10,5800	-11,1956	-10,2048	-0,6986
$V_{F_{101}}^{(0)}$		0,0167	0,0198	0,0239	0,0211	0,0239	9,0251
$V_{F_{101}}^{(1)}$		0,0695	0,0676	0,0610	0,0644	0,0613	0,0575
$V_{F_{101}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$		-0,3757	-0,2858	-0,1820	-0,9350	-0,2317	-0,0162
Semnificațiile pt. $C(W)$ de pe fig. 1		A	B	C	D	E	F

Valorile coeficienților factorilor de formă pentru tranziția beta $1^- \rightarrow 2^+$ în dezintegrarea $^{186}\text{Re} \rightarrow ^{186}\text{Os}$ și pentru valorile parametrilor $V_{on} = -48 \text{ MeV}$ și $V_{op} = -61 \text{ MeV}$

Tabelul 4

β_4 $A, V_{F_{k\lambda\gamma}}(N)$	β_2	-0,04			-0,16		
		0,15	0,20	0,25	0,15	0,20	0,25
$V_{F_{110}}^{(0)}$		-0,0758	-0,0647	-0,0644	0,0587	-0,0596	-0,0567
$A_{F_{111}}^{(0)}$		-0,1903	-0,1816	-0,1742	-0,1761	-0,1657	-0,1574
$A_{F_{211}}^{(0)}$		0,0174	0,0121	0,0076	0,0054	0,0007	0,0015
$V_{F_{110}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$		-0,0963	-0,1011	-0,0982	-0,0994	-0,0982	-0,0956
$A_{F_{111}}^{(0)}(1, 1, 1, 1)$		-0,1720	-0,1699	-0,1522	-0,1582	-0,1445	-0,1407
$V_{F_{110}}^{(1)}$		-0,1944	-0,1801	-0,1679	-0,1742	-0,1635	-0,1539
$A_{F_{111}}^{(0)}$		-0,0241	-0,0271	-0,0324	-0,0126	-0,0236	-0,0254

Tabelul 4 (continuare)

β_4		-0,04			-0,16		
$A, V_{F_{k\lambda\gamma}}^{(N)}$	β_4	0,15	0,20	0,25	0,15	0,20	0,25
$A_{F_{211}}^{(1)}$		-0,0243	-0,0254	-0,0263	-0,0278	-0,028	-0,0281
$V_{F_{110}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$		1,7056	0,9338	0,4913	2,6041	0,5779	0,0365
$A_{F_{111}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$		-9,5140	-9,0913	-7,4809	-7,9162	-7,3555	-6,8577
$V_{F_{101}}^{(0)}$		0,0139	0,0163	0,0192	0,0168	0,0188	0,0194
$V_{F_{101}}^{(1)}$		0,050	0,0487	0,0441	0,0464	0,0442	0,0144
$V_{F_{101}}^{(1)}(1, 1, 1, 1)$		-0,3128	-0,2353	-0,1465	-0,7453	-0,1823	-0,0125
Semnificațiile pt. C(W) de pe fig. 2		A	B	C	D	E U	F

Valorile $\lg(f)$ și $\lg(f)_R$ pentru tranzițiile beta $1^- \rightarrow 0^+$ și $1^- \rightarrow 2^+$ în dezintegrarea $^{186}\text{Re} - ^{186}\text{Os}$ pentru diferite valori ale parametrilor V_{on} și V_{op}

Tabelul 5

		$V_{no} = -43 \text{ MeV}$ $V_{op} = -58 \text{ MeV}$		$V_{on} = -48 \text{ MeV}$ $V_{op} = 61 \text{ MeV}$			
β_4	β_2	$\lg(f)$	$\lg(f)_R$	$\lg(f)$	$\lg(f)_R$	$\lg(f)_{exp}$	
-0,04	0,15	6,60	7,39	6,69	7,32	7,7	
	0,20	6,74	7,22	6,76	7,15		
	0,25	6,78	6,99	7,02	7,17		
-0,16	0,15	6,80	7,17	6,88	7,21		
	0,20	6,76	7,02	7,10	7,31		
	0,25	6,83	6,94	7,18	7,27		
$1^- \rightarrow 2^+$							
		$V_{on} = -43 \text{ MeV}$ $V_{op} = -58 \text{ MeV}$		$V_{on} = -28 \text{ MeV}$ $V_{op} = -71 \text{ MeV}$			
β_4	β_2	$\lg(f)$	$\lg(f)_R$	$\lg(f)$	$\lg(f)_R$	$\lg(f)_{exp}$	
-0,04	0,15	7,02	7,75	7,07	7,70	8,10	
	0,20	7,13	7,59	7,16	7,55		
	0,25	7,17	7,37	7,46	7,60		
-0,16	0,15	7,16	8,53	7,27	7,60		
	0,20	7,11	7,37	7,51	7,73		
	0,25	7,11	7,22	7,60	7,69		

Valorile parametrilor de corecție suprafluidă în nucleul ^{186}Re
 $V_{nn} = -43$ MeV, $V_{op} = -58$ MeV

Tabelul 6

β_4	β_2	v_N	u_p	$R = v_N^2 u_p^2$
-0,04	0,15	0,933	0,462	0,1858
	0,20	0,916	0,631	0,3341
	0,25	0,920	0,862	0,6289
-0,16	0,15	0,987	0,664	0,4217
	0,20	0,975	0,760	0,5491
	0,25	0,982	0,896	0,7742
$V_{on} = -48$ MeV, $V_{op} = -61$ MeV				
4	2	v_N	u_p	$R = v_N^2 u_p^2$
-0,04	0,15	0,954	0,507	0,2339
	0,20	0,938	0,682	0,4092
	0,25	0,946	0,985	0,7168
-0,16	0,15	0,989	0,694	0,4711
	0,20	0,986	0,789	0,6052
	0,25	0,987	0,917	0,8192

BIBLIOGRAFIE

1. H. Behrens, J. Janecke, Landolt Bornstein New Series, vol. I/4 (Springer, Berlin, New York, Heidelberg) 1969.
2. H. Behrens, W. Buhriung, Nucl. Phys. A 162 (1971) 111.
3. S. Andre, P. Liaud, J. Phys. 29 (1968) 395.
4. S. Andre, P. Liaud, Compt. Rend. 268 (1969), 270.
5. S. Y. Van der Werf, H. de Ward, H. Beekhuis, Nucl. Phys. A134 (1969), 215.
6. B. Hird, Comp. Phys. Commun. 6 (1973), 30.
7. D. Bogdan, T. Crețu, G. Macarie, Z. Phys. 263 (1973) 121.
8. D. Bogdan, T. Crețu, G. Macarie, Z. Phys. 263 (1973) 129.
9. V. G. Soloviev, Teoria slojnih iader. Izd. Nauka, Moskva, 1971.
10. M. R. Schmarok, Nuclear Data Sheets 13 (1974) 267.
11. F. J. Porter, M. S. Freedman, T. B. Novey, F. Wagner Tr., Phys. Rev. 103 (1956) 921.
12. M. Dulaney, C. H. Braden, E. T. Patronis Jr., L. D. Wyly, Phys. Rev. 129 (1963) 283.

Some Aspects of the Beta Decay $^{186}\text{Re} - ^{186}\text{Os}$

We have calculated the absolute log ft values, the shapes of beta spectra for the first forbidden transitions $1^- - 0^+$ and $1^- - 2^+$ of beta decay $^{186}\text{Re} - ^{186}\text{Os}$ and also the directional correlation coefficient for the $(1^-(\beta) 2^+(\gamma) 0^+)$ cascade within the framework of the generalized model. We have obtained Woods-Saxon wave functions for different parameters of WS potential using Hird's diagonalization procedure of nuclear Hamiltonian taking into account the superfluid corrections. We determined some values of the WS potential parameters for which a satisfactory agreement can be obtained between theory and experiment for all observable beta quantities.

Table 1
 Values of the $\log ft$ for the β transitions in ¹⁸⁶Re

Transition	$T_{1/2} = 1.8 \times 10^4$ yr			$T_{1/2} = 0.1$ yr		
	$\log ft$	$\log ft$	$\log ft$	$\log ft$	$\log ft$	$\log ft$
1	0.16	0.20	0.25	0.16	0.20	0.25
2	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
3	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
4	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
5	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
6	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
7	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
8	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
9	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
10	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
11	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22
12	0.15	0.18	0.22	0.15	0.18	0.22

BIBLIOGRAPHY

1. J. J. Kew, A. J. J. Kew, Landolt-Börnstein New Series, Vol. II (Springer, Berlin, New York, Heidelberg, 1960).
2. J. J. Kew, W. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1967) 111.
3. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
4. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
5. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
6. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
7. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
8. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
9. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
10. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
11. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.
12. J. J. Kew, *Nucl. Phys. A* **123** (1968) 205.

Some aspects of the beta decay ¹⁸⁶Re

We have calculated the absolute $\log ft$ values. The shape of beta spectra for the first forbidden transitions $1^- \rightarrow 0^+$ and $1^- \rightarrow 2^+$ of beta decay ¹⁸⁶Re-¹⁸⁶Os and also the directional correlation coefficient for the $(1^- \rightarrow 2^+) (0^+ \rightarrow 0^+)$ cascade within the framework of the generalized model. We have obtained Woods-Saxon wave functions for different parameters. W_2 potential using third-order perturbation procedure of nuclear Hamiltonian taking into account the supermultiplet splitting. We determined some values of the W_2 potential parameters for which a satisfactory agreement can be obtained between theory and experiment for all observable beta quantities.

C.Z.V. 621. 396

ELECTRONICĂ

OSCILAȚII ÎN SISTEME CIBERNETICE (CU REACȚIE)*

EDMOND NICOLAU

Scopul prezentului studiu este stabilirea tipurilor de ecuații diferențiale care descriu evoluția sistemelor de reacție. Se investighează cazul sistemelor formate numai din sumatoare, numai din sumatoare și integratoare, numai din sumatoare, interogatoare și multiplicatoare; din sumatoare, integratoare, multiplicatoare și circuite de întârziere.

Scopul prezentei lucrări este stabilirea tipurilor de semnale electrice care pot fi obținute ca funcții de timp, în scheme utilizând numai anumite tipuri de elemente.

1. Sistemele se pot reprezenta prin linii care unesc terminalele. În cazul sistemelor orientate, linia are marcată pe ea o săgeată care pleacă de la intrare la ieșire. La toate tipurile de sistem se marchează linia respectivă cu operatorul care leagă mărimile terminale și cu starea inițială a sistemului.

Nodurile reprezintă de asemenea operatori. Distingem cel puțin două tipuri de noduri: noduri sumatoare (de tip S) și noduri multiplicatoare (de tip M).

Regula R1: toate liniile care ies dintr-un nod au aceeași funcție de timp, adică semnalul $f(t)$ este același pe oricare dintre linii.

Regula R2: la nodurile de tip S , semnalul de ieșire este suma semnalelor de intrare v_i

$$v_0(t) = \sum v_i(t) \quad \forall t.$$
unde $v_0(t)$ este semnalul de ieșire la momentul t .

Regula R2': la nodurile de tip M , semnalul de ieșire $v_0(t)$ este produsul semnalelor de intrare v_i

$$v_0(t) = \prod v_i(t) \quad \forall t.$$

Regula R3: atunci cînd într-o rețea toate nodurile sînt de același tip nu mai este necesar a preciza tipul nodurilor.

* Manuscris predat redacției la data de 4 iulie 1977

Definiția D1 : se numește buclă un drum într-un graf care poate fi parcurs întâlnind numai săgeți într-un singur sens, drumul fiind închis.

Observația O1 : din definiția D1 rezultă că într-o buclă anumite laturi sînt orientate, dar unele pot fi neorientate.

Exemplul E1 : fie terminalele 1 și 2, între care există două sisteme avînd aceleași terminale și care sînt descrise prin operatorii A și B . Dacă operatorul A admite intrarea 1 și ieșirea 2, el este un operator ce descrie sistemul orientat de la 1 la 2. Dacă sistemul al doilea, descris prin operatorul B , este orientat de la 1 la 2, atunci A și B sînt în paralel și sistemul rezultînd din A și B nu formează o buclă.

Dacă însă B este orientat de la 2 la 1 sau nu este orientat, atunci sistemul rezultînd din A și B formează o buclă.

Definiția D2 : un sistem la care graful echivalent are cel puțin o buclă, este un sistem cibernetic.

2. Teorema T1 : orice sistem cibernetic admite un operator care are valoarea proprie 1.

Demonstrație. Conform definiției D2, în graful echivalent unui sistem cibernetic există o buclă. Tăiem o latură a acestui graf în M , la ieșirea dintr-un nod. Notăm cu x mărimea caracteristică înainte de tăiere și cu A operatorul care corespunde buclei de imediat după tăiere pînă la revenirea în M . În M valoarea mărimii caracteristice, la intrarea în buclă este x ; după parcurgerea buclei ea este Ax . Dar în M mărimea caracteristică este unică, deci $x = Ax$ — ceea ce demonstrează afirmația făcută în T1.

Corolarul C1 : dacă operatorul A este liniar, iar x aparține unui spațiu Hilbert, atunci A este un operator unitar, dacă este un operator cibernetic.

Dacă A este un operator cibernetic, atunci $Ax = x$. Dacă x aparține unui spațiu Hilbert, atunci putem scrie

$$\|Ax\| = \|x\|.$$

Dacă, în plus, A este liniar, sînt satisfăcute toate condițiile ca A să fie un operator unitar.

Teorema T2 : Într-un sistem cibernetic format prin conectarea în serie a două subsisteme descrise prin operatorii A și B , avînd comune punctele M și N și la care mărimea caracteristică din M este x , iar din N este y , subsistă relațiile

$$x \in \ker(I - BA) \quad y \in \ker(I - AB).$$

Observația O2 : teorema T2 poate fi extinsă imediat la cazul unui sistem cibernetic format din n subsisteme conectate în serie, subsisteme caracterizate prin operatorii A_i , mărimile caracteristice fiind x_i .

$$x_i \in (I - A_{i-1}A_{i-2} \dots A_1 A_n A_{n-1} \dots A_i).$$

3. Mărimile caracteristice din sistemele cibernetice sînt, în general, variabile în timp. Modul lor de variație nu este arbitrar, depinzînd de natura sistemului și de condițiile inițiale. În cele ce urmează se vor stabili o serie de teoreme privind clasele de funcții care pot descrie variația în timp a mărimilor caracteristice din sistemele cibernetice, în funcție de elementele utilizate, altfel spus de operatorii ce caracterizează diferitele subsisteme.

În momentul de față în mod curent se utilizează sumatoare avînd mai multe intrări și o ieșire. Notînd v_i semnalul de la intrarea i și v_0 semnalul la ieșire, la sumatoarele reale subsistă relația

$$v_0(t) = \sum a_i v_i(t) \quad a_i \in R$$

suma extinzîndu-se la toate intrările.

Definiția D3 : se numește invertor sumatorului cu o singură intrare, la care $a_1 = 1$.

Lema L1 : cu sumatoare reale este posibil a realiza sume ponderate

$$v_0(t) = \sum a_i v_i(t) \quad a_i \in R.$$

Afirmația este evidentă, ținînd seama de faptul că invertorul este tot un sumator cu care se schimbă semnul unei mărimi.

Teorema T3 : cu sumatoare se pot obține funcții de timp $x(t)$ care verifică ecuația

$$x = Ax$$

unde $x' = (x_1, \dots, x_n)$ iar A este o matrice $n \times n$ cu $a_{ij} \in R$. Deci x nu depinde de t .

Demonstrația se poate obține constructiv. Se consideră n puncte și se admite că în fiecare punct există tensiunea x_i . Se consideră, de asemenea, n sumatoare avînd fiecare n intrări și o ieșire. Numerotăm sumatoarele cu numere de la 1 la n . Factorii de pondere de la sumatorul j se iau proporționali cu a_{ij} ; intrările se conectează la punctele în care sînt tensiunile x_i iar ieșirea în punctul în care există tensiunea x_j . Dacă toți factorii de proporționalitate la toate cele n sumatoare sînt egali între ei și diferiți de zero, atunci ecuația care descrie starea sistemului cibernetic realizat este $x = Ax$ — ceea ce demonstrează afirmația făcută.

Corolarul C2 : pentru ca sistemul cibernetic considerat să admită soluții diferite de cea identic nulă, este necesar ca

$$\det(A - I) = 0.$$

În acest caz impunînd unele tensiuni, rezultă celelalte.

Teorema T4 : cu sumatoare și generatoare de tensiuni constante se pot obține funcții de timp care verifică ecuația

$$x = Ax + B$$

notația fiind aceeași ca în T3, B avînd dimensiunile lui x .

Demonstrația este aceeași ca la T3, cu diferența că la sumatorul i se aplică, în plus față de ceea ce se aplica la sumatorul i din cazul teoremei T3, și tensiunea b_i .

Pentru ca sistemul să admită soluții unice este necesar ca, și suficient ca determinantul coeficienților să fie diferit de zero

$$\det(I - A) \neq 0.$$

Teorema T5 : cu sumatoare și integratoare se pot obține funcții de timp care verifică ecuația diferențială

$$\dot{x} = Ax + B$$

unde notația este aceeași ca în T4.

Demonstrația este tot constructivă. Se consideră n puncte în care se admite că există tensiunile $\dot{x}_i$; de la fiecare punct din acesta se merge la un integrator, tensiunea la ieșirea acestuia fiind

$$v_i(t) = a'_{ij} x_j + x_i(0)$$

a'_{ij} fiind o constantă de integrare, iar $x_i(0)$ — valoarea lui $x_i(t)$ la momentul $t = 0$. Se poate admite că toate integratoarele au constantele egale cu 1 : $a'_{ij} = 1$.

De la ieșirile integratoarelor se merge la n sumatoare, la care coeficienții de pondere sînt astfel aleși încît tensiunile lor de ieșire să fie

$$u_{si} = \sum a_{ij} x_j + b_i.$$

Conectînd ieșirea sumatorului la punctul în care există tensiunea notată $\dot{x}_i$, evoluția sistemului este dată de relația

$$\dot{x}_i = a_{ij} x_j + b_i,$$

ceea ce demonstrează teorema T5.

Observația O3 : integratorul ideal considerat are o funcționare descrisă prin următoarea relația între mărimea de intrare $x_i(t)$, mărimea de ieșire $x_0(t)$ și $x_0(0)$:

$$x_0(t) = \int_0^t x_i(t) dt + x_0(0).$$

Definiția D4 : se numește element de întârziere sistemul la care între mărimea de intrare v_i și mărimea de ieșire v_0 subsistă relația

$$v_0(t) = v_i(t - c) \quad c \in \mathbb{R}^+;$$

constanta pozitivă c este întârzierea introdusă de sistem.

Teorema T6 : mulțimea liniilor (elementelor) de întârziere poate fi organizată ca semigrup, față de operația de conectare a lor în serie.

Demonstrație : conectând în serie două elemente de întârziere, caracterizate prin constantele c și d , se obține o întârziere $e = c + d$, care se poate obține și de la un singur element de întârziere. Operația de conectare în serie a elementelor de întârziere este deci o operație internă, peste tot definită. Operația este și asociativă și comutativă așa cum se poate verifica imediat. Acest semigrup admite și element unitate (elementul la care întârzierea este zero) — dar elementele sale nu au invers, aceasta echivalând cu admiterea unor elemente anticipative, deci necauzale.

Teorema T7 : cu un element de întârziere se pot obține semnale periodice, avînd perioada de repetiție egală cu întârzierea caracteristică elementului.

Demonstrație : să considerăm un element de întârziere, avînd constanta de întârziere T și la care ieșirea este conectată direct la intrare. În intervalul $(-T, 0]$ tensiunea la intrarea elementului de întârziere este $f(t)$. După o întârziere T , această tensiune se regăsește la ieșirea elementului de întârziere, deci și la intrarea sa. Fenomenul se repetă la fiecare T , deci pentru $t > 0$, la ieșirea elementului de întârziere avem un semnal periodic, perioada de repetiție fiind T .

Observația O4 : funcții periodice se pot obține și din sisteme formate numai din integratoare și sumatoare, ca de exemplu în sistemul la care $n = 2$,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad B = 0$$

Teorema T8 : cu două generatoare armonice și un sumator se pot obține funcții cuasiperiodice.

Demonstrația este imediată : printr-un procedeu oarecare se generează două semnale armonice de frecvențe f_1 și f_2 care nu sînt într-un raport rațional. Cele două semnale se aplică la intrarea unui sumator, la ieșirea căruia semnalul este descris de o funcție cuasiperiodică.

Teorema T9 : cu integratoare, sumatoare și elemente de întârziere se pot genera semnale reprezentate prin soluțiile sistemului de ecuații cu argument întârziat

$$\dot{x}_i = \sum a_{ij} x(t_j - c_j) + b_i$$

și j luînd valori de la 1 la n .

Demonstrație : se consideră configurația ca în cazul teoremei T5, cu diferența că între punctele în care se consideră mărimile $\dot{x}_i$ și integratorul la care sînt ele conectate, se intercalează un element care introduce întârzierea c_i . Urmărind starea sistemului, se constată că sînt satisfăcute ecuațiile din enunțul teoremei T9.

Observația O5 : pentru ca ecuația din teorema T9 să conducă la o soluție unică, este necesar a se da și valorile funcțiilor $x_i(t)$ pe anumite intervale de timp. Anume, pentru x_j , la care argumentul apare întârziat cu c_j , se dă $x_j(t) = \varphi(t)$ pentru $t \in (-c_j, 0]$ — admițind că sîntem interesați de soluțiile x_i pentru $t \geq 0$. Funcțiile $\varphi(t)$ sînt continue.

Din punct de vedere al funcționării modelului electric observăm că dîndu-se în mod corespunzător funcțiile $\varphi_i(t)$, pe intervalele de timp specificate, la ieșirea din sumatoare efectul acestor tensiuni se va resimți începînd cu $t = 0$: din acest moment semnalele de reacție închid efectiv bucele, corespunzător ecuațiilor de evoluție.

4. **Definiția D5 :** se numește multiplicator elementul cu două intrări și cu o ieșire, la care, în fiecare moment, tensiunea de ieșire este produsul valorilor, din acel moment, a tensiunilor aplicate la intrări

$$v_0(t) = v_1(t) v_2(t).$$

Observația O6 : multiplicatorul este un element liniar, în raport cu o intrare, dacă cealaltă intrare are o tensiune constantă ; în general, multiplicatorul este un element neliniar. În particular, dacă se ia $v_1(t) = v_2(t) = v_i(t)$, cu un număr n multiplicatoare se poate obține $v_i^{n+1}(t)$

Teorema T10 : cu sumatoare, integratoare și multiplicatoare se pot genera tensiuni care satisfac sistemul de ecuații diferențiale

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)$$

sau

$$\dot{x}_i(t) = \sum a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t), i, j = \overline{1, n}.$$

Demonstrația se dă constructiv. Se consideră n puncte în care se admite că există tensiunile $\dot{x}_i(t)$. Fiecare din aceste puncte este conectat la intrarea unui integrator, la ieșirea căruia există tensiunea

$$v(t) = x(t) - x(0).$$

Acest semnal se aplică la intrarea a n multiplicatoare, care produc la ieșire semnalele $a_{ij}(t)x_j(t)$. Însumînd convenabil aceste semnale și adăugînd și termenii independenți $b_i(t)$, se obțin mărimile

$$v_i = a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t).$$

Închidem bucla de reacție, ducînd conexiunea cu tensiunea v_{i0} la punctul în care există tensiunea $\dot{x}_i$: în modul acesta s-a realizat un sistem a cărui evoluție în timp este conform sistemului din teorema T10.

Teorema T11 : cu sumatoare, integratoare și multiplicatoare se pot genera tensiuni care satisfac ecuația diferențială de funcția necunoscută $x(t)$

$$\sum_{j=1}^m a_j(t) \prod_{i=1}^n (x^{(i)}(t))^{n_{ij}} = 0 \quad n, m \in \mathbb{N}$$

unde $a(t)$ sînt funcții de timp date.

Demonstrația se bazează pe faptul că dispunând de un lanț de n integratoare, notînd cu $x(t)$ tensiunea la ieșirea mergînd pe lanț în sens invers semnalelor, se obțin, pe rînd, derivatele succesive ale lui x în raport cu timpul, pînă la $x^{(n)}(t)$. Dispunînd de un număr corespunzător de multiplicatoare, se pot obține tensiuni proporționale cu puterile acestor derivate și produse între acești termeni, totul multiplicat cu o funcție de timp dată. Realizînd un montaj la care suma acestor tensiuni să fie nulă, se verifică T11.

Teorema T12 : cu sumatoare, integratoare și multiplicatoare se pot genera tensiuni care satisfac sistemul de ecuații diferențiale

$$\sum_{k=1}^p a_k(t) \prod_{i,j=1}^{m,n} (x_i^{(j)}(t))^{n_{ijk}} = 0 \quad n, m, p \in N,$$

unde $a(t)$ sînt funcții de timp date.

Demonstrația este identică cu cea de la T11.

Anume, imaginăm n puncte în care se află tensiunile $x_j(t)$. Aceste puncte se află la capătul unor lanțuri de integratoare, de-a lungul cărora se obțin derivatele succesive ale acestor tensiuni, $x_i^{(j)}(t)$. Cu un sistem de multiplicatoare se realizează puterile succesive ale acestor derivate, adică termeni de forma

$$(x_i^{(j)})^{n_{ijk}}.$$

Cu alte multiplicatoare se înmulțesc între ei acești termeni, și în plus cu un coeficient de depinde de timp, obținînd termeni de forma

$$a_k(t) \prod_{i,j} (x_i^{(j)}(t))^{n_{ijk}}$$

Însumînd acești termeni în mod corespunzător, ieșirea din sumator fiind conectată la acel punct în care se află tensiunea $x_i^{(n)}$ $n = \max n_i$. S-a realizat astfel un sistem la care este satisfăcută condiția din enunțul teoremei T12.

Teorema T13 : cu sumatoare, integratoare și elemente de întîrziere se pot obține funcții de timp care satisfac sistemul de ecuații

$$x_i^{(n_i)}(t - c_i) = \sum_k a_k(t - c_k) \prod_{i,j}^{n,m} (x_i^{(j)}(t - c_{ij}))^{n_{ijk}}$$

unde c_i, c_j și c_{ij} sînt constante pozitive, n_i, n_{ijk}, n, m, p — numere naturale, iar a_k — funcții date.

Demonstrația este aceeași ca și la teorema precedentă.

Teorema T14 : cu sumatoare, integratoare, multiplicatoare și linii de întîrziere se pot genera funcții de timp care sînt soluții ale sistemului de

ecuații diferențiale cu argument întârziat

$$\sum_1 a_1(t - c_{j1}) \prod_{i,j,k} (x_i^{(n_{ij})(t - o_{ijk}))^{n_{ijk}}} = x_i^{(n_i)} \quad n_i = \max_{ij} n_{ij}$$

Catedra de radio

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. L. A. Zadeh, E. Polak, System Theory, McGraw-Hill New York, 1969
2. Ch. Hayashi, Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill, New York, 1964
3. Edm. Nicolau, Analogie. Modelare. Simulare cibernetică, Editura științifică și enciclopedică, București, 1977

Oscillations in Cybernetic Systems

The aim of this paper is to establish the differential equations describing the evolution of feed back systems. We are considering only feed back systems consisting of: adders; adders and integrators; adders, integrators and multipliers; adders, integrators, multipliers and delay lines.

AUTOMATICĂ

CONTRIBUTIONS TO IMPLEMENTATION OF NUMERICAL ADAPTIVE CONTROL SYSTEMS FOR MILLING MACHINES*

N. SPRÎNCEANĂ, R. DOBRESCU, Th. BORANGIU, FL. IONESCU, C. FRANKENFELD

The present paper takes into account a very important problem in the field of cutting machine-tools control equipment design; it refers to the adaptive control of the cutting process.

Starting from the machine-tool — cutting process tandem, considered, by means of dynamic control concepts as an automatic installation, the authors determine the tasks of an optimal control equipment, propose an adaptation algorithm and implementate in digital devices the resulted adaptation strategy. Finally, some practical aspects, concerning the realizability, as well as the reliability of the equipment are presented.

The adaptability concept for cutting machine-tools

The machining of piecework surfaces lies on the technological information specified in terms of: cutting type and machining phenomena knowledge, tool and workpiece material properties, and the machine-tool peculiarities.

Some of the process characteristics, eg. the physical properties of the workpiece material, as well as cutting properties of the tool, are modifying during a machining cycle. Therefore, the empirical prescribed process conditions often lead either to unloading, hence a reduced productivity, or, (in particular conditions), to overloading, that means a too fast wear rate, overstraining of the driving motors or a low quality of the machined surface.

Therefore, the use of control equipments, which realize both the technological conditions imposed, and supplementary advantages, as: minimum cost, maximum productivity, or a compromise between them, becomes necessary.

The control system theory applied on cutting processes involves to treat the machine tool — cutting process tandem as a controlled installation, and this means before any other design activity, to identify the specific variables of the control system.

* Manuscript received 25 April 1977

The authors have considered in their paper the particular problem of the plane milling process, and in consequence suggest, using the informational concept of a dynamical system, the following classification:

— input (control) variables of the system, $u = \omega(t)$: feed rate (FI), spindle speed (S), cutting depth (D), displacement values on the X , Y , Z axes (Displ);

— state variables of the system, $x = \theta(t)$: cutting width, machining type variable coefficients, dynamic properties of the tool and workpiece material, main drive current, temperature in the contact zone tool-workpiece;

— output variables of the system, $y = \gamma(t)$: quality of the machined surface, dimensions and shape of the workpiece (reflecting the displacement of the mechanical subsystems on the X , Y , Z axes), torsion torque (T_t), deflection torque (T_d), power of the main drive.

The conventional control system, whose components are the controlling device and the installation (milling machine-cutting process) possesses the well-known informational and structural properties of a dynamic system, the structure of the installation being aprioric partial completely known [1]. It became therefore possible to represent the entire system as a basic system, by means of the relationships:

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x, \omega(t)) \quad (1)$$

$$y(t) = \gamma(t, x(t)), \quad t = [t_0, t_f] \quad T \quad (2)$$

where φ is the state transition function and γ is the output transition function, the dynamic being analyzed over a time range $[t_0, t_f]$. In this conditions, we define the milling machine-cutting process as adaptable if it is possible to point out, in the inside of the system, a variable c , (known as the adaptation variable), for which, over the same time ordered set $[t_0, t_f]$ it is possible an imposed variation:

$$c_j = \delta_j(t) \quad (3)$$

We shall refer to δ_j as the adaptation criterium. Because the c variable makes possible the extension of the system output y , it results a new output variable y' , and a new state variable, x' , as:

$$y' = (y, c) \quad (4)$$

The paper takes into consideration the problem of input adaptation (or control adaptation), and not that of system structure adaptation, the transition relationships (1) and (2) becoming:

$$x' \xrightarrow{\varphi} u'_j \quad (5)$$

$$x'_j \xrightarrow{\gamma'_j} y'_j \quad (6)$$

where u' is the modified (aiming to adaptation) control vector [1]. The construction of the adaptive system is performed adding to the adaptable system (which is separable in the basic system, S_1 and the adjoint system, S_2) the adaptation system, S_a (figure 1.) :

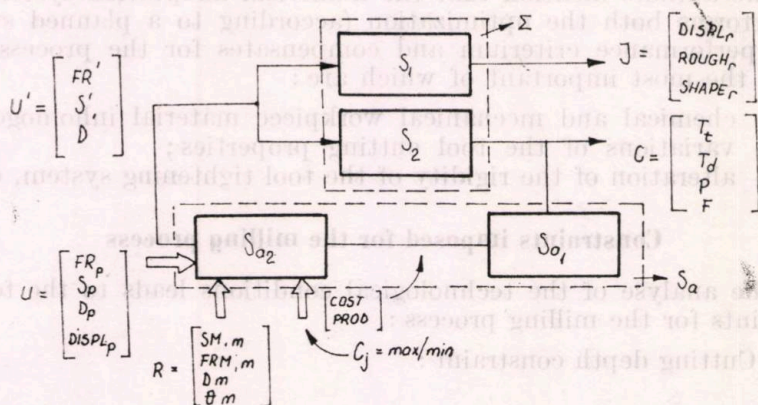


Fig. 1.: The adaptive system for a milling machine.

The cutting process adaptive system taken into account is particularly output constrained, that means that the functionality on output y is maintained, with no changes from the unadaptated system. This is expressed by the relationship :

$$\gamma_j = \gamma U \delta_j \quad (7)$$

The above discussed separability of the adaptable milling machine-cutting process system becomes possible, being imposed by total control lability requirements of the adjoint system ; the controllability has been demonstrated both in the design, by means of computer simulation, and later during the implementation of the equipment. The authors have considered the basic system as the whole dynamic of the milling machine (including all devices which ensure the informational paths : controls of real displacements of the X, Y, Z machine axes, with the correspondent perturbations and the unknown structure).

Because one aims to ensure a performance c_j of the form :

$$C_j = \min/\max, \quad (8)$$

the numerical implemented adaptive system is optimal (ACO system). The adaptation system contains a computing unit S_1 , which accepts the adaptation variable c and creates, at its output, the instantaneous values of one of the desired performance criteria :

- machining cost
- machining productivity
- tool life.

The optimization unit S_2 receives the above mentioned values as well as the reference controls, and by taking into account the constraints (R vector), computes the modified controls for the milling machine drives (vector u').

The authors mention that the numerical adaptation system designed performs both the optimization (according to a planned strategy) of the performance criterium and compensates for the process disturbances, the most important of which are :

- chemical and mechanical workpiece material inhomogeneities ;
- variations of the tool cutting properties ;
- alteration of the rigidity of the tool tightening system, etc. [2].

Constraints imposed for the milling process

The analyse of the technological conditions leads to the following constraints for the milling process :

I Cutting depth constraint :

$$D_{\min} \leq D \leq D_{\max} [\text{mm}] \quad (9)$$

II Constraints imposed by the kinematics of the milling-machine, by the feed rate actuator and by the machining type :

$$FR_{\min} \leq FR \leq FR_{\max} [\text{mm/min}] \quad (10)$$

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max} [\text{rpm}]$$

III Maximum pitch feed (PF) constraint (given by the maximum admissible torque) :

$$T_t \leq T_{t\max} [Nm], \text{ or } PF \leq PF_{\max} [\text{mm/tooth}] \quad (11)$$

where :

$$T_t = \frac{1}{2} 10^{-3} C_p z d^{1-q_p} B^{u_p} D^{x_p} PF^{y_p}, \quad (12)$$

z = number of mill teeth ;

d = mill diameter ;

B = cutting width ;

C_p, q_p, u_p, x_p, y_p = material coefficients.

and :

$$PF = \frac{FR}{zS} \quad (13)$$

IV Maximum main drive power constraint :

$$P \leq P_{\max} [\text{kW}] \quad (14)$$

or :

$$S^{1-p_p} FR^{p_p} \leq \frac{P_{\max} z^{p_p-1}}{C_N B^{u_p} D^{x_p} d^{1-q_p}} \quad (13)$$

V Maximum torque constraint (in order to avoid unloaded vibrations) :

$$T_t \leq T_{t \min} \quad [\text{Nm}] \quad (15)$$

VI Surface quality constraint (by means of vibrations amplitude limitation) :

$$A \leq A_{\max} \quad [\text{mm}] \quad (16)$$

All these constraints are defining the „allowed zone” (the unshaded zone in fig. 2), in which the working (S, FR) point must be maintained.

S and FR are considered main control variables, and D secondary control variable, the last one being modified only in particular cases which will be described further.

Determination of the optimum working point corresponding to the proposed performance index and proper adaptation strategy

The adaptive control system proposed by the authors aims to extremise a criterium such as : machining cost, productivity, tool life, for heavy duty milling.

The mathematical expression of the quality index, represented by cost per length unit, is :

$$J(\beta) = \left(R + \frac{C_s}{T_L} + \beta a P \right) \frac{1}{FR} \quad [\text{lei/mm}] \quad (17)$$

where :

$$0 \leq \beta \leq 1 \quad (18)$$

and

$$C_s = C_D + (1 - \beta) C_A + \beta \cdot C_{EC}, \quad (19)$$

where :

R = direct cost rate [lei/mm];

T_L = tool life [min];

a = electrical energy cost [lei/kW min];

C_s = tool cost [lei];

C_D = tool cost for N regrindings [lei];

C_A = grinding cost [lei];

C_{EC} = energy during tool changing cost [lei].

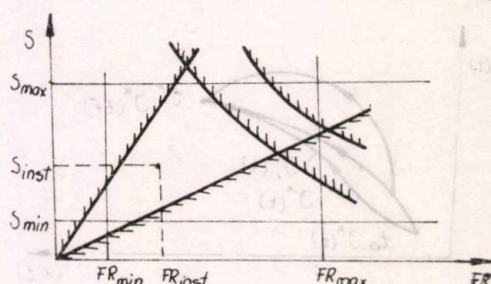


Fig. 2.: The working zone and its constraints.

Using the well-known tool life and power relationships :

$$S T_L^m (PF)^{y_a} = K \quad (20)$$

and,

$$P = \frac{1}{975 \eta} 5 \cdot 10^{-4} \cdot C_p \cdot z \cdot B^{u_p} \cdot d^{1-b_p} \cdot D^{x_p} \cdot FR^{y_p} \cdot S \quad (21)$$

the quality index J becomes a function of S and FR , or, with (17)

$$J = J(PF, FR) \quad (22)$$

In order to minimize this function, one must find an optimal trajectory in the cost-adaptation variables space, $J^*(t)$, for $t [t_0, t_f]$, as in fig. 3.

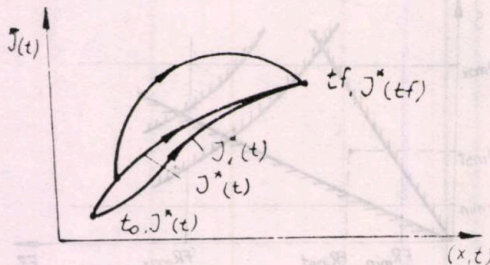


Fig. 3.: Optimal trajectories of the cutting process.

The kinematics of the machine tool, and the technological conditions of the cutting process led rather to a suboptimal trajectory, $J_1^*(t)$, than to an optimal one.

The minimization of the cost index, by annulling the partial derivatives of the cost function :

$$\frac{\partial J}{\partial PF} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial J}{\partial FR} = 0$$

leads to following relationships which define the adapted trajectory :

$$PF^* = PF_{\max}(t) \quad (24)$$

$$FR^* = \frac{K}{T_L^{*m}} \cdot z \cdot PF^{1-y_p}(t), \quad (25)$$

where :

$$T_L^* = \frac{l - m}{m} \frac{C_s}{R}$$

Fig. 4 depicts the working point location in the allowable zone at a time t :

By choosing $FR = FR_{\max}$, the suboptimal machine tool-cutting process system trajectory becomes adapted, and the adaptation strategy is considerable simplified [3]. The adaptation algorithm is thus arranged

to realize the testing of the instantaneous position of the working point (S, FR) with respect to the above mentioned constraints; in the situation in which all the constraints are non violated, the displacement of the working point is performed (with variable or constant steps) toward the sub-optimal zone defined by (24), on one of the boundary constraint curves of the allowable zone (PF or P constraints).

The flowchart in fig. 5 shows the main functions performed by the adaptive system

As a result of the continuous testing of the sensors on the milling machine, one obtains, in the case of constraints overflow, the controls during the continuous running of the machine (when due to the displacement toward the optimal zone, the admissible zone is overflowed by one step) and in the limit situations (when the $NC-AC$ interface protocol is violated, or when the axes return at their initial point, as a result of a complete machining allowance has been accomplished).

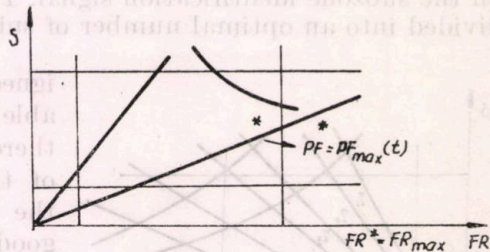


Fig. 4. : Optimum working point localization.

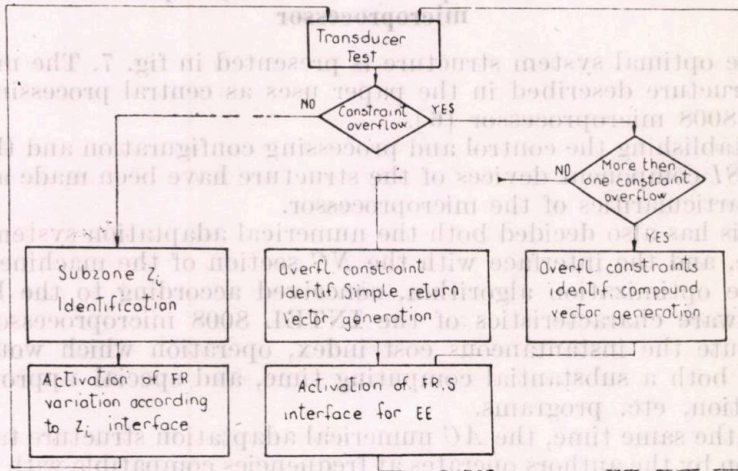


Fig. 5. : Adaptation system flowchart.

The return section for the allowable zone is differentiated with respect to the constraint identification, as well as with respect to the number of the overflowed constraints. Thus, the return control signals are produced either in a simple motion vector (a single control being modified), or in a compound motion vector (in which case two control signals are modified).

The testing and controlling of the working point (FR, S) process ends when the point enters the allowable working area. This very moment

the second adaptation section is activated, the purpose being the entrance and maintainance of the working point trajectory inside an as small as possible vicinity (a spatial cylinder) of the optimal trajectory.

Therefore, it has been settled and tested a variable step displacement algorithm of the working point. The variable displacement step depends on the subzone identification signal. The allowable working area has been divided into an optimal number of subzones: $z_1, z_2 \dots z_n$ (fig. 6.)

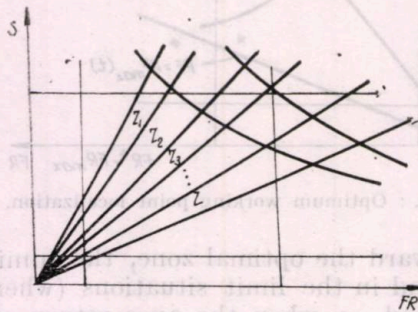


Fig. 6.: Plain division of working area.

The subzone identifier (designed in software version) assigns variable steps for FR and S modification, therefore resulting a strong convergence of the adaptation strategy. Moreover, the optimization algorithm insures a good stability for the dynamic system: machine tool-cutting process [4], [5].

As can be seen, the two adaptation sections can interfere during the control process; the time one or the other adaptation section is active, has been provided by means of software.

The numerical ACO adaptation structure, implemented with microprocessor

The optimal system structure is presented in fig. 7. The microcomputer structure described in the paper uses as central processing unit a INTEL 8008 microprocessor [6].

Establishing the control and processing configuration and the choice of the *LSI* component devices of the structure have been made according to the particularities of the microprocessor.

This has also decided both the numerical adaptation system-process interface, and the interface with the *NC* section of the machine tool.

The optimization algorithm, conceived according to the hardware and software characteristics of the INTEL 8008 microprocessor avoids to compute the instantaneous cost index, operation which would have required both a substantial computing time, and special approximation linearization, etc. programs.

In the same time, the *AC* numerical adaptation structure taken into discussion by the authors operates at frequencies compatible with the standard *MSI* and *LSI* circuits which build the hardware configuration preceding, and respectively following the input buffer (8 bits), and output buffer (8 bits).

The sensors — *ACO* equipment interface performs the filtering and amplification of the signals given by the sensors mounted on the vertical milling machine (the T_v , T_a , S , FR , P , I , vibration sensors) and offers, as a result of this operations $0 \dots +10$ V range d.c. unified voltage signals. These unified d.c. signals are then processed by the comparison devices (simple or double comparators), therefore resulting a TTL compatible numerical set of signals which reflect overflows or localizations of the milling process measured parameters.

These information together with the prescribed data from the manual input data pannel, are multiplexed, and catenated to the information coming from the *NC* equipment the latter being multiplexed in a separate device. The data which appears at the output of the *NC* equipment

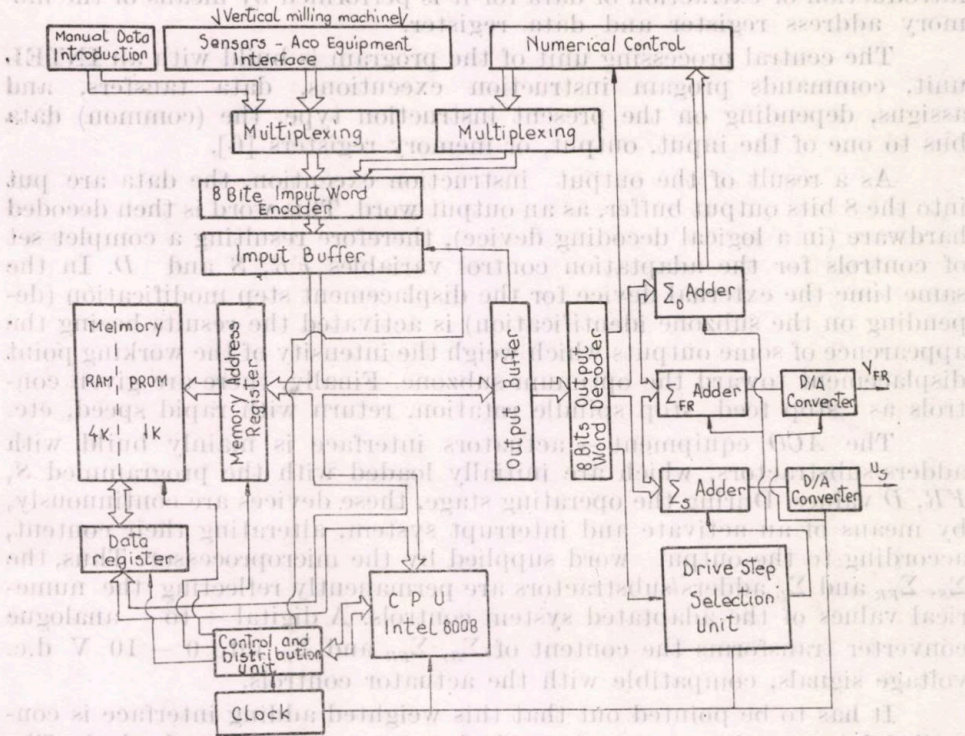


Fig. 7.: Numerical AC structure with LSI devices.

reflect continuously the workpiece machining degree from the point of view of the final dimensions and shape. Thus, the adaptation microcomputer supplies signals to the milling machine actuators adaptation controls only if the *ACO* — *NC* relational protocol is not violated.

The multiplexed data from the process sensors and *NC* equipment are coded in a 8 bits input word (the specific microprocessor's word length). Thus, at a given moment, the information which reflects the machine tool behaviour from the kinematic point of view, as well as the complete set of data which reflects the machining intensity are contained (codified) in the input buffer (8 bits).

The operating program of the microcomputer has been stored in PROM and RAM TTL memories (programmable, respectively random-access memories). This memories, which contain both the main adaptation program and a set of constants, of programmed and current values etc., have 1K, respectively 4 K dimensions, and offer, in the conceived

configuration, the advantages of a convenient access time, reliability and flexibility for the equipment.

The main program being initially stored in the PROM memory, (with possibility to modify the adaptation strategy, according to the chosen optimization criterium), the access to this memory, as well as the introduction or extraction of data for it is performed by means of the memory address register and data register.

The central processing unit of the program is build with an INTEL unit, commands program instruction executions, data transfers, and assigns, depending on the present instruction type, the (common) data bus to one of the input, output, or memory registers [6].

As a result of the output instruction execution, the data are put into the 8 bits output buffer, as an output word. This word is then decoded hardware (in a logical decoding device), therefore resulting a complet set of controls for the adaptation control variables FR , S and D . In the same time the external device for the displacement step modification (depending on the subzone identification) is activated the results being the appearance of some outputs which weigh the intensity of the working point displacement toward the optimum subzone. Finally, there are given controls as : stop feed, stop spindle rotation, return with rapid speed, etc.

The ACO equipment — actuators interface is mainly build with adders/subtractors, which are initially loaded with the programmed S , FR , D values. During the operating stage, these devices are continuously, by means of an activate and interrupt system, altering their content, according to the output word supplied by the microprocessor. Thus, the Σ_S , Σ_{FR} and Σ_D adders/subtractors are permanently reflecting the numerical values of the adapted system controls. A digital — to — analogue converter transforms the content of Σ_S , Σ_{FR} and Σ_D into 0 — 10 V d.c. voltage signals, compatible with the actuator controls.

It has to be pointed out that this weighted adding interface is controlled by several frequencies, worked out from the central clock. The proper choice of these frequencies has generated full compatibility between the data processing time/cycle and the dynamic characteristics of the installation (machine tool kinetics and machining dynamic). From this point of view, the data input into the microcomputer frequency has been corelated both with the INTEL 8008 microprocessor performances, and with the natural frequency of the milling machine-cutting process system, in order to ensure optimal dynamic characteristics, such as stability, overshooting, settling, time, stationary error.

The numerical structure, designed by the authors for the adaptation of a vertical milling machine, has been initially simulated on a FELIX C 256 computer, a simultaneous real time simulation for the machining of a workpiece being performed. Later, the experiments carried out on a vertical milling machine have supplemented the necessary data set, such as signal diagrams of the machine sensors, dynamic characteristics of the machine tools, etc. making thus possible the above described LSI configuration design [2].

Conclusions

The numerical adaptive control system described in this paper offers the possibility to control the milling process both after the optimal strategy (above mentioned) and after the conventional one. This is generated by the fact that the process sensors, as well as the two interfaces do not change too much. In the same time the 8 bits input, respectively output word decoding hardware sections remain approximately the same. The only important modifications appear in the adaptation program, which is stored in the microcomputer's PROM memory. It becomes obviously that a structure directed from the beginning towards a conventional adaptation would lead to substantial hardware and software savings, which would reduce the overall equipment cost.

The authors consider that by implementing discrete optimization strategies in numerical processing structures, using *LSI* devices, low cost equipment, which ensure good control performances for the cutting process become realizable. It must be pointed out that for more complex mathematical expressions of the performance index, or in order to satisfy more severe dynamic performances of the adaptive control system, the employment of modular processing devices (which make possible the extension of the operating word) based on INTEL 3000 series microprocessors offers an optimal solution. The *MSI* and *LSI* devices which form the adaptation system are compatible with the *NC equipment* design and realization conception. From this point of view, the authors consider the future will be devoted to an unitary, modern conception, which would permit to design and construct an unique machine tool control equipment with the two functional control sections : *NC* and *AC*, running separately or, (optionally) together.

Automatic Control Department
Polytechnical Institute. „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București.

B I B L I O G R A P H Y

1. Penescu, C., Sisteme. Concepte. Caracterizări. Sisteme liniare, Editura Tehnică, București. 1975.
2. Sprinceană, N., Dobrescu, R., Borangiu, Th., Ionescu, Fl., Frankenfeld, C., Simularea unui sistem de reglare adaptivă a mașinilor-unelte, Sesiunea de Comunicări Progrese în automatizări, Academia R.S.R. 1975.
3. Athans, M. and Falb, P. Optimum Control, Mc. Graw-Hill Book Company, New York. 1966.
4. Mathias, R. A., ASTM Paper No MS 68-2 1968.
5. Milner, D. A., Adaptive Control of Feedrate in the Milling Process, Int. J. Mach- Tool-Des. Res. Vol. 14, Pergamon Press. 1974.
6. INTEL CORPORATION, MCS-8 INSTRUCTION SET 1974.

Contribuții la implementarea sistemelor numerice de comandă adaptivă la mașinile de frezat

Lucrarea tratează o problemă foarte importantă în domeniul proiectării echipamentelor de comandă adaptivă a mașinilor-unelte.

Pornind de la legătura bilaterală dintre mașina unealtă și procesul de așchiere, și având în vedere necesitatea controlului dinamic în cadrul unei instalații automate, autorii determină sarcinile unui echipament de control optimal al procesului de așchiere, propun un algoritm de adaptare și implementează în blocuri numerice strategia de adaptare rezultată. În final sînt prezentate unele aspecte legate de posibilitatea de realizare practică a echipamentului, ca și de fiabilitatea structurii numerice propuse.

Conclusions

The numerical adaptive control system described in this paper offers the possibility to control the milling process both after the optimal strategy (above mentioned) and after the conventional one. This is guaranteed by the fact that the process sensors, as well as the two interfaces do not change too much. In the same time the 8 bits input, respectively output word describing hardware sections remain approximately the same. The only important modifications appear in the adaptation program, which is stored in the microcomputer's PROM memory. It becomes obvious that a structure directed from the beginning towards a conventional adaptation would lead to substantial hardware and software savings, which could reduce the overall equipment cost.

The authors consider that by implementing discrete optimization strategies in numerical processing structures, using A/D devices, low cost equipment, which ensure good control performances for the cutting process, becomes realistic. It must be pointed out that for more complex mathematical expressions of the performance index, or in order to satisfy more severe dynamic performances of the adaptive control system, the employment of modular processing devices (which make possible the execution of the operating word) based on INTEL 3000 series microprocessors offers an optimal solution. The A/D and A/V devices which form the adaptation system are compatible with the A/D equipment design and realization conception. From this point of view, the authors consider the future will be devoted to an unitary, modern conception, which would permit to design and construct an unique machine tool control equipment with the two functional control sections: A/D and A/V, running separately or (optionally) together.

Automatic Control Department
Polytechnical Institute "Gheorghe Gheorghiu-Dea", Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. Krasov, C., Sisteme Conceptuale Caracterizate, Sisteme Hinate, Editura Tehnica, Bucuresti, 1975.
2. Scurtu, V., Dobrescu, R., Borangiu, T., Ionescu, P., Ionescu, C., Simionescu, M., Sisteme de reglare adaptivă a masinilor unelte, Scinteia de Comunicatii Progress in Automation, Academic Press, New York, 1975.
3. Adams, M. and Foltz, A. Optimum Control, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
4. Stănescu, M. A., ASYM Paper No. 88-2, 1988.
5. Adams, M. A., Adaptive Control of Feedrate in the Milling Process, Int. J. Mach. Tool Des. Res. Vol. 14, Pergamon Press, 1974.
6. DATA CORPORATION, MCS-2 INSTRUCTION SET 1973.

Contribuții la implementarea sistemelor numerice de comandă adaptivă la
mașinile de frezat

În lucrarea tratată o problemă foarte importantă în domeniul proiectării echipamentelor de comandă adaptivă a mașinilor-unelte. Formind de la legătură bilaterală dintre mașina unelte și procesul de așchiere, și având în vedere necesitatea controlului dinamic în cadrul unei instalații automate, autorii determină caracteristicile unui echipament de control optim și prezintă o strategie de adaptare a sistemului de comandă în funcție de caracteristicile de așchiere, propunând o strategie de implementare în blocuri numerice a strategiei de adaptare rezultată. În final sunt prezentate unele aspecte practice de posibilitățile de realizare practică a echipamentului, ca și de realizarea structurilor numerice propuse.

IDENTIFICAREA FUNCȚIEI DE TRANSFER FOLOSIND SEMNALE PSEUDOALEATOARE BINARE (SPAB).*

M. TERTIȘCO, P. STOICA

Este propusă o metodă de estimare a funcției de transfer (parametrii și structură) utilizând ca modele neparametrice intermediare funcția pondere și caracteristicile de frecvență. Exemplul numeric inclus evidențiază posibilitatea utilizării tehnicii propuse ca o metodă de simplificare a sistemelor complexe.

Introducere

Metodele corelaționale conduc la modelul procesului sub forma funcției pondere. În automatizarea convențională cel mai adesea utilizabilă este funcția de transfer. Articolul tratează atit problema obținerii funcției pondere, cit și a funcției de transfer corespunzătoare.

Semnalul de test utilizat este un SPAB de tip $(0, a)$ care poate fi furnizat de un generator obișnuit. Se arată că în această situație estimarea funcției pondere se obține fără dificultăți de calcul. Din funcția pondere determinată se calculează caracteristica de frecvență prin efectuarea numerică a integralei de definiție.

Modelul sub forma funcției de transfer se determină astfel încit între caracteristica sa de frecvență și cea obținută prin integrare numerică să existe o eroare minimă, în sensul celor mai mici pătrate. Metoda propusă este ilustrată printr-un exemplu care pune în evidență precizia suficient de bună a tehnicii de identificare dezvoltate, precum și faptul că aceasta poate fi utilă în simplificarea sistemelor complexe.

1. Calculul funcției pondere

Se consideră procesul din Fig. 1. Presupunind că zgomotul $z(t)$ este necorelat cu intrarea $x(t)$ și că intervalul de discretizare a fost ales suficient de mic, se poate scrie ecuația Wiener Hopf eșantionată :

$$R(m\Delta) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} r[(m-k)\Delta] h(k\Delta) \quad (1)$$

$$m = 0, 1, \dots, N-1$$

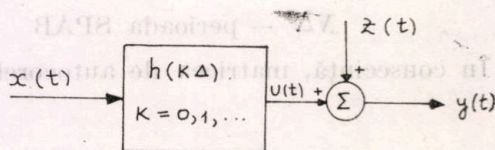


Fig. 1. Schemă generală a procesului de identificat

* Manuscris predat redacției pe data de 27 aprilie 1977

unde :

$N\Delta >$ decît timpul de stabilire al procesului

$$R(j\Delta) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta)[y[(k+j)\Delta] + y[(k+j+1)\Delta]] \quad (2)$$

$r(\tau)$ = funcția de autocorelație a mărimii de intrare

$h(k\Delta)$ = eșantionul funcției pondere de la momentul $K\Delta$.

Din relația (1) se obține imediat

$$[h] = [r]^{-1} [R] \quad (3)$$

unde :

$$\begin{aligned} [h] &= [h(0) \quad h(\Delta) \quad \dots \quad h[(N-1)\Delta]]^T \\ [R] &= [R(0) \quad R(\Delta) \quad \dots \quad R[(N-1)\Delta]]^T \\ [r] &= \begin{bmatrix} r(0) & r(\Delta) & r(2\Delta) & \dots & r[(N-1)\Delta] \\ & r(0) & r(\Delta) & \dots & r[(N-2)\Delta] \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & r(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Dacă semnalul de intrare $x(t)$ este un SPAB de tip (O, a) , matricea $[r]$ capătă o formă particulară care permite obținerea imediată a valorilor funcției pondere.

Într-adevăr, pentru un astfel de semnal funcția de autocorelație are următoarea expresie :

$$r(\tau) = \begin{cases} \frac{a^2(N+1)}{2N} & \tau = 0 \\ \frac{a^2(N+1)}{4N} & |\tau| = \Delta, 2\Delta, \dots, (N-1)\Delta \end{cases} \quad (5)$$

unde :

a — amplitudinea SPAB

$N\Delta$ — perioada SPAB

În consecință, matricea de autocorelație este următoarea :

$$[r] = \frac{a^2(N+1)}{4N} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Inversarea ei este imediată, rezultând pentru valorile funcției pondere la diferite momente de timp, următoarea expresie :

$$h(K\Delta) = \frac{4N}{a^2 \Delta(N+1)^2} \left[(N+1)R(k\Delta) - \sum_{i=0}^{N-1} R(i\Delta) \right] \quad (7)$$

Modul de alegere a parametrilor semnalului de probă (N , a , Δ) va fi discutat ulterior.

2. Determinarea funcției de transfer

Utilizând perechile de măsurători intrare-ieșire și relațiile (2), (7) se pot calcula valorile funcției pondere la diferite momente de timp ;

$$h(K\Delta) \quad K \equiv 0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

Dacă se notează :

$$Y(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9)$$

atunci :

$$\operatorname{Re}(\omega) = \int_0^{(N-1)\Delta} h(t) \cos \omega t dt \quad (10)$$

$$- \operatorname{Im}(\omega) = \int_0^{(N-1)\Delta} h(t) \sin \omega t dt$$

Efectuând numeric integralele din relația anterioară, pentru diferite valori ale pulsației ω , se poate obține caracteristica de frecvență a procesului. Considerind pentru funcția de transfer expresia generală de mai jos :

$$Y_M(s) = \frac{\sum_{k=1}^a A_k S^k}{\sum_{i=1}^b B_i S^i + 1} = \frac{A(s)}{B(s)} \quad s = j\omega \quad (11)$$

determinarea parametrilor (A , B , a , b) se va face astfel încît între caracteristica de frecvență a modelului (11) și cea obținută experimental (10) să existe o eroare minimă, în sensul celor mai mici pătrate.

Metoda utilizată apare ca o procedură iterativă a celor mai mici pătrate ponderate și este tratată detaliat în [1]. În continuare se schițează principiul acesteia. Pentru rezolvarea problemei fără a face apel la programarea neliniară, criteriul de eroare se definește ca mai jos :

$$E = \sum_{\omega} \frac{|B(j\omega)|_i^2}{|B(j\omega)|_{i-1}^2} e_{\omega}^2 \quad (12)$$

unde :

$$e_{\omega} = |Y(j\omega) - Y_M(j\omega)| = \left| Y(j\omega) - \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \right| \quad (13)$$

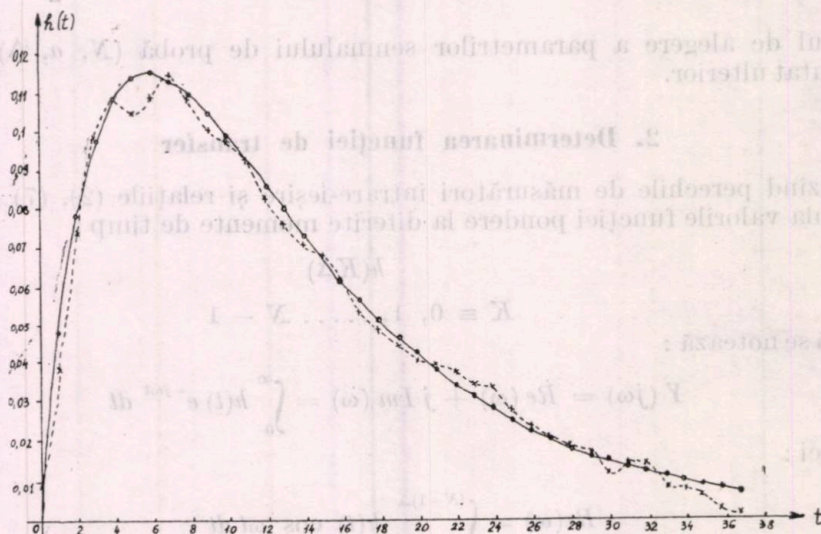


Fig. 2. Comparația între valorile adevărate și cele estimate ale funcției ponder : — Curba reală ; x — curba estimată

În relația (12) i indică numărul iterației (În general $|B(j\omega)|_0 = 1$ oricare ω). Determinarea la fiecare pas a coeficienților A_k , B_k care minimizează (12) se face rezolvînd un sistem linear de ecuații. Parametrii a , b pot fi determinați încercînd diferite structuri pentru modelul (11) și alegînd-o pe aceea care conduce la un minimum — minimum al criteriului (12). Convergența metodei este rapid obținută ([1], [2]) :

$$\frac{|B(j\omega)|_i^2}{|B(j\omega)|_{i-1}^2} \rightarrow 1 \quad (14)$$

În consecință

$$E \rightarrow \sum_{\omega} e_{\omega}^2 \quad (15)$$

și deci valorile parametrilor funcției de transfer astfel determinate satisfac criteriul celor mai mici pătrate.

3. Implementarea metodei

Obținerea unor rezultate precise cu metoda prezentată este condiționată de alegerea corectă a parametrilor semnalului de test și a domeniului de pulsații. Valorile optime pentru acești parametri se stabilesc

pentru fiecare caz în parte în funcție de informația despre proces disponibilă aprioric. Reguli recomandate în general în această direcție sînt următoarele :

- Δ — ales astfel încît să se respecte teorema lui Shannon.
- a — cît mai mare, dar limitat de posibilitatea de a perturba procesul și de gradul de neliniaritate al acestuia.
- N — astfel încît $N\Delta$ să fie mai mare decît timpul de stabilire al procesului.

$\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ — astfel încît să acopere domeniul de pulsații care interesează.

Observație : Pentru efectuarea cu o precizie suficientă a integrării numerice (v. 10) este necesar ca

$$\omega_{\max} \cdot \Delta < 1 \quad (16)$$

Se poate arăta că dacă Δ și $\omega_{\max}$ sînt corect alese, atunci (16) este satisfăcută.

Metoda prezentată anterior a fost programată pe calculatorul numeric IRIS 50. În acest sens au fost scrise în simplă precizie următoarele două subrutine :

PAB (NH, NT, NP, A, DELT, XI, XE, OM, H, HR, HI). Parametri formali au semnificațiile următoare :

a) Parametri de intrare

- NH — numărul de valori ale funcției pondere care se vor calcula
- NT — Numărul tacturilor dintr-o perioadă a SPAB.
- NP — numărul de pulsații considerate
- A — amplitudinea SPAB
- DELT — tactul SPAB
- XI — vector conținînd mărimi de intrare (NT elemente).
- XE — vector conținînd mărirea de ieșire (2NT elemente)
- OM — vectorul pulsațiilor (NP elemente)

b) Parametrii de ieșire

- H — vector conținînd valorile calculate ale funcției pondere (NH elemente)
- HR — vector conținînd $\text{Re}(\omega)$ (NP elemente)
- HI — vector conținînd $\text{Im}(\omega)$ (NP elemente)

IDENTIF (NRIT, IP, IA, IB, VR, VI, OM, X, E, VRC, VIC)

Parametri formali au semnificațiile următoare :

a) Parametri de intrare

- NRIT — numărul maxim de iterații
- IP — numărul de pulsații considerate
- IA — gradul numărătorului funcției de transfer
- IB — gradul numitorului funcției de transfer.
- VR — vector conținînd $\text{Re}(\omega)$ (IP elemente)
- VI — vector conținînd $\text{Im}(\omega)$ (IP elemente)
- OM — vectorul pulsațiilor (IP elemente)

b) Parametri de ieșire

- X — vectorul parametrilor funcției de transfer (IA + IB + 1 elemente)
 E — Valoarea erorii dintre caracteristica de frecvență a modelului și cea experimentală.
 VRC — vector conținând partea reală a caracteristicii de frecvență a modelului (IP elemente).
 VIC — vector conținând partea imaginară a caracteristicii de frecvență a modelului (IP elemente)

4. Exemplu de aplicare

Se consideră procesul cu funcția de transfer următoarea :

$$Y(s) = \frac{1,2s + 1}{(s + 1)(2,5s + 1)(4,2s + 1)} = \frac{1 + 1,2s}{1 + 7,7s + 17,2s^2 + 10,5s^3}$$

Presupunind că din informația apriorică se cunoaște durata regiunii tranzitoriu (cca 15 sec), pentru parametrul semnalului de probă și pentru pulsații se aleg următoarele valori :

$$a = 2 \quad \Delta = 0,5 \text{ sec} \quad N = 63$$

$$\omega = \{0,002 \quad 0,006 \quad 0,01 \quad 0,02 \quad 0,03 \quad 0,04 \quad 0,05 \quad 0,06 \\ 0,08 \quad 0,10 \quad 0,12 \quad 0,15 \quad 0,18 \quad 0,24 \quad 0,30 \quad 0,40 \\ 0,50 \quad 0,70 \quad 0,80 \quad 0,90 \quad 1.\}$$

Ieșirea procesului este perturbată cu un zgomet aditiv de medie zero. Raportul dintre dispersia zgometului și aceea a ieșirii utile a fost

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_u} = 15\%$$

Comparația valorilor determinate pentru funcția pondere cu cele reale este făcută în Fig. 2.

În Fig. 3a hodograful funcției de transfer obținut prin efectuarea numerică a relației (10) este comparat cu cel real.

Pentru diferite structuri ale funcției de transfer, criteriul (15) ia, la diferite iterații, următoarele valori.

Tabelul 1

E · 10 ⁶							
a	b	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6
1	2	2834	412	392	388	388	388
1	3	2834	340	314	288	281	281
1	4	2832	315	246	237	235	236
2	2	2831	360	308	300	299	299
2	3	2830	340	245	228	227	227
2	4	927	46	16	14	14	14

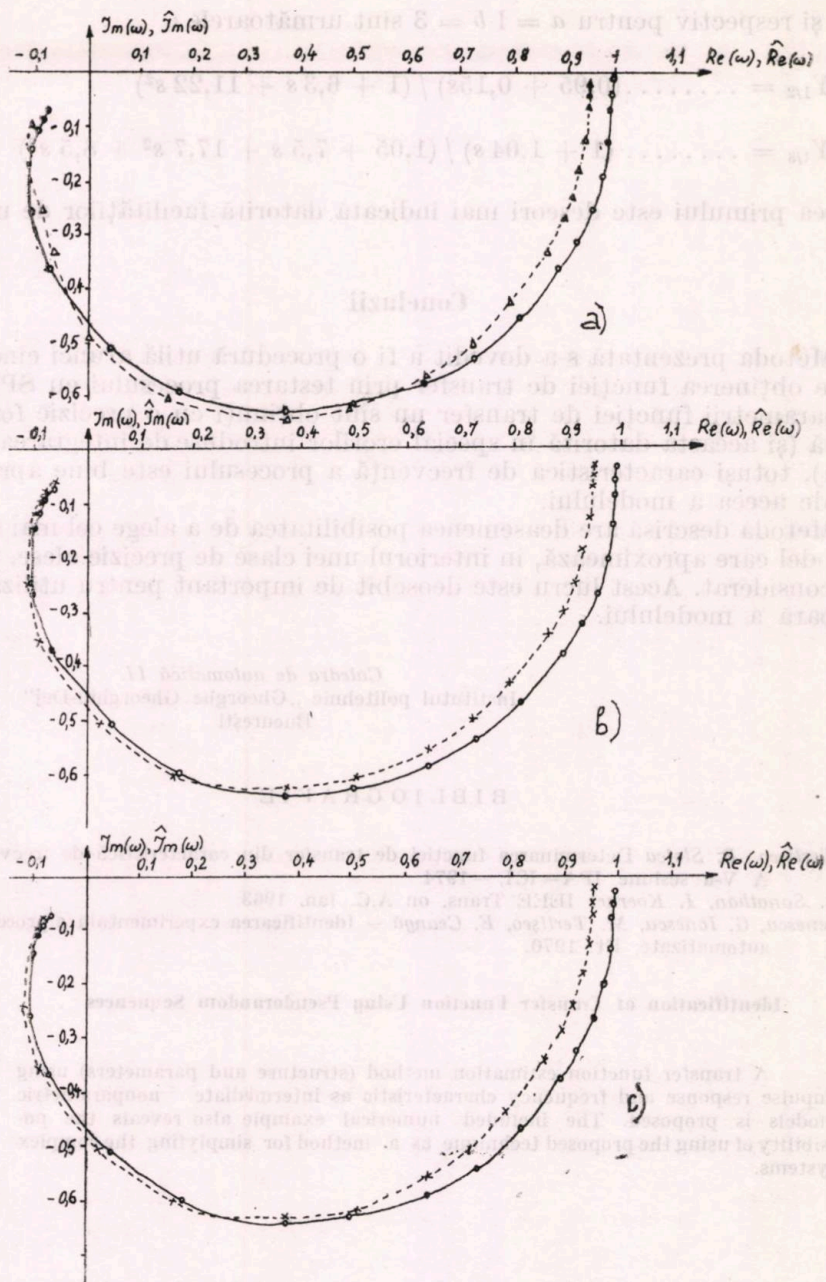


Fig. 3. Comparație între valorile adevărate și cele estimate ale hodografului funcției de transfer; $\circ$ — curba reală; $\circ$ — curba estimată prin integrarea funcției pondere (a); $\times$ — estimăția prin model 1/2 (b) și prin model 1/3 (c)

Din observarea tabelii anterioare se deduce că un model 1/2 aproximează aproape la fel de bine procesul ca un model 1/3 (vezi pentru comparație fig. 3b și respectiv fig. 3c). Cele două modele, obținute pentru cazul $a = 1$

$b = 2$ şi respectiv pentru $a = 1$ $b = 3$ sînt următoarele :

$$Y_{1/2} = \dots\dots\dots (0,95 + 0,15s) / (1 + 6,3s + 11,22 s^2)$$

$$Y_{1/3} = \dots\dots\dots (1 + 1,04 s) / (1,05 + 7,5 s + 17,7 s^2 + 8,5 s^3)$$

Alegerea primului este deseori mai indicată datorită facilităţilor de utilizare.

Concluzii

Metoda prezentată s-a dovedit a fi o procedură utilă atunci cînd se doreşte obţinerea funcţiei de transfer prin testarea procesului cu SPAB. Deşi parametrii funcţiei de transfer nu sînt obţinuţi cu o precizie foarte ridicată (şi aceasta datorită în special erorilor introduse de integrarea numerică), totuşi caracteristica de frecvenţă a procesului este bine aproximată de aceea a modelului.

Metoda descrisă are deasemenea posibilitatea de a alege cel mai simplu model care aproximează, în interiorul unei clase de precizie alese, procesul considerat. Acest lucru este deosebit de important pentru utilizarea ulterioară a modelului.

Catedra de automatică II.
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. M. Tertîşco, P. Stoica Determinarea funcţiei de transfer din caracteristică de frecvenţă. A V-a sesiune IPA—ICI, —1974
2. C. K. Sanathan, I. Koeruer IEEE Trans. on A.C. Ian. 1963.
3. C. Penescu, G. Ionescu, M. Tertîşco, E. Ceangă — Identificarea experimentală a proceselor automatizate, Et. 1970.

Identification of Transfer Function Using Pseudorandom Sequences

A transfer function estimation method (structure and parameters) using impulse response and frequency characteristic as intermediate nonparametric models is proposed. The included numerical example also reveals the possibility of using the proposed technique as a method for simplifying the complex systems.

C.Z.: 62-523

SYNTHESIS OF A SUBOPTIMAL CONTROL USING THE SENSITIVITY FUNCTIONS*

ION RUSS

In this paper an attempt is made to extend the singular perturbation method to nonlinear systems with quadratic performance index. The suboptimal control-expanded in a power series-can be computed using the system sensitivity functions. As a numerical example an optimal control system for a d.c. motor is considered. The results obtained are superior to other methods presented in the literature.

Problem Formulation

Consider the nonlinear system described by the equation,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varepsilon f(x, u) \quad (1)$$

where f is a s -vector-valued nonlinear function of the s -dimensional state x and the r -dimensional control u . The parameter $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_f]$ introduces the nonlinearity into the linear system. Indeed, for $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$ the system is linear and for $\varepsilon = \varepsilon_f$ it becomes nonlinear. We seek the optimal control minimizing the functional:

$$J = L(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} V(x, u, t) dt \quad (2)$$

where L and V are scalar-valued functions of quadratic form, t_0 and t_f are fixed and $x(t_f)$ is free.

Such problems has been successfully treated by the so-called „singular perturbation method” or „boundary-layer method” [1-6]. In these papers, the singular perturbation method is applied to high-order linear systems which can be partitioned in a „low-order” part and a „high-order” part, the latter introduced by a parameter.

In this paper an attempt is made to extend this method to nonlinear systems. Generally speaking, the method is focused upon the dependence of the optimal control on the parameter. The optimal control is expanded in a power series with respect to this parameter. The first term of the expansion corresponds to the optimal control for the linear system while the next terms correspond to the optimal control for the nonlinear system and can be used as correction of the linear optimal control.

* Manuscript received 27 April 1977

2. Synthesis of the Suboptimal Control

Equation (1) can be rewritten as follows :

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = h(x, u, t) = Ax(t, \varepsilon) + Bu(t, \varepsilon) + \varepsilon f(x, u) \quad (3)$$

and the performance index :

$$J = L(X(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} V(x, u, t) dt = \frac{1}{2} x^T(t_f) M x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q_1 x + u^T R_1 u) dt \quad (4)$$

where M , Q_1 and R_1 are diagonal, positive-defined matrices and the control u is unconstrained.

The hamiltonian is :

$$H = -V + p^T h. \quad (5)$$

The necessary conditions for optimality via the maximum principle are :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p \\ \dot{p} &= -H_x x \\ 0 &= H_u \end{aligned} \quad (6)$$

with the boundary conditions :

$$\begin{aligned} x(t_0, \varepsilon) &= x_0 \\ p(t_f) &= -L_x | t = t_f \end{aligned} \quad (7)$$

where H_p denotes the first partial derivative, i.e. $H_p = \partial H / \partial p$

Define the k -order sensitivity functions :

$$\zeta_k = \left. \frac{\partial^k x}{\partial \varepsilon^k} \right|_{\varepsilon=0}; \quad \nu_k = \left. \frac{\partial^k u}{\partial \varepsilon^k} \right|_{\varepsilon=0}; \quad \eta_k = \left. \frac{\partial^k p}{\partial \varepsilon^k} \right|_{\varepsilon=0};$$

Expand the optimal control $u(t, \varepsilon)$ in a power series with respect to ε , at $\varepsilon = 0$:

$$u(t, \varepsilon) = u^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left[\frac{\partial^k u}{\partial \varepsilon^k} \right]_{\varepsilon=0} = u^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \nu_k \quad (8)$$

where $u^*(t)$ is the optimal control for the linear system, i.e. the system (3) with $\varepsilon = 0$.

For sake of simplicity we shall consider a scalar control, but the results can be easily extended to the multivariable case.

Assume that f , V , L and H are twice differentiable in x , u and p and their partial derivatives are continuous at $\varepsilon = 0$. By differentiation

of (6), and letting $\varepsilon = 0$, yields :

$$\dot{\xi}_1 = h_x \xi_1 + h_u v_1 + f \quad (9)$$

$$\dot{\eta}_1 = -H_{xx} \xi_1 - b_x \eta_1 - H_{xu}^T v_1 - f_x^T p \quad (10)$$

$$0 = H_{ux} \xi_1 + h_u \eta_1 + H_{uu} v_1 + f_u^T p \quad (11)$$

By elimination of v_1 we obtain :

$$\dot{\xi}_1 = F \xi_1 + S \eta_1 + \omega_1 \quad (11a)$$

$$\dot{\eta}_1 = Q \xi_1 - F^T \eta_1 + \pi_1 \quad (12a)$$

where :

$$Q = [H_{ux} H_{uu}^{-1} H_{ux}^T - H_{xx}]|_{\varepsilon=0} = Q_1$$

$$F = [h_x - h_u H_{uu}^{-1} H_{ux}^T]|_{\varepsilon=0} = A$$

$$S = [-h_u H_{uu}^{-1} h_u^T]|_{\varepsilon=0} = -B R_1^{-1} B^T$$

$$\omega_1 = [f - h_u H_{uu}^{-1} f_u p]|_{\varepsilon=0}$$

$$\pi_1 = [H_u^T H_{uu}^{-1} f_u^T p - f_x p]|_{\varepsilon=0}$$

The boundary conditions for (12 a) and (13 a) are :

$$\xi_1(t_0) = \frac{\partial x_0}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (12b)$$

$$\eta_1(t_f) = \frac{\partial p(t_f)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (13b)$$

Kalman [7] has shown that η_1 and ξ_1 are related by :

$$\eta_1 = -K \xi_1 + g_1 \quad (14)$$

where K is the symmetric, positive-definite solution of the Riccati equation :

$$\dot{K} = -KF - F^T K + KSK - Q \quad (15a)$$

$$K(t_f) = L_{xx}|_{t=t_f} = M \quad (15b)$$

and g_1 is the solution of :

$$\dot{g}_1 = (KS - F^T)g_1 + K\omega_1 + \pi_1 \quad (16a)$$

The final condition for (16) is obtained from (12b), (13b) and (14):

$$g_1(t_f) = K(t_f) \xi_1(t_f) \quad (16b)$$

Note that both (15) and (16) have to be solved backward in time. By substitution of (14) into (12) we get:

$$\dot{\xi}_1 = (F - SK) \xi_1 + \alpha_1 \quad (17)$$

where

$$\alpha_1 = Sg_1 + \omega_1$$

Combining (11) and (14) we obtain:

$$v_1 = -H_{uu}^{-1} (H_{u\varphi}^T - h_u^T K) \xi_1 + \beta_1 \quad (18)$$

where

$$\beta_1 = -H_{uu}^{-1} (h g_1 + f_u^T p)$$

Note that equations (17) and (18) are the first-order sensitivity equations. The second-order sensitivity equations can be obtained in the same way, by differentiation of (17) with respect to ε . The homogeneous part will be the same and only the forcing terms α and β will be different.

The k -order sensitivity function has the general form:

$$v_k = -H_{uu}^{-1} (H_{u\varphi}^T - h_u^T K) \xi_k + \beta_k \quad (19)$$

In order to find the optimal control $u^*(t)$ for the linear system let $\varepsilon = 0$ in (3):

$$\dot{x}^* = Ax^* + Bu^* \quad (20)$$

In this case, the optimal control is known to be [7]:

$$u^*(t) = -R_1^{-1} B^T K x^*(t) \quad (21)$$

where K is the solution of the Riccati equation (15) with $\varepsilon = 0$.

By substitution of (19) and (21) into (8) we get:

$$u(t, \varepsilon) = -R_1^{-1} B^T K x^*(t) - H_{uu}^{-1} (H_{u\varphi}^T - h_u^T K) \Big|_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \xi_k + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \beta_k \quad (22)$$

Since:

$$H_{uu}^{-1} (H_{u\varphi}^T - h_u^T K) \Big|_{\varepsilon=0} = R_1^{-1} B^T K$$

(22) can be written as follows:

$$u(t, \varepsilon) = -R_1^{-1} B^T K x^*(t) - R_1^{-1} B^T K \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \xi_k + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \beta_k \quad (23)$$

Expand $x(t, \varepsilon)$ in a power series with respect to ε , at $\varepsilon = 0$:

$$x(t, \varepsilon) = x^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \xi_k \quad (24)$$

By substitution of (24) into (23) we obtain the optimal control:

$$u(t, \varepsilon) = -R_1^{-1} B^T K x(t, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \beta_k \quad (25)$$

The suboptimal control is obtained from (25) by truncating the power series after n terms:

$$\bar{u}(t, \varepsilon) = -R_1^{-1} B^T K x(t, \varepsilon) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon^k}{k!} \beta_k \quad (26)$$

where $x(t, \varepsilon)$ is the solution of the closed-loop system equation obtained by substitution of (26) into (3):

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = (A - BR_1^{-1} B^T K) x(t, \varepsilon) + B \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon^k}{k!} \beta_k + \varepsilon f(x, \bar{u}) \quad (27)$$

Thus, the computational procedure for $n = 1$ can be summarized as follows:

1. solve Riccati equation (15) backward in time for K .
2. solve equation (16) for g_1 .
3. solve equation (17) for ξ_1 and (18) for β_1 and v_1 .
4. compute the suboptimal control by solving (26) and (27).

Of course, one can ask how accurate is the approximation of the performance index (4) when using the suboptimal control (26) instead of the optimal control (25).

Denote by J_{∞} the optimal value of the performance (4) when using the optimal control (25) and by J_n the performance of the system (27) which employs the suboptimal control (26), where n is the number of terms taken into account. Thus, there are the following:

Theorem: an n -order approximation of the optimal control u results in a $(2n + 1)$ st-order approximation of J_{∞} , i.e. the first $(2n + 1)$ terms of the power series for J_n are equal to the corresponding $(2n + 1)$ terms of the power series for J_{∞} :

$$\left. \frac{d^i J_n(\varepsilon)}{d\varepsilon^i} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d^i J_{\infty}(\varepsilon)}{d\varepsilon^i} \right|_{\varepsilon=0}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2n \quad (28)$$

Thus, by using a first order approximation of u , that is, with $n = 1$, third-order approximation of J_{∞} is achieved.

The above theorem has been established by Kokotovic and Cruz [8] for optimal linear systems and extended by Werner and Cruz [9] to optimal nonlinear systems with nonquadratic functionals.

2. An Example

Let be a torque control system for a d.c. motor. The system equations are [10] :

$$J_L \frac{d^2(\delta\theta)}{dt^2} + B_L \frac{d(\delta\theta)}{dt} = \frac{K_i E}{R_a} i - \frac{K_i K_b}{R_a} \frac{d(\delta\theta)}{dt} \quad (29)$$

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f,$$

where :

J_L is the load momentum.

$\delta\theta$ is the angular error.

$\delta\omega = \dot{\delta\theta}$ is the error of angular speed.

B_L is the loss friction coefficient.

K_i is the torsion coefficient.

L_f is the field inductance.

R_f is the field resistance.

e_f is the field voltage.

E is the armature voltage.

R_a is the armature resistance.

K_b is the electro-motive force (e.m.f.).

The nonlinear term is due to the motor magnetization.

The state equations are :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - \varepsilon x_2 x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= a_{33}x_3 + b_3 u. \end{aligned} \quad (30)$$

where : $x_1 = \delta\theta$; $x_2 = \delta\omega$; $x_3 = i_f$; $u = e_f$; $a_{22} = -\frac{B_L}{J_L}$; $a_{23} = \frac{K_i E}{R_a J_L}$

$$a_{33} = -\frac{R_f}{L_f} ; b_3 = \frac{1}{L_f} ; \varepsilon = \frac{K_i K_b}{J_L R_a}$$

Since R_a has a large value, ε is small enough and the nonlinear term is usually neglected [10]. The performance index, which has to be mini-

mized, is :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_1 x + r_1 u^2) dt$$

The numerical values for this example are :

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varepsilon f(x, u)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.20 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; f = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 & x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}; Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; r_1 = 1$$

$$\varepsilon = 0.20$$

The linear system, i.e. the system with $\varepsilon = 0$ and the corresponding optimal control u^* are :

$$u^* = -R^{-1} B^T K x^* = -x_1^* - 2.12 x_2^* - 0.872 x_3^*$$

$$x_1^* = x_2^*$$

$$x_2^* = -0.2 x_2^* + 2 x_3^*$$

$$x_3^* = -x_1^* - 2.12 x_2^* - 5.872 x_3^*$$

The method described in the previous section has been used to compute the suboptimal control for different initial state conditions. The results are summarized in Table 1.

Table 1

n	Performance index J		
	Initial Conditions x_0		
	$\begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.50 \\ 0.10 \end{bmatrix}$
n = 0	0.2165	1.0724	3.9520
n = 1	0.2162	1.0712	3.9349
Method proposed by Garrard et. al. [10]	0.2288	1.1259	4.0627

It can be seen that the application of the proposed method leads to better results than Garrard's method [10].

Conclusions

In this paper a method has been proposed which provides a procedure for computing a suboptimal control for a class of nonlinear systems. The effectiveness of the procedure is due to the fact that it is iterative. Indeed, for every new approximation, the functions v_{i+1} and β_{i+1} can be computed using only the previous values v_i , ξ_i , α_i , β_i and the current solutions ξ_{i+1} and g_{i+1} .

Furthermore, the method permits the approximation of the optimal performance with the desired accuracy by choosing the number of terms after which the power series expansion is truncated.

Control Systems Department

Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej” Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. Kokotovic, Sannuti — IEEE, vol AC-13, no 4, pp 377, 1968.
2. Kokotovic, Yackel — IEEE, vol AC-17, no. 1, pp 29, 1972.
3. Kelley — AIAA Journal, vol 8, pp 1177 — 1970.
4. Kokotovic, Haddad — IEEE, vol AC-20, no 1, pp 163 — 1975.
5. O'Malley — J. Diff. Eq., vol 12, no 1, pp 117 — 1972.
6. Sannuti, Kokotovic — IEEE, vol AC-14, no 1, pp 15 — 1969.
7. Kalman — Bol. Soc. Mat. Mex. vol 5, pp 102 — 1960.
8. Kokotovic, Cruz — J. Math. Anal. Appl., vol 27, no 2, pp. 249 — 1969.
9. Werner, Cruz — IEEE, vol AC — 13, no 6, pp 621 — 1968.
10. Garrard, Mc. Clamroch, Clark — Int. J. Control, vol 5, no 5, pp 425 — 1967.

Sinteza unei comenzi suboptimale folosind funcția de senzitivitate

Metoda prezentată propune extinderea unei proceduri de sinteză a comenzilor suboptimale pentru o clasă de sisteme neliniare cu indice de performanță pătratic. Legea suboptimală obținută se prezintă sub forma unei serii de puteri ai cărei coeficienți se calculează iterativ, utilizându-se funcțiile de sensibilitate ale sistemului.

Lucrarea conține un exemplu de aplicare a metodei în cazul unui sistem optimal de reglare a unui motor de c.c. și rezultatele obținute sînt superioare unor metode similare prezente în literatură.

$\begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.50 \\ 0.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \\ 0.10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.10 \\ 0.10 \end{bmatrix}$	
0.0500	1.0704	0.2165	$n = 0$
0.0400	1.0704	0.2165	$n = 1$
1.0000	1.1350	0.2388	Method proposed by Garrard et al. [10]

C.Z.: 681.3.04

CALCULATOARE**MACROPROCESORUL TRAC***

EUGENIA KALISZ, P. DIMO

Lucrarea prezintă macroprocesorul universal TRAC (Text Reckoner and Compiler) și facilitățile oferite de acesta pentru prelucrarea șirurilor de caractere; sint incluse o descriere sintactică și câteva exemple de utilizare a macroprocesorului.

Introducere

Macroprocesorul TRAC (Text Reckoner and Compiler) reprezintă un macroprocesor universal ale cărui specificații au fost elaborate în 1960 de C. Mooers și a fost implementat prima dată în 1964 de P. Deutsch.

Macroprocesorul poate fi privit ca un evaluator de funcții, avînd domeniul de definiție și domeniul de valori în mulțimea șirurilor de caractere. Funcțiile pe care le evaluează sint funcții substitutive, evaluarea unei asemenea funcții avînd ca rezultat direct substituția șirului de caractere care reprezintă apelul funcției printr-un alt șir de caractere — șirul rezultat. De asemenea, în anumite cazuri, evaluarea unei funcții poate determina și unele efecte laterale.

1 Caracteristicile macroprocesorului TRAC

Macroprocesorul TRAC utilizează ca unitate de prelucrare linia TRAC, reprezentată de o secvență de caractere, încheiată printr-un caracter special, denumit terminator, pe care îl vom nota τ . Alegerea concretă a acestui caracter depinde de implementare. Un program TRAC va fi format din una sau mai multe linii TRAC.

* Manuscris predat redacției la data de 25 iunie 1977

Dintre caracterele care pot apare în cadrul unei linii TRAC, anumite caractere au semnificații speciale și de aceea sint denumite „caractere speciale”. Acestea sint :

() , τ

Caracterele speciale permit identificarea elementelor componente ale liniei TRAC, conform definiției sintactice din figura 1.

<linie TRAC>	: : = <șir> τ
<șir>	: : = <element> <element> <șir>
<element>	: : = <car> <șir pasiv> <șir apel activ> <șir apel neutru>
<car>	: : = orice caracter în afară de cele speciale
<șir pasiv>	: : = (<șir interior>)
<șir interior>	: : = <succesiune int> <succesiune int> <șir interior>
<succesiune int>	: : = (<succesiune int> <elem. int> <elem. int> <succesiune int>
<elem. int>	: : = <car> # ,
<șir apel activ>	: : = # (<corp apel>)
<șir apel neutru>	: : = # # (<corp apel>)
<corp apel>	: : = <funcție fără argumente> <funcție cu argumente>, <listă argumente>
<listă argumente>	: : = <șir> <șir>, <listă argumente>

Fig. 1. Descrierea sintaxei TRAC în forma normală Backus (BNF)

Prelucrarea unei linii TRAC este efectuată de către macroprocesor caracter cu caracter, fiecare element identificat în cadrul liniei fiind substituit prin șirul de caractere rezultat în urma evaluării elementului respectiv.

Șirul rezultat este fie supus explorării, fie copiat într-un șir denumit *șir neutru*. Șirul de caractere care urmează a fi explorat la un moment dat va fi denumit *șir activ*.

La începutul prelucrării unei linii TRAC șirul activ este reprezentat de șirul din linia respectivă, iar șirul neutru este vid.

Modul în care se modifică șirul activ și cel neutru în urma evaluării unui element identificat în linia TRAC este prezentat în figura 2.

Prelucrarea liniei se încheie în momentul în care șirul activ devine vid, rezultatul prelucrării fiind reprezentat de șirul neutru.

Evaluarea apelurilor funcțiilor TRAC (denumite și *primitive*) determină prelucrări complexe ale șirurilor de caractere reprezentând argumente, ca și unele efecte laterale.

Evaluarea unui apel de funcție TRAC este precedată de evaluarea șirurilor care reprezintă argumentele sale, deci în cazul în care acestea

conțin la rîndul lor apeluri de funcții, se va trece la evaluarea argumentelor acestora din urmă, ș.a.m.d.

Înainte de evaluare		după evaluare	
șirul neutru	șirul activ	șirul neutru	șirul activ
N	<car> A	N <car>	A
N	<șir pasiv> A	N <șir interior>	A
N# (<corp apel>	) A	N	<șir rez> A
N## (<corp apel>	) A	N <șir rez>	A

N, A — șiruri de caractere

<șir rez> — șirul rezultat în urma evaluării unui apel de funcție

Fig. 2. Evaluarea elementelor liniei TRAC

Evaluarea unui apel de funcție în curs de prelucrare se va efectua în momentul în care în șirul activ este detectată acea paranteză închisă care indică sfîrșitul apelului.

În fiecare implementare există un set finit de funcții TRAC, pentru fiecare funcție în parte fiind impuse identificatorul, ca și anumite restricții cu privire la numărul argumentelor și uneori și cu privire la forma acestora.

2. Descrierea funcțiilor (primitivelor) TRAC

În cele ce urmează vor fi prezentate principalele funcții TRAC și vor fi descrise prelucrările determinate de evaluarea apelurilor acestora. RS — *Read String* — funcție fără argumente, care permite citirea unor linii TRAC ca „date” ale unui program TRAC.

Evaluarea unui apel al acestei primitive are ca rezultat șirul „citit”, reprezentat de șirul din linia TRAC imediat următoare celei care conține apelul.

PS — *Print String* — funcție cu un singur argument, reprezentat de un șir de caractere care urmează a fi tipărit. Apelul acestei primitive se substituie, în urma evaluării, prin șirul vid.

O categorie importantă de funcții TRAC o formează cele care permit utilizatorului definirea și prelucrarea unor șiruri de caractere numite *definiții*. Deoarece evaluarea acestora poate determina prelucrări complexe, definițiile pot fi privite ca funcții definite de utilizator.

O definiție este caracterizată prin trei elemente:

- nume — șir de caractere care permite identificarea definiției
- corp — șir de caractere asupra căruia se pot efectua diverse prelucrări
- indicator de caractere — IC — indicator asociat corpului definiției, care are rolul de a identifica un anumit caracter din șirul care reprezintă corpul definiției

Toate funcțiile TRAC care operează cu definiții au ca prim argument numele definiției cu care se lucrează.

DS — *Define String* — funcție cu două argumente, care determină crearea unei definiții cu numele și corpul reprezentate de șirurile argumente. La crearea unei definiții indicatorul de ca-

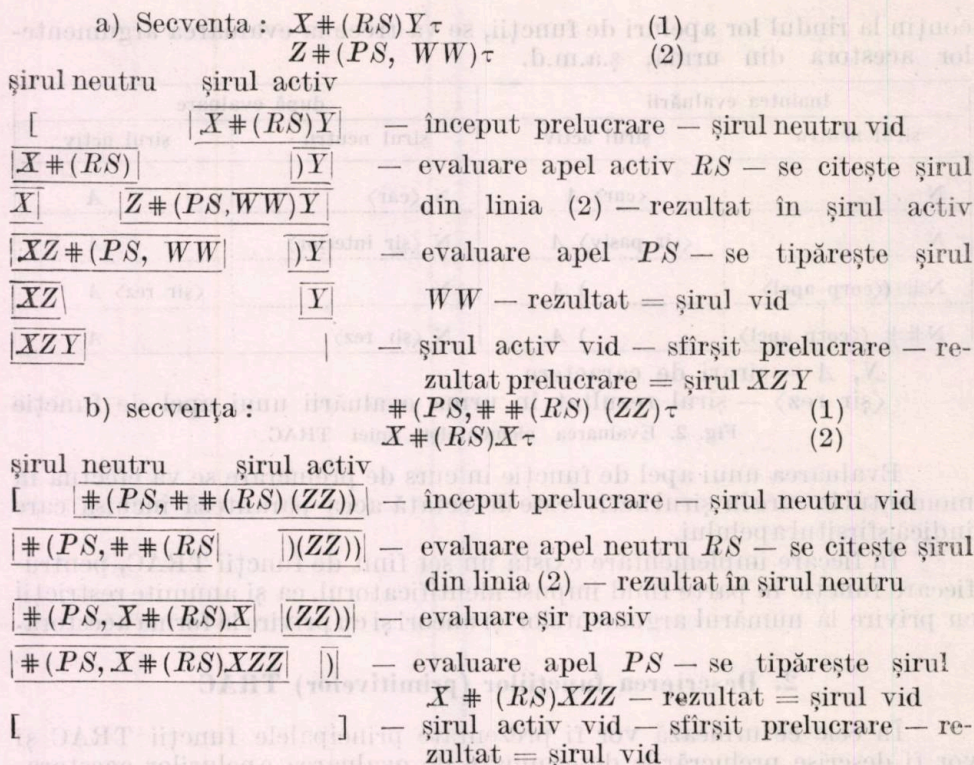


Fig. 3. Etapele prelucrării unor secvențe de linii TRAC

ractere (IC) este poziționat astfel încât să indice primul caracter al corpului definiției.

Șirul rezultat în urma evaluării unui apel al primitivei DS este șirul vid.

SS — *Segment String* — funcție cu două sau mai multe argumente care determină parametrizarea (segmentarea) unei definiții, în vederea activării ulterioare cu argumente. Apelul acestei primitive este de forma :

$$\# (SS, \text{nume}, p_1, p_2, \dots, p_k) \text{ cu } p_i \text{ — parametri.}$$

Parametrii reprezintă șiruri de caractere care, ori de câte ori apar în corpul definiției, sînt înlocuite prin *indicatori de parametru* (ip_i). Înlocuirea parametrilor prin indicatori de parametru se face în ordinea enumerării lor — întii toate aparițiile p_1 , apoi toate aparițiile p_2 , ș.a.m.d. Modul de reprezentare a indicatorilor de parametru depinde de implementare.

În urma parametrizării corpul definiției apare divizat în *segmente*, separate prin indicatorii de parametru.

Apelul primitivei SS se substituie prin șirul vid.

CL — *Call* — funcție cu unul sau mai multe argumente, care determină activarea unei definiții. Apelul acestei primitive are forma :

$$\# (CL, \text{nume}, a_1, a_2, \dots, a_m) \text{ cu } a_i \text{ — argumente}$$

Rezultatul evaluării unui astfel de apel este reprezentat de corpul definiției apelate (activate), în care indicatorii de parametru au fost substituiți prin șirurile de caractere reprezentând argumente — astfel, argumentul a_1 substituie toate aparițiile indicatorului de parametru ip_1 , argumentul a_2 toate aparițiile ip_2 , ș.a.m.d. Indicatorii de parametru cărora nu le corespund argumente (cazurile în care $j > m$) sînt substituiți prin șirul vid.

Argumentele cărora nu le corespund indicatori de parametru sînt ignorate.

Exemplu

Fie secvența de linii TRAC :

#(DS, EX, ACESTA ESTE UN SIR.) τ (1)

#(SS, EX, ESTE, SIR,) τ (2)

#(CL, EX, A FOST, EXEMPLU) τ (3)

În urma evaluării apelului primitivei DS din prima linie este creată o definiție cu numele EX și corpul

ACESTA ESTE UN SIR.

După prelucrarea liniei (2), corpul definiției EX va avea forma modificată :

ACESTA ip_3 ip_1 ip_3 UN ip_3 ip_2 .

unde ip_1 a substituit șirul ESTE,
 ip_2 a substituit șirul SIR,
 ip_3 a substituit caracterul blanc.

Prelucrarea liniei (3) are ca rezultat corpul definiției EX în care se efectuează următoarele substituții :

ip_1 — A FOST

ip_2 — EXEMPLU

ip_3 — șirul vid (deoarece nu există a_3)

obținindu-se șirul

ACESTAA FOSTUNEXEMPLU.

În cazul în care linia (3) ar fi avut forma :

#(CL, EX) τ

rezultatul prelucrării sale ar fi fost reprezentat de șirul

ACESTAUN.

deoarece toți indicatorii de parametru sînt substituiți prin șirul vid, datorită absenței argumentelor din apelul primitivei CL.

CC — Call Character — funcție al cărei apel este de forma :

#(CC, nume, e). Rezultatul evaluării apelului

depinde de poziția indicatorului de caractere (IC) :

— dacă IC indică în afara corpului definiției, rezultatul este reprezentat de șirul e

— în caz contrar rezultatul este reprezentat de caracterul indicat de IC, dincolo de care va fi deplasat IC.

CN — Call N characters — funcție al cărei apel este de forma :

#(CN, nume, n, e) unde n — șir care re-

prezintă o valoare numerică întreagă. Rezultatul evaluării unui astfel de apel este reprezentat de :

— un șir de n caractere din corpul definiției, începînd cu cel indicat de IC (dacă $n < 0$ se consideră caracterele care preced IC), în cazul în care există n caractere disponibile

— șirul e în caz contrar.

CS — *Call Segment* — funcție al cărei apel este de forma

$\#(CS, \text{nume}, e)$ și are ca rezultat :

— șirul e dacă IC indică în afara corpului definiției

— șirul format din caracterele din corpul definiției cuprinse între poziția curentă a IC și următorul indicator de parametru în caz contrar ; IC va fi deplasat dincolo de indicatorul de parametru.

IN — *Initial* — funcție al cărei apel are forma

$\#(IN, \text{nume}, x, e)$ și este substituit prin :

— șirul e dacă șirul reprezentînd argumentul x nu apare în corpul definiției, dincolo de poziția curentă a IC

— șirul format din caracterele cuprinse între poziția curentă a IC și prima apariție a șirului x în cadrul corpului definiției, în caz contrar ; IC va fi deplasat dincolo de șirul detectat.

CR — *Call Restore* — funcție cu un singur argument, reprezentînd numele unei definiții. Evaluarea unui apel al acestei

funcții determină poziționarea IC asociat definiției

pe primul caracter al corpului acesteia. Apelul este substituit prin șirul vid.

DD — *Delete Definition* — funcție cu unul sau mai multe argumente, reprezentînd nume de definiții care urmează

a fi șterse (anulate). În urma evaluării, apelul acestei primitive este substituit prin șirul vid.

DA — *Delete All*

— funcție fără argumente care determină ștergerea tuturor definițiilor create pînă în mo-

mentul evaluării apelului respectiv. Apelul este substituit prin șirul vid.

AD — *Add*

Aceste patru funcții permit efectuarea celor patru

SU — *Subtract*

operații aritmetice între valori numerice întregi,

ML — *Multiply*

reprezentate de șirurile de caractere care consti-

DV — *Divide*

tuie primele două argumente ale apelului acestor

funcții, apel care are forma generală : $\#(f, v_1, v_2, dep)$ unde dep este șirul

care substituie apelul în cazul în care apare depășire sau împărțire cu zero.

În caz contrar apelul este substituit prin șirul de caractere care reprezintă valoarea obținută în urma efectuării operației aritmetice respective.

GR — *Greater* — funcție cu patru argumente, dintre care primele două reprezintă valori numerice întregi, iar ultimele două

șiruri oarecare. Apelul acestei funcții este de forma

$\#(GR, v_1, v_2, s_1, s_2)$ și este substituit prin :

— șirul s_1 dacă $v_1 > v_2$

— șirul s_2 în caz contrar.

EQ — *Equal*

— funcție cu patru argumente, reprezentate de șiruri de caractere oarecare. Evaluarea apelului acestei pri-

mitive, care este de forma

$\#(EQ, s_1, s_2, s_3, s_4)$ are ca rezultat :

— șirul s_3 dacă șirurile s_1 și s_2 sînt identice

— șirul s_4 în caz contrar

Primitivele TRAC prezentate în cele ce urmează facilitează depănarea programelor TRAC.

Apelul acestora se substituie, în urma evaluării, prin şirul vid.

PF — *Print Form* — funcţie cu un singur argument, reprezentând numele unei definiţii al cărei corp urmează a fi tipărit, punându-se în evidenţă indicatorii de parametru care apar în cadrul acestuia.

LN — *List Names* — funcţie cu un singur argument. Evaluarea unui apel al acestei primitive determină tipărirea numelor tuturor definiţiilor existente în momentul evaluării, fiecare nume fiind precedat de şirul de caractere care reprezintă argumentul din apelul respectiv.

TN — *Trace oN* Aceste primitive determină setarea şi respectiv

TF — *Trace oFf* resetarea modului „TRACE”, mod de lucru în care, ori de câte ori este evaluat un apel de primitivă, sint furnizate informaţii cu privire la apelul respectiv — identificarea primitivă, argumentele din apel — şi la rezultatul obţinut în urma evaluării.

În afara primitivelor prezentate, într-o implementare concretă a macroprocesorului TRAC, pot fi introduse şi alte funcţii (primitive), definite astfel încît să faciliteze rezolvarea problemelor ridicate de aplicaţiile pentru care este destinată implementarea respectivă.

Astfel, ar putea fi introduse facilităţi de schimb de informaţii cu memoria auxiliară sau facilităţi de prelucrare a vectorilor logici (şirurilor de cifre binare), care să includă operaţiile reuniune, intersecţie, deplasare, deplasare circulară.

3. Utilizarea definiţiilor recursive

Posibilitatea creării şi utilizării unor definiţii recursive are o deosebită importanţă în efectuarea unor prelucrări complexe.

În cazul unei definiţii recursive trebuie satisfăcute următoarele cerinţe :

— să existe posibilitatea testării condiţiei de terminare a apelului recursiv, posibilitatea oferită în TRAC de funcţiile *GR* şi *EQ*

— apelul recursiv să fie iniţiat după testarea condiţiei de terminare, ceea ce face necesară evaluarea unor argumente ale apelului funcţiilor *GR* şi *EQ* după evaluarea apelului respectiv. Aceasta se poate realiza utilizînd şiruri pasive.

Exemplu

În acest exemplu este prezentată o definiţie recursivă — *NC* — a cărei activare permite numărarea caracterelor din corpul unei alte definiţii, al cărei nume este dat ca argument.

Crearea definiţiei *NC* şi parametrizarea sa este determinată de următoarea secvenţă de linii TRAC :

$\#(DS, NC, (\#(EQ, \# \#(CC, DEF, NU), NU, O, (\# \#(AD, 1,$

$\#(CL, NC, DEF),)))) \tau$

$\#(SS, NC, DEF) \tau$

definiții utilizate

n u m e

c o r p

NC $\#(EQ, \# \#(CC, ip_1, NU), NU, O, (\# \#(AD, 1, \#(CL, NC, ip_1))))$

X AB

șirul neutru

șirul activ

I

$\#(CL, NC, X)$

apel cu
rezultat =

corpul definiției NC în care X a înlocuit ip_1

I $\#(EQ, \# \#(CC, X, NU), NU, O, (\# \#(AD, 1, \#(CL, NC, X))))$

apel cu rezulta-
tul A

rezultat evaluare șir
pasiv = arg. 4

apel activ EQ — arg. 1 și 2 nu sînt identice,
deci rezultatul va fi reprezentat de arg. 4

I

$\# \#(AD, 1, \#(CL, NC, X))$

$\# \#(AD, 1,$

trec în apel cu
șirul neutru rezultatul

$\#(EQ, \# \#(CC, X, NU), NU, O, (\# \#(AD, 1, \#(CL, NC, X))))$

apel cu rezultatul B rezultat evaluare șir pasiv = arg. 4

apel activ EQ cu rezultatul = arg. 4

$\# \#(AD, 1,$

$\# \#(AD, 1, \#(CL, NC, X)),$

$\# \#(AD, 1, \# \#(AD, 1,$

trec în apel cu
șirul neutru rezultatul

$\#(EQ, \# \#(CC, X, NU), NU, O, (\# \#(AD, 1, \#(CL, NC, X))))$

apel cu rezultatul NU rezultat evaluare șir pasiv = arg. 4

apel activ EQ — arg. 1 și 2 sînt identice, deci rezultatul va fi reprezentat
de arg. 3

$\# \#(AD, 1, \# \#(AD, 1,$

$0),)$

apel neutru AD cu rezultatul $1 + 0 = 1$

apel neutru AD cu rezultatul $1 + 1 = 2$

[2]

Fig. 4. Etapele prelucrării liniei $\#(CL, NC, X)$

în urma prelucrării căreia corpul definiției va avea structura

$$\#(EQ, \# \#(CC, ip_1, NU), NU, O, (\# \#(AD, 1, \#(CL, NC, ip_1))))$$

Dacă se consideră o definiție cu numele X și corpul AB , în urma prelucrării liniei

$$\#(CL, NC, X) \tau$$

se va obține ca rezultat șirul 2. Etapele prelucrării sînt ilustrate în figura 4.

Concluzii

Deși oferă mai puține posibilități decît alte macroprocesoare (STAGE2, SPGF, etc.) destinate îndeosebi scrierii programelor de sistem, macroprocesorul TRAC permite, datorită unei mari varietăți de primitive, elaborarea relativ ușoară a unor „programe” complexe de prelucrare a șirurilor de caractere — translatoare, editoare, programe de validare, preprocesoare pentru limbaje de programare evaluate, etc.

Prin aceasta macroprocesorul TRAC se dovedește de mare utilitate atît în activitatea didactică, cît și ca instrument ajutător în activitatea de elaborare a unor produse de programare.

Catedra de calculatoare

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București
I.I.R.U.C.

BIBLIOGRAFIE

1. *P. J. Brown*, *Macroprocessors and Techniques for Portable Software* — John Wiley & Sons, 1974
2. *J. E. Sammet*, *Programming Languages: History and Fundamentals* — Prentice-Hall, 1969
3. *P. Wegner*, *Programming Languages, Information Structures and Machine Organization* — Mc Graw Hill, 1968

The Macroprocessor TRAC

This paper presents the general purpose macroprocessor TRAC (Text Reckoner and Compiler) and its facilities for character string processing; a syntactic definition and several examples of macroprocessor's use are included.

ASUPRA UNOR OPERAȚII NECESARE ÎN PRELUCRAREA AUTOMATĂ A INFORMAȚIEI CONȚINUTE ÎN IMAGINI*

M. VÂRTOSU, P. ALEXANDRU DAN, A. VILD — MAIOR,

Se prezintă câteva operații de bază în prelucrarea cu ajutorul calculatorului a informației referitoare la obiectele conținute în imagini, relevându-se scheme logice originale utilizate de autori în vederea izolării obiectelor din imagini binare și obținerii unor caracteristici riguros definite: scheletul și conturul obiectelor.

Introducere

Sînt tot mai numeroase cazurile în care, în industrie, comunicații, medicină, explorări spațiale și alte domenii, se apelează la prelucrarea automată a informației din imagini (1). Cele mai frecvente aplicații vizează identificarea unor obiecte conținute în imaginile de prelucrat, acestea fiind în general multe la număr sau înregistrate în condiții care le-au afectat calitatea.

Practic, procesul de identificare a obiectelor componente unei imagini necesită trei etape: *traducerea* informației optice în semnale electrice, *prelucrarea* informației astfel obținute în vederea deciziei, și, în fine, *decizia* asupra apartenenței uneia sau altelea dintre entitățile detectate în figură la o clasă dintre cele presupuse a fi reprezentate în imagine (fig. 1). O importanță deosebită capătă etajul de prelucrare a informației, luînd în considerare dimensiunea vectorului-imagine, ale cărui componente — eșantion sînt determinate de valorile nivelului de gri în elementele rețelei rectangulare în care se divide imaginea conținînd obiectul de recunoscut (spre exemplificare, în fig. 2 se prezintă o imagine și vectorul corespunzător).

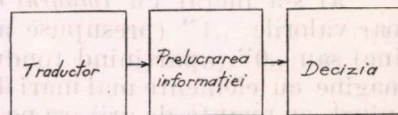
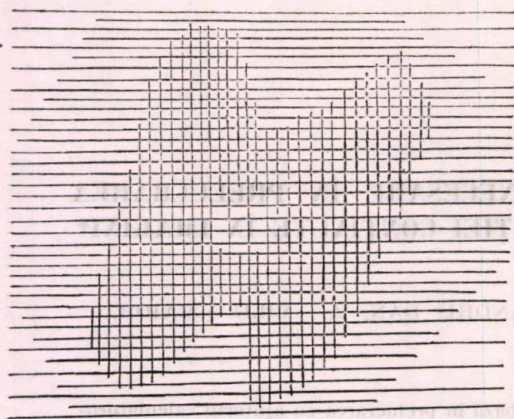


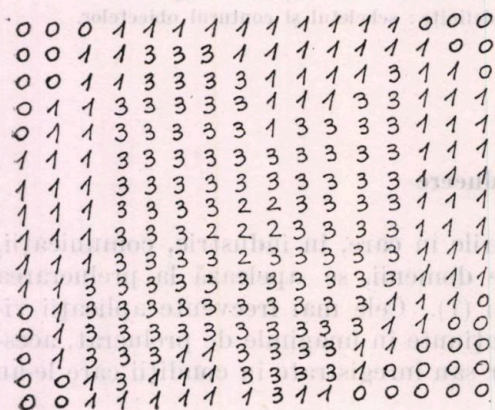
Fig 1

* Manuscris predat redacției la data de 26 aprilie 1975

tor într-o rețea rectangulară, cu $m = n = 16$ și un număr de 4 nivele de gri). Fie i indicele liniilor și j indicele coloanelor, iar h pasul rețelei. Ope-



a)



b)

Fig. 2

a) s-a lucrat cu *imagini alb-negru*, componentele vectorului luind doar valorile „1” (presupuse a aparține obiectelor conținute în imagine) sau „0” (aparținând fondului imaginii); evident din orice vector — imagine cu elemente mai mari decât „1” (corespunzând unor imagini mult nivel, cu nuanțe de gri), se poate obține, printr-o tehnică de discriminare de prag, eventual adaptivă, o imagine binară.

b) dintre cele trei situații posibile (*obiecte distincte*, obiecte vecine, obiecte suprapuse), s-a abordat doar primul caz, în care fiecare element al vectorului — imagine aparține unui singur obiect dintre cele conținute de imagine sau fondului acesteia, nefiind în același timp, vecin al vreunui element aparținând unui alt obiect din imagine. Există și tehnici de separare a obiectelor vecine sau suprapuse (4).

Se impune, de altfel, precizarea noțiunii de *vecinătate*, în contextul rețelei rectangulară pe baza căreia se eșantionează imaginea. Uzual, se

operația de prelucrare urmărește în primul rând înlocuirea vectorului — imagine inițial (cu dimensiunea $m \times n$), printr-un vector cu mult mai puține componente, care înglobează, însă, o cantitate de *informație necesară și suficientă* pentru decizia corectă. Astfel, procesul de decizie are loc mai rapid, fără a afecta calitatea recunoașterii.

1. Caracteristici generale ale experimentelor de prelucrare a informației din imagini

Uzual, imaginile conținând obiecte de izolat și identificat pot avea, datorită a diverși factori perturbatori, o serie de defecte care afectează nemijlocit vectorul — imagine și implicit, eronează procesul de recunoaștere.

Vom presupune că aceste defecte au fost deja înlăturate printr-una din metodele corespunzătoare (2), (3).

De asemenea, vom face o serie de precizări privind condițiile îndeplinite de imaginile prelucrate experimental:

de memorie s-au redus la aproximativ 70 %, afișază succesiv valorile simbolizate prin cifre, care reprezintă numărul valului respectiv și, în final, forma și scheletul obiectului.

Programul cuprinde două subrutine : *definirea valurilor*, respectiv *identificarea elementelor aparținând scheletului*.

Este evident din analiza imaginilor rezultante pentru obiecte cu sau fără contururi interioare (fig. 5 și 6) că scheletul păstrează, în doar

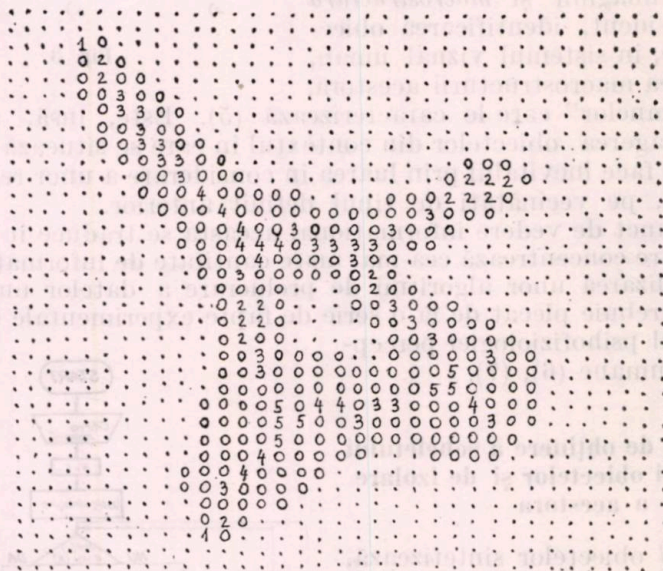


Fig. 5

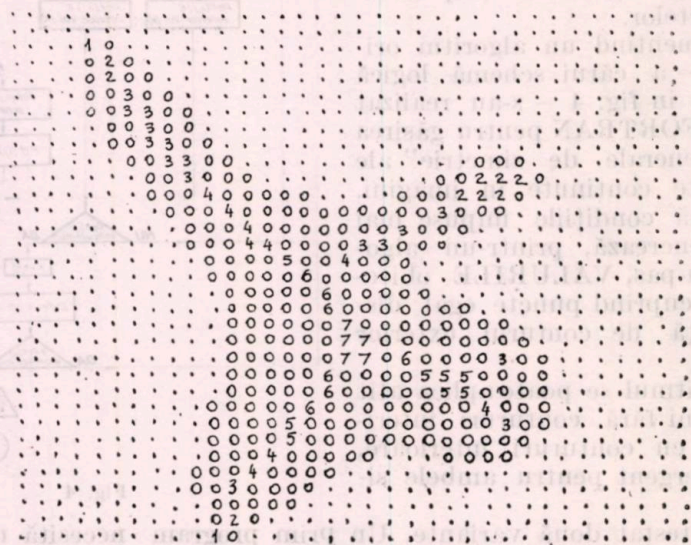


Fig. 6

20—25% din elementele obiectului, caracteristicile generale de formă ale obiectelor. Timpii de rulare se situează în jurul a 50 secunde.

S-a lucrat cu vecinătatea în romb (pentru elementul i, j , aceasta înseamnă elementele $(i-1, 1); (i, j-1); (i+1, j); (i, j+1)$ ($h=1$).

Conturul obiectelor constituie în accepțiunea generală, regiunea de contrast maxim între entitățile conținute în imagine și fondul imaginii, constituind variabila psihofizică principală necesară pentru detașarea obiectelor de fond și discriminarea între ele (9).

În modelul definit anterior, *element de contur* este un element care are în vecinătatea de tip romb cel puțin un element nul; dacă nu are nici unul, este *element interior* al obiectului. Vom presupune că obiectele testate nu au contururi interioare.

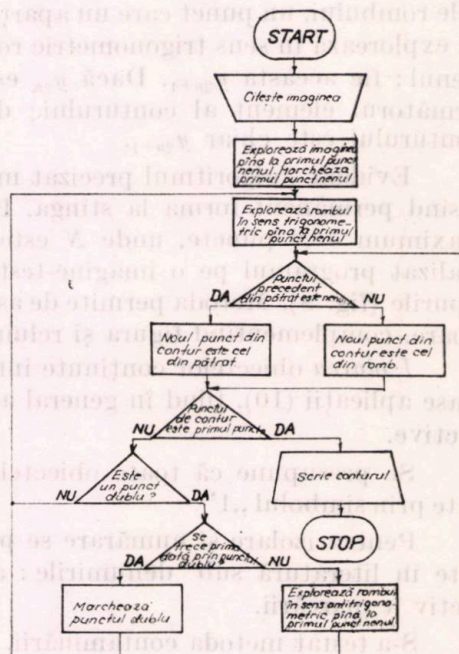
Dacă M este o submulțime de elemente nenule ale imaginii, vom spune că este *conexă* dacă pentru orice A și B , $A \cup B = M$, $A \cap B = \emptyset$, există un $x \in A$ și un $y \in B$, încît $d(x, y) = h$, unde $d(\alpha, \beta)$ este distanța între elementele imaginii α , respectiv β , iar pasul rețelei rectangulare de eșantionare a imaginii h .

Numim *punct de aderență* a al mulțimii conexe M acel punct care îndeplinește: $a \in M$ și există cel puțin un $x \in M$ încît $d(a, x) = h$, adică a aparține vecinătății (de tip romb) măcar a unui element din M . S-a eliminat prin ipoteză posibilitatea existenței unor puncte de aderență, presupunându-se anterior că obiectele din imagine sînt complet izolate.

Pentru a evita intrarea algoritmului într-un ciclu nesfîrșit s-a definit noțiunea de *multiplicitate* a elementelor de imagine aparținînd conturului obiectelor. Multiplicitatea M a unui element de contur este numărul de treceri prin elementul respectiv necesar la o parcurgere completă a conturului. Evident, într-o rețea rectangulară, $M = (1, 2)$.

Programele CONTUR scrise, — a căror schemă logică se prezintă în fig. 7, — apelează la două subrutine: *definirea elementului* de contur se află la momentul τ cel ce parcurge conturul, respectiv *explorarea vecinătății* elementului respectiv pentru identificarea următorului element de contur, la tautul $\tau + 1$.

Pentru cazul în care elementul de contur are $M = 1$, se trece direct la etapa a doua; pentru cazul în care $M = 2$ (punct dublu de contur), se analizează în continuare vecinătatea sa. Intuitiv, în rețeaua rectangulară, punctul dublu de contur se recunoaște prin faptul că numai una dintre diagonalele veci-



F.g. 7

nătății sale de tip romb conține puncte ce aparțin forme, elementele situate pe cealaltă diagonală fiind nule (aparțin fondului imaginii).

Dacă diagonală respectivă este verticală, punctul dublu se va numi vertical; dacă este orizontală, se va numi orizontal.

În funcție de poziția relativă a elementului analizat în raport cu cel anterior parcurs, punctul poate fi ascendent sau descendent respectiv dreapta sau stînga. De aceea, punctele duble se pot afla numai într-una din situațiile: vertical-ascendent, vertical-descendent, orizontal-stînga, orizontal-dreapta (fig. 8). Prin testarea vecinătății, se identifică natura punctului și se trece la etapa următoare; se elimină astfel, spre deosebire de alte programe asemănătoare, posibilitatea erorii.

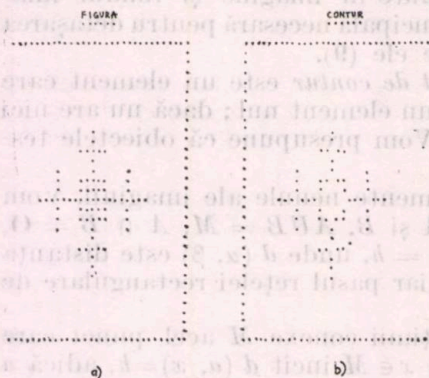


Fig. 8

Cele opt puncte care înconjoară punctul analizat sînt numerotate în sens trigonometric, începînd dintr-un punct al rombului, ($y_1, y_2, \dots, y_8$); punctele rombului sînt în forma y_{2k+1} . Se caută acum printre punctele rombului, un punct care nu aparține obiectului. După găsirea acestuia, se explorează în sens trigonometric rombul punctului pînă la primul punct nenul; fie aceasta y_{2n+1} . Dacă y_{2n} este egal cu 1, el se identifică drept următorul element al conturului; dacă $y_{2n} = 0$, următorul element al conturului este chiar y_{2n+1} .

Evident, algoritmul precizat mai sus permite extragerea conturului lăsînd permanent forma la stînga. Prin implementarea sa se explorează maximum 5 N puncte, unde N este numărul punctelor de contur. S-a realizat programul pe o imagine-test, cuprinzînd puncte duble de toate tipurile (fig. 8). Metoda permite de asemenea, depistarea conturilor interioare, complementînd figura și reluînd explorarea.

Izolarea obiectelor conținute într-o imagine este de interes în numeroase aplicații (10), fiind în general asociată cu numărarea obiectelor respective.

Se presupune că toate obiectele distincte din imagine sînt desemnate prin simbolul „1”.

Pentru izolare și numărare se pot utiliza mai multe metode, cunoscute în literatură sub denumirile: a contaminării, a conturilor, respectiv a marcării.

S-a testat metoda contaminării, cu unele modificări, pe un număr de imagini binare. În implementarea programului SEPARA, — cu schema logică din fig. 9 — a fost necesară utilizarea unei *subrutine de ștergere*, care anulează punctele obiectului deja izolat. Se furnizează imaginile preluate și conturile obiectelor izolate (fig. 10, 11).

De observat că în imaginile testate pentru elementele din prima și ultima linie și coloană s-au luat numai valori nule, din necesități de programare.

Timpii de rulare, ca și la programele SCHELET ȘI CONTUR, depind esențial de numărul total al elementelor din imagine.

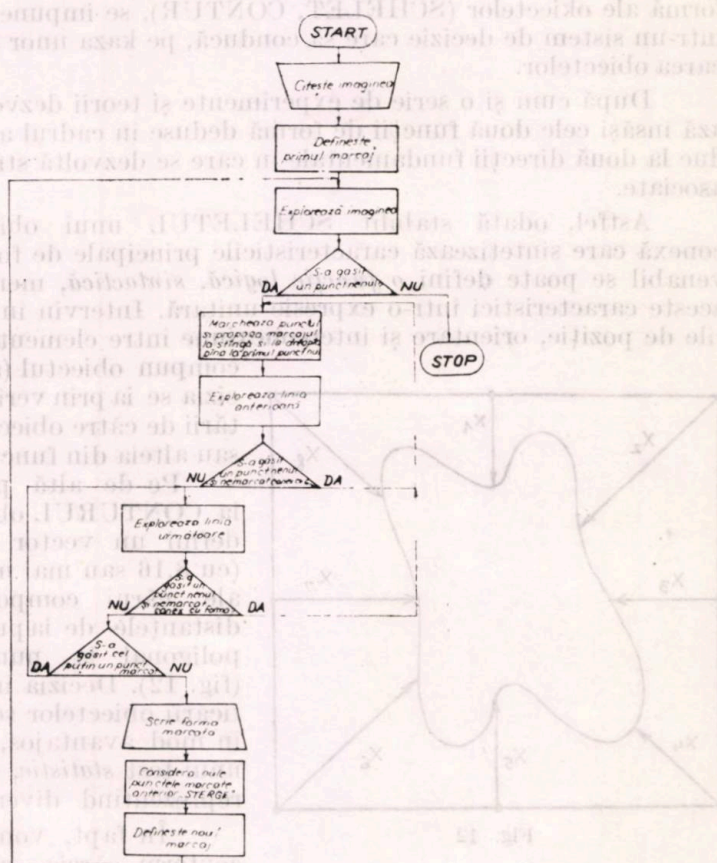


Fig. 9

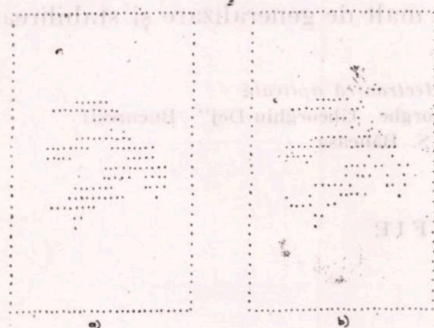


Fig. 10

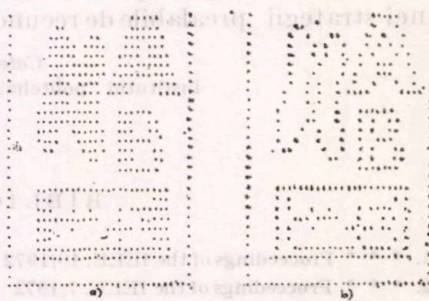


Fig. 11

b. Direcții de aplicare

Prelucrarea informației referitoare la obiectele conținute în imagini este doar prima etapă a procesului de prelucrare automată, în scopul identificării acestor obiecte pe baza caracteristicilor lor de formă.

După îmbunătățirea calității imaginii și stabilirea unor funcții de formă ale obiectelor (SCHELET, CONTUR), se impune așezarea acestora într-un sistem de decizie care să conducă, pe baza unor criterii la identificarea obiectelor.

După cum și o serie de experimente și teorii dezvoltate deja apreciază însăși cele două funcții de formă deduse în cadrul acestei lucrări conduc la două direcții fundamentale în care se dezvoltă strategiile de decizie asociate.

Astfel, odată stabilit SCHELETUL unui obiect, ca mulțime conexă care sintetizează caracteristicile principale de formă, cel mai convenabil se poate defini o funcție logică, sintactică, menită să sintetizeze aceste caracteristici într-o expresie unitară. Intervin în apreciere pelaturile de poziție, orientare și interconexiune între elementele (semnele) care compun obiectul (supersemnul). Decizia se ia prin verificarea implementării de către obiectul testat al uneia sau altelea din funcțiile logice.

Pe de altă parte, pornind de la CONTURUL obiectelor, se poate defini un vector multidimensional (cu 8,16 sau mai multe dimensiuni) ale cărui componente reprezintă distanțele de la punctele unui reper poligonal la punctele conturului (fig. 12). Decizia în vederea identificării obiectelor se ia în acest caz, în mod avantajos, prin intermediul unui test statistic, aplicat vectorilor reprezentând diversele obiecte.

În fapt, vom acorda ideea conform căreia, maniera sintactică

nu diferă de cea statistică, ambele plecând de la conținutul informațional al imaginii și putându-se aplica pe baza fiecăreia din funcții; varianta sintactică presupune un grad mai înalt de generalizare și stabilirea unei strategii prealabile de recunoaștere.

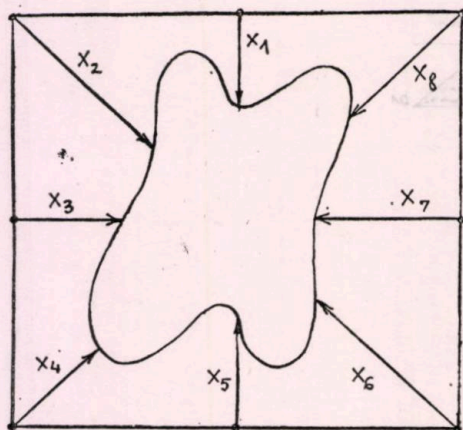


Fig. 12

Catedra de electronică aplicată
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București
I.P.R.S. Băneasa

BIBLIOGRAFIE

1. * * * Proceedings of the IEEE, 10/1972
2. * * * Proceedings of the IEEE, 7/1972
3. * * * IEEE Trans. on Computers, 7/1972

4. Arcelli, C. ș.a., Picture Processing and Overlapping Blobs, IEEE Trans. on Computers, 9/1971.
5. Rosenfeld A. ș.a., IEEE Trans. on Computers, 7/1972.
6. Fry G. ș.a., Amer. J. Physiol., 112, 1935, 414—
7. Mc Culloch C., J. Exp. Psychol., 49, 1955, 141—
8. Vărtosu Mihail., Electronica, Automatica, 1/1975, 16—
9. Young T. Y. ș.a., IEEE Trans. on Information Theory, May 1970, 258—.
10. Ledley R.S., IEEE Trans. on Computers, 7/1972, 740—

**Sur quelques operations nécessaires en traitement automatique de l'information
contenue dans des images**

On présente quelques opérations fondamentales dans l'interprétation des informations à l'aide du computer, concernant les objets contenus par les images, en relevant des schémas logiques originaux utilisés par les auteurs pour isoler les objets des images binaires (numériques) et pour obtenir des caractéristiques rigoureusement définies : la squelette et le contour des objets.

C.Z.: 621.311.003

**ALGORITM PRIVIND OPTIMIZAREA BILANȚURILOR
ENERGETICE ÎN STRUCTURA INGINERIEI SISTEMELOR***

A. CARABULEA, R. ȚENOVICI, C. DUMITRIU

Se prezintă condițiile de construire a modelelor matematice de optimizare a bilanțurilor energetice în structura ingineriei sistemelor.

Se structurează cheltuielile de calcul din modelele de optimizare *pe baza teoriei cercelării operaționale*.

Se precizează modul de elaborare a bilanțurilor reale la nivelul secțiilor de producție și la nivelul întreprinderii.

Se concepe algoritmul optimizării bilanțurilor energetice atît pe baza criteriului de decizie clasic al minimizării cheltuielilor de producție cît și pe baza criteriului „preț umbră”.

Se testează modelul construit pe baza unui set de date reale.

Se elaborează atît bilanțul electroenergetic cît și bilanțul general, aplicînd teoria cazurilor la analiza activității energo-tehnologice din cadrul unei întreprinderi industriale.

Introducere

Construirea bilanțurilor energetice în structura ingineriei sistemelor presupune cunoașterea consumurilor reale de energie, reclamă determinarea pierderilor și presupune corelarea energiei consumate (inclusiv pierderile) cu energia intrată în sistemul de producție analizat.

Bilanțul energetic urmărește coordonarea consumului de energie cu resursa disponibilă precum și evidențierea cauzelor de pierderi în vederea micșorării risipei și creșterii efectului energetic util la nivelul fiecărui utilaj de producție. Această coordonare este mai eficientă dacă se face în structura ingineriei sistemelor.

Acest mod nou de-a aborda problema economisirii energiei din cadrul sistemelor de producție presupune aplicarea în practică a următoarelor idei:

— Parcurgerea lanțurilor energetice în maniera sistemică plecînd de la consumator spre sursă, luînd în considerare toate legăturile care apar atît în interiorul sistemului analizat, cît și a corelațiilor sistemului cu mediul. Concepția sistemică de abordare a fenomenelor din cadrul producției reclamă corelarea problemelor energetice cu cele tehnologice și găsirea unor soluții practice de creștere a gradului de încărcare a utilajelor consumatoare de energie și a lanțurilor energetice ce leagă receptoarele de sursele de alimentare cu energie a întreprinderii analizate. Corelarea disponi-

* Manuscris predat redacției la data de 25 mai 1977

bilului de resurse cu consumul de energie se face atât pe tipuri de purtători (energie electrică, abur, apă caldă, gaze, păcură, combustibil solid etc.) cât și pe nivele de consum (utilaj, secție de producție, întreprindere, ramură, economie națională și economie mondială). Ca o ilustrare a acestor idei în cadrul lucrării de față s-a întocmit bilanțul electroenergetic al

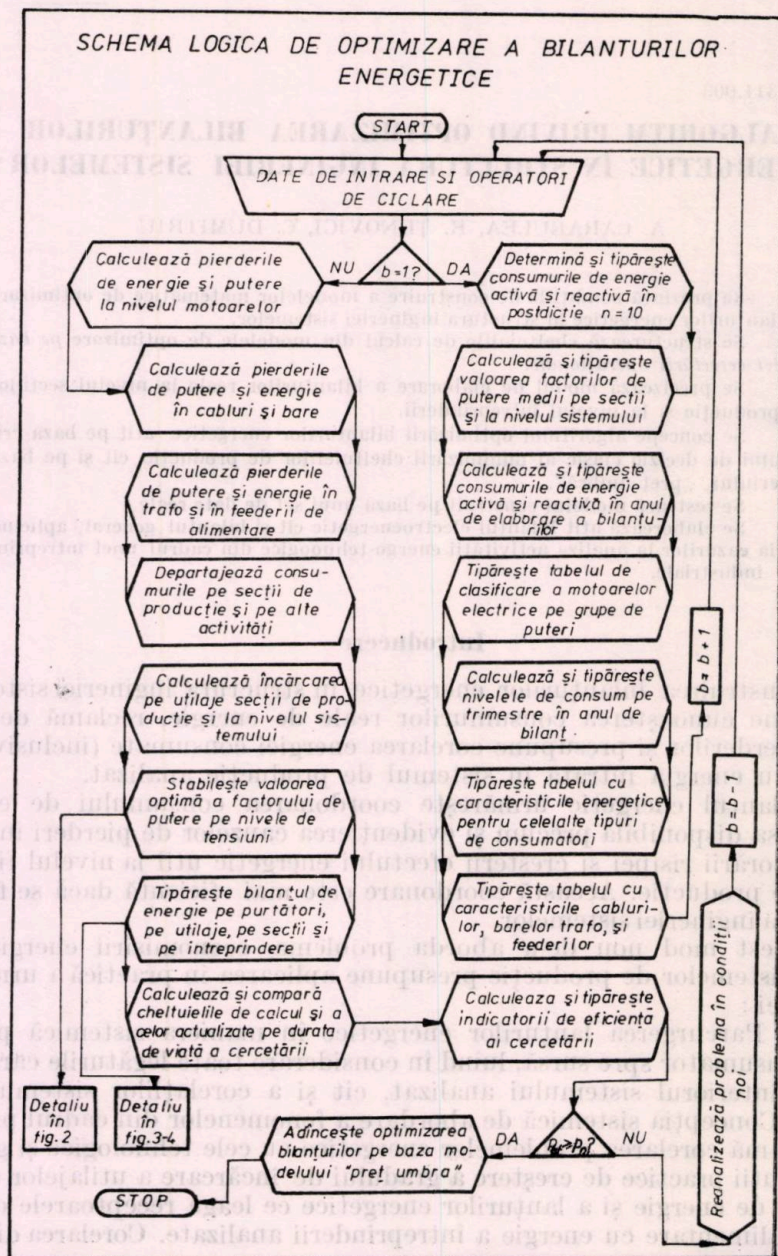


Fig. 1

pot aplica în cadrul fiecărei întreprinderi, fie pe funcții: aprovizionare, producție, personal, financiar-contabil și cercetare-dezvoltare, fie pe ansamblu de activități reunite pe locuri specifice de lucru. Ultima idee de elaborare a modelelor a fost fructificată în cadrul lucrării de față. Modelele matematice elaborate au caracter ierarhic, în sensul că pot îmbrăca fiecare treaptă de consum de energie, începând cu utilajul energo-tehnologic, trecând apoi la secții de producție și la nivelul întregului sistem analizat.

Variabilele din modelele matematice pot fi exprimate fie sub formă de puteri absorbite, fie sub formă de „prețuri umbră”.

În primul caz modelul matematic operează cu funcții de eficiență de tipul cheltuielilor de calcul sau a cheltuielilor totale actualizate pe durata de viață a cercetării. În cazul modelelor matematice bazate pe „prețuri umbră” se utilizează funcții de eficiență de tipul 5—7.

Costurile totale sînt scrise în maniera programelor liniare sau neliniare duale pentru ambele cazuri prezentate.

— Construirea de programe de lucru (schema logică de calcul, algoritmul de calcul scris într-un limbaj accesibil calculatoarelor de mare capacitate) s-a făcut în ideea determinării atît a nivelelor de pierderi cît și a calculării indicatorilor de eficiență (termen de recuperare, coeficient de eficiență, venit anual net, venit pe durata de viață a cercetării etc.).

Scopul lucrării constă în prezentarea algoritmului de optimizare a bilanțurilor energetice reale și trasarea unei linii noi de gîndire și rezolvare a problemelor de energetică din cadrul întreprinderilor industriale. Modele matematice aplicate în cadrul acestei lucrări sînt construite în structura cercetării operaționale și deschid calea către modele de optimizare a activității sistemelor de producție bazate pe „prețuri umbră”.

Datele utilizate la testarea modelelor sînt preluate din cadrul unor întreprinderi industriale pe care autorii împreună cu un grup de studenți le-au cercetat pe durata de viață a studiilor elaborate.

1. Modelul matematic general pentru optimizarea unui bilanț energetic

a — Funcția de eficiență a modelului matematic.

$$1) Z_t = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m [(tc)_{ijklm} x_{ijklm} + p_n \cdot i_{sp}^{sc} x_{ijklm}] = \text{minim}$$

b — Restricțiile tehnologice și funcționale.

$$2) \sum_k \sum_l \sum_m x_{ijklm} \leq E_{ij} \} u + r \quad [\leq]$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k b_{ijklm} x_{ijklm} \leq R_{lm} \} p + s \quad [\leq]$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij} \leq P_{ia} t_{ia} \} d = (1 \dots e) \quad [<]$$

$$\sum_k \sum_l \sum_m x_{klmg} d_{klmg} \leq A_g^V \begin{matrix} [>] A_g^{V \max} \\ [<] A_g^{V \min} \end{matrix},$$

$$x_{ijklm} \geq 0; \quad x_{ij} \geq 0; \quad x_{klmg} \geq 0,$$

în care :

- c_{ijklm} = costul specific al unității fluxului de energie care pleacă de la centrele de alimentare (i) la centrele de consum (j) prin lanțuri tehnologice (k) sub formă de energie utilă electrică (l) și termică (m);
- x_{ijklm} = fluxuri de energie electrică (l) și termică (m) care parcurg lanțurile energetice (k) dinspre centrele de alimentare (i) spre cele de consum (j);
- E_{ij} = energia preluată din sistem din centrele de alimentare (i) și distribuită centrelor de consum (j) pe tipuri de consumatori (r) și forme de energie utilă (u);
- b_{ijklm} = consumul de combustibil necesar producerii unității de energie livrată consumatorilor;
- R_{lm} = resursele de energie pentru acoperirea necesarului de energie la consumator. Indicii (p, s) indică formele de resurse ($m = l, p$) și tipurile de lanțuri energetice ($l = l, s$);
- $P_d t_d$ = energia disponibilă la ora de vîrf la nivelul centrelor de alimentare de putere P_d care funcționează un timp t_d pe durata luată în calcul la optimizarea bilanțului energetic. Indicele (d) indică tipurile de instalații care asigură alimentarea cu energie a sistemului industriei pentru care se face bilanțul.
- t_{ijklm} = durata de funcționare a receptoarelor de energie.

Prețul binom cu care revine energia la consumator se determină astfel :

$$3) \quad a) \quad C_{ijkl} = \frac{C_t^f}{E_{ijkl}} + \frac{C_t^v}{E_{ijkl}} + p_n \frac{I_t^f + I_t^v}{E_{ijkl}}.$$

$$b) \quad C_t^f = A_{ijkl} \cdot P_{ijkl}; \quad C_t^v = p_{ijkl} \cdot E_{ijkl}$$

$$c) \quad C_t = C_t^f + C_t^v = C_{cas} + C_{pp} + C_{im} + C_{pr} + C_{dv}$$

$$d) \quad I_t = I_t^f + I_t^v = I_{cas} + I_{pp} + I_{im} + I_{pr} + I_{dv}$$

în care :

$C_t; I_t$ reprezintă cheltuielile și investițiile totale;

$C_t^f; C_t^v; I_t^f; I_t^v$ reprezintă cheltuielile și investițiile fixe (f) și variabile (v);

$C_{cas}; I_{cas}$ reprezintă cheltuieli și investiții pentru combustibil (c) pentru prevenirea așteptării (a) și pentru stocarea resurselor (s);

$C_{pp}; I_{pp}$ — cheltuieli și investiții pentru producție;

$C_{im}; I_{im}$ — cheltuieli și investiții pentru ingineria umană;

$C_{pr}; I_{pr}$ — cheltuieli și investiții pentru prognoză.

Aceste fonduri vizează cercetarea și dezvoltarea activității din cadrul întreprinderii considerate sistem de producție;

C_{av} ; I_{av} reprezintă cheltuieli și investiții diverse.

În vederea reducerii pierderilor de energie din rețeaua interioară a unei întreprinderi, cauzate de circulația puterii reactive, se compensează factorul de putere cu un model matematic de forma :

$$Z = p^e \cdot E_{rtcs} + (p_{ar} + p_n) i_{sp}^c Q_c^{tc} + p_n (i_{sp}^m E_{rtcs} + i_{sp}^s P_{rtcs})$$

$$E_{rtcs} = E_r + E_t + E_c + E_s; P_{rtcs} = P_r + P_t + P_c + P_s;$$

$$Q_r^t = P_c \cdot \operatorname{tg} \varphi; E_{rtc} = E_r + E_t + E_c;$$

$$P_{rtc} = P_r + P_t + P_c$$

unde :

p^e	reprezintă prețul de cost al energiei;
p_{ar}	— coeficientul pentru amortizări și reparații;
i_{sp}^c	— investiția specifică în sursa de compensare;
Q_c^{tc}	— puterea necesară compensării factorului de putere;
E_{rtcs}	— pierderile de energie și putere în rețea (r), în transformatoare (t) în motoare (c) și în fiderul de legătură cu sistemul (s);
$i_{sp}^m; i_{sp}^s$	— investiția specifică minieră (i_{sp}^m) și investiția specifică în sistem (i_{sp}^s);
P_c	— puterea cerută la consumator.

Modele matematice ale unui bilanț energetic pe baza „prețurilor umbră” scrise în formă primală și duală au următoarea structură :

a) Modelul primal.

$$5) V_p = \sum_j c_j x_j = \max; \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i; (i = 1, n); x_j \geq 0$$

k) Modelul dual.

$$6) Z_p = \sum_i b_i p_i^{\text{umbră}} = \min; \sum_j a_{ij} p_i^{\text{umbră}} \geq C_j; (j = 1, n);$$

$$\max (\sum_j c_j x_j) = \min (\sum_i b_i p_i^{\text{umbră}}).$$

Prețurile optime se determină cu o medie ponderată a valorilor obținute din modelele (5 — 6) cu o relație de forma :

$$7) P_{opt} = \frac{\sum_i p_i^m b_i}{\sum_i p_i^{\text{umbră}} b_i}.$$

în care :

- V_p = volumul producției; c_j = prețul unitar pentru producția obținută; x_j = producția în expresie naturală;
 a_{ij} = consumurile specifice; b_i = cantitatea totală de energie disponibilă;
 Z_p = cheltuielile de producție;
 p_i^{umbra} = prețul umbră reprezintă suma ce trebuie plătită de un sistem industrial pentru o unitate suplimentară din fiecare resursă astfel încât cheltuielile să fie minime cînd se majorează volumul producției;
 p_i^m = prețul pentru unitatea de resursă determinat pe baza cheltuielilor de muncă socialmente necesară.

Modelul matematic construit în structura ingineriei sistemelor reflectă condițiile în care se poate optimiza un bilanț energetic pe baza atât a minimizării cheltuielilor de calcul cît și a maximizării volumului de producție. Algoritmul prezentat cuprinde corelațiile care se impun între regimul de funcționare al întreprinderii și prețul de cost al energiei preluate din sistemul energetic la ora de vîrf. Aceste corelații duc la stabilirea taxelor de putere și energie în structura cercetării operaționale pe funcții ale întreprinderii aplicate sistemic. Tendințele ce rețin atenția specialiștilor în domeniul optimizării bilanțurilor energetice sînt exprimate de modele matematice static și dinamic tip Leontief și de programele liniare primal, respectiv dual care cuprind prețurile „umbră”. Modelul a fost experimentat cu bune rezultate de autori în cadrul studiilor întreprinse la o serie de întreprinderi industriale.

2. Relații operaționale de calcul

Pentru calculul practic al diverselor categorii de pierderi necesare întocmirii bilanțului real s-au utilizat o serie de relații de calcul. În expunerea lor s-a ținut seama de tipurile cele mai întîlnite de consumatori.

a) Determinarea pierderilor de energie în transformatoare

Pierderile de energie activă și reactivă în transformatoare se pot calcula cu relația :

$$\Delta E_{ac} = n (\Delta P_{Fe} + \alpha_m^2 \Delta P_{Cu}) T_f, \quad (\text{kWh}),$$

$$\Delta E_r = n (\Delta Q_{Fe} + \alpha_m^2 \Delta Q_{Cu}) T_f, \quad (\text{kvarh}) \text{ unde :}$$

n reprezintă numărul de transformatoare cuplate în paralel; $\alpha_m = k_f \frac{I_m}{I_n} = k_f \cdot \frac{S_m}{S_n}$, coeficient de încărcare medie a unui transformator; k_f , coeficientul de formă al curbei de sarcină; T_f , timpul de funcționare la sarcina medie (S_m), ΔP_{Fe} , ΔQ_{Fe} , ΔP_{Cu} , ΔQ_{Cu} , pierderile de putere activă și reactivă în fier și cupru ale transformatoarelor.

b) Calculul pierderilor de energie în rețeaua de cabluri a secțiilor și întreprinderii

Pierderile de energie activă s-au calculat ținînd seama că rețeaua este de tip radial (în una sau mai multe trepte). Se pot utiliza două relații de calcul, funcție de posibilitățile de efectuare a măsurărilor.

$$\Delta E_{cab} = 3 \cdot R_{cab} \cdot K_f^2 \cdot I_{med}^2 \cdot T_f, \quad (3Wh),$$

$$\Delta E_{cab} = R_{cab} \cdot K_f^2 \cdot \frac{E_{ac}^2 + E_r^2}{U^2 \cdot T_f}, \quad (3Wh),$$

unde :

R_{cab} — reprezintă rezistența unei faze a cablului ;
 I_{med} — curentul mediu printr-o fază a cablului ;
 E_{ac}, E_r — energiile active și reactive transmise prin cablu într-o anumită durată de timp T .

Pentru calculul pierderilor de energie activă și reactivă în rețeaua de medie tensiune se folosesc expresii analoage.

c) Determinarea pierderilor de energie activă în motoarele de antrenare

Principala categorie de motoare utilizată este formată din motoare de tip asincron cu rotorul în scurtcircuit. Pierderile în astfel de motoare se împart în : pierderi în fier, în cupru și mecanice.

$$\Delta E_{mot} = \Delta E_{Cu} + \Delta E_{Fe} + \Delta E_{mec},$$

Calcularea fiecărei categorii se face cu relațiile :

$$\Delta E_{Cu} = 3 \cdot K_f^2 \cdot I_{med}^2 \cdot R \cdot T_f$$

$$\Delta E_{Fe} + \Delta E_{mec} = (P_0 - 3 I_0^2 R_e) T_f,$$

unde s-au considerat :

R_e — rezistența echivalentă a motorului ;
 I_{med}, I_0 — curenții de sarcină și gol ;
 P_0 — puterea activă absorbită la mers în gol, cu mecanismul cuplat.

Pentru alte tipuri de motoare, relațiile sînt similare.

d) Calculul pierderilor pentru alte categorii de consumatori

În cadrul altor categorii de consumatori, cum ar fi : iluminat incandescent sau fluorescent, cuptoare cu arc sau inducție, reactoare, instalații de redresare etc., calculul pierderilor se aplică diferențiat de la caz la caz, ținînd seama de particularitățile lor constructive și funcționale.

Pe baza celor expuse mai înainte s-a întocmit tabelul de mai jos :

Tabelul 1

Nr. crt.	Categoria de pierderi	MWh	%
1.	Pierderi în cablurile de înaltă tensiune	29,797	0,43
2.	Pierderi în barele de înaltă tensiune	—	—
3.	Pierderi în transformatoare	102,76	1,49
4.	Pierderi în bare de joasă tensiune	7,08	0,1
5.	Pierderi în rețeaua de joasă tensiune	185,119	2,68
6.	Pierderi în motoare electrice	1209,907	17,52
7.	Consum instalații redresoare	20,745	0,3
8.	Consum iluminat	352,045	5,1

3. Indicatorii de eficiență

Rezultatele optimizării bilanțurilor reale, efectuate pe baza modelelor matematice prezentate, au fost apreciate pe baza următorilor indicatori de eficiență economică :

a) *Economia anuală de energie* (E_a)

Acest indicator absolut, reprezintă o primă formă de verificare și alegere a soluțiilor puse în discuție.

b) *Coeficientul de eficiență al activității de cercetare*

$$p_a = \frac{E_a}{C_t} \left(\frac{\text{lei venit}}{\text{lei cheltuit}} \right)$$

unde :

E_a reprezintă valoarea energiei economisită anual în soluția propusă ;

C_t — cheltuielile totale pentru aplicarea noii soluții, ținind seama de costul cercetării, valoarea investițiilor, valoarea reziduală a utilajelor înlocuite și alte cheltuieli.

Costul energiei electrice luate în considerație în calcule trebuie determinat pe baza prețurilor „umbră”.

c) *Termenul de recuperare al cheltuielilor*

$$t_r = \frac{1}{p_a} : \left(\frac{\text{lei cheltuit}}{\text{lei economisiți}} \right),$$

d) *Venit net*

$$V_n = E_a - C_t, \quad (\text{lei/an}),$$

unde :

V_n reprezintă câștigul net al întreprinderii în urma optimizării consumurilor, raportat la primul an de aplicare a măsurilor.

Acest indicator se poate extinde la o perioadă de 5 ani :

$$V'_n = 5 E_a - C'_t,$$

unde :

C'_t reprezintă cheltuielile totale pentru aplicarea soluției noi în timp de 5 ani.

Eficiența soluției alese apare mai clar din raportarea la o perioadă mai mare de un an, deoarece $C'_t < 5 C_t$.

Aprecierea finală a economicității unei soluții trebuie făcută pe baza analizei comparative a tuturor indicatorilor, ținând cont și de politica energetică la un moment dat.

4. Schema generală de calcul

Pe baza modelelor matematice expuse și ținând seama de indicatorii definiți, s-a elaborat un program de calcul a cărui organigramă generală este prezentată în figura 1. Alcătuirea sa se bazează pe o suită de subprograme specializate pe etape de calcul. În prima fază de prelucrare a datelor și măsurărilor este necesară prezența specialistului, care să stabilească structura optimă a programului, pornind de la analiza acestora.

Ținând seama de ponderea mare în cadrul pierderilor de energie a circulației neraționale a energiei reactive, s-a dat o atenție particulară elaborării unui subprogram de optimizare a factorului de putere în interiorul și la barele întreprinderii. Organigrama sa detaliată este prezentată în fig. 2.

5. Rezultatele aplicării programului de calcul

Programul de calcul descris mai sus a fost aplicat cu rezultate bune în cadrul studiilor întreprinse de autori pentru diverse tipuri de întreprinderi (metalurgice) constructoare de mașini, chimice, de industrie ușoară etc.).

Pentru exemplificare în tabelul 1 și în fig. 3 și fig. 4 se prezintă rezultatele și diagramele Sankey ale unor bilanțuri reale și optimizate pentru o întreprindere constructoare de mașini.

În fig. 3 se prezintă bilanțul general al întreprinderii, iar în fig. 4 — bilanțul electroenergetic.

În parantezele pătrate s-au inserat cifrele rezultate din bilanțul real, iar în cele rotunde, variația procentuală a consumului de energie realizat după optimizare. În analiza lor s-a ținut seama și de creșterea producției. În tabelul 2 se prezintă valorile de calcul ale indicatorilor de eficiență economică definiți la punctul 4.

Indicatori de eficiență economică

Tabelul 2

E_t	p_a	t_r	V_n	
			1 an	5 ani
MWh	$\frac{\text{lei economisiți}}{\text{leu cheltuit}}$	$\frac{\text{lei cheltuiți}}{\text{leu economisit}}$	lei	lei
211,33	1,68	0,595	30 000	295 000

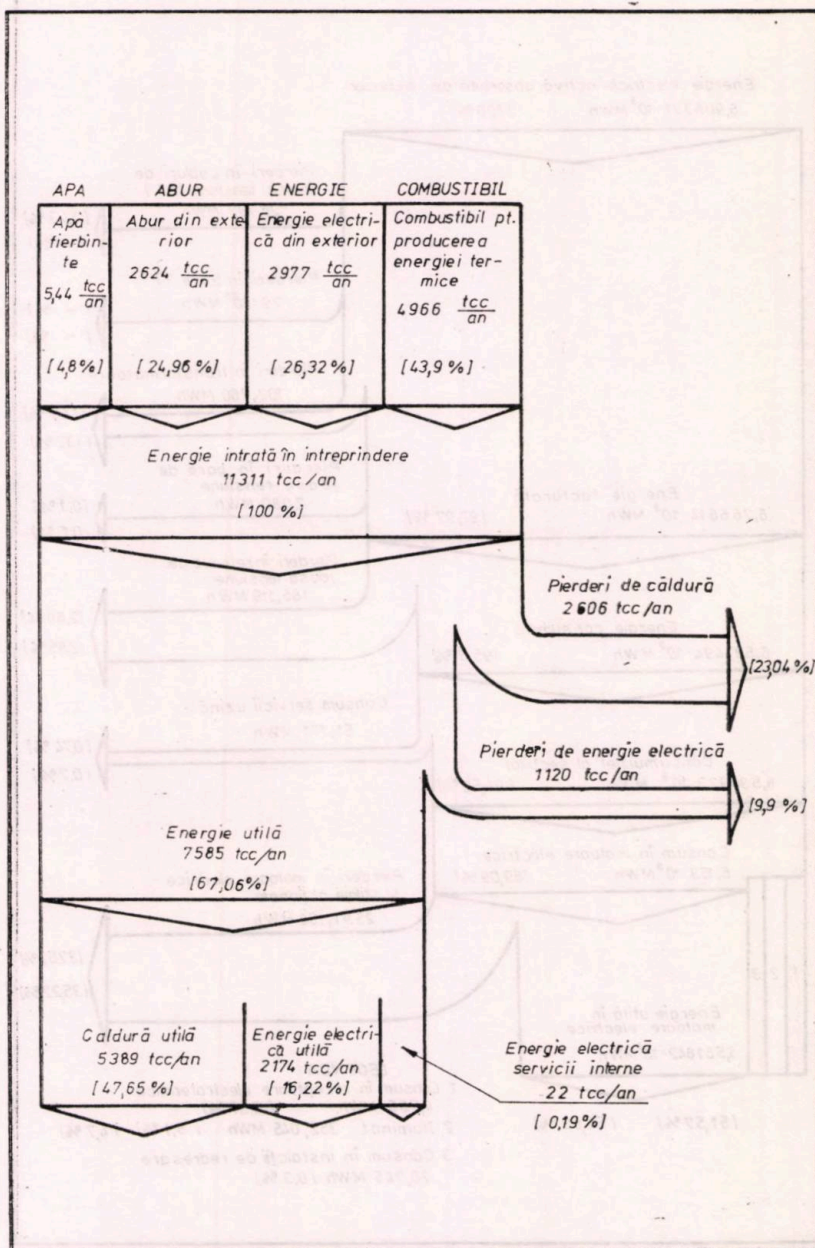


Fig. 3

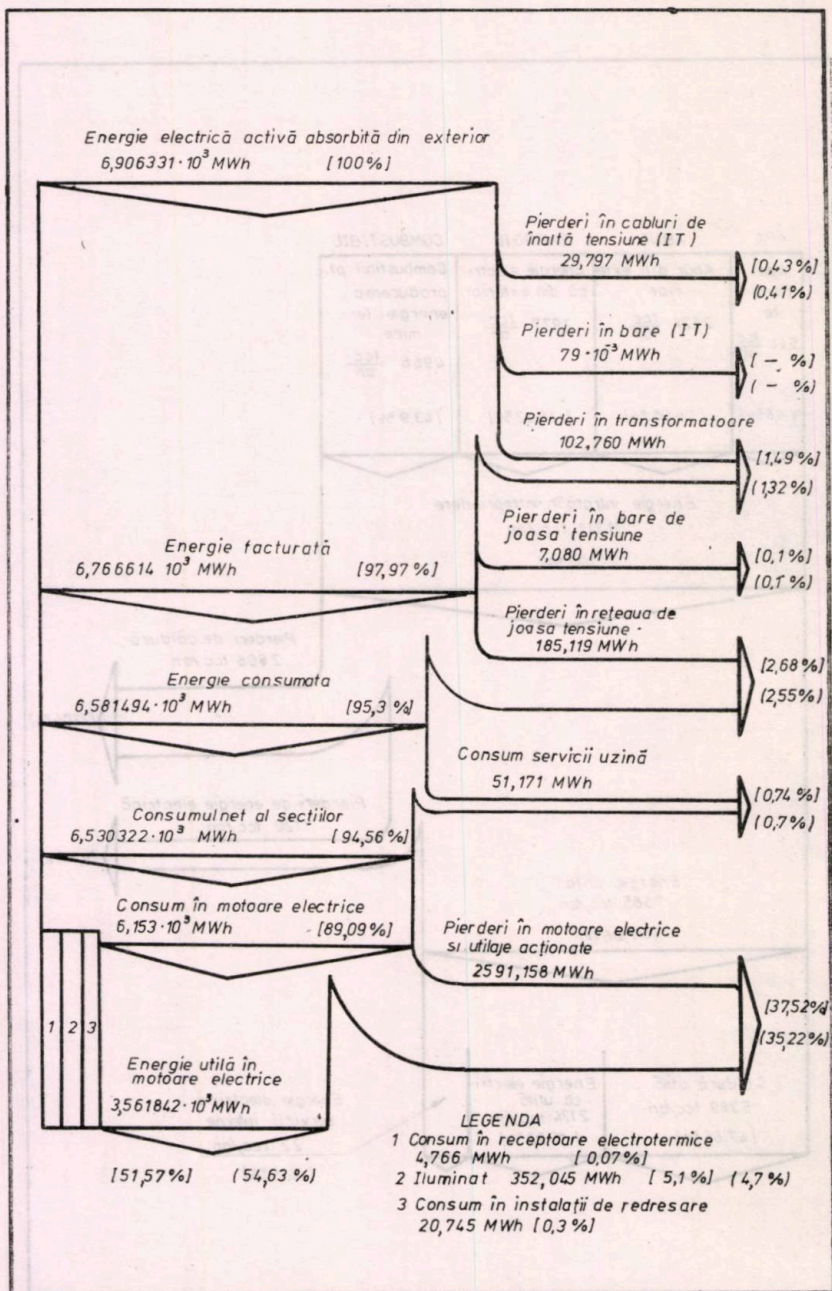


Fig. 4

6. Concluzii

Pentru a obține rezultate cât mai bune în urma optimizării bilanțurilor reale, trebuie analizate aspecte cât mai largi din procesul de producție al întreprinderii.

Optimizarea nu trebuie să se oprească la aspecte pur energetice, ci trebuie să cuprindă și o analiză critică a părții tehnologice.

Este necesară efectuarea bilanțurilor reale și optimizate încă din faza de punere în funcțiune a întreprinderii, deoarece bilanțurile teoretice efectuate în faza de proiectare dau o imagine calitativă nu suficient de precisă.

*Catedra de organizare și conducere industrială
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București*

BIBLIOGRAFIE

1. *Carabulea A., Rușitoru Gh.*, Optimizarea sistemelor de conducere industrială, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976.
2. *Veșenevski S.*, Caracteristicile motoarelor utilizate în acționări electrice, Editura Tehnică București, 1969.
3. * * * Memoratorul inginerului electrician, Editura Tehnică, București, 1971 (traducere din limba germană).
4. * * * Condensatoare în electroenergetică, Editura Tehnică, București, 1967.
5. * * * Decretul 620/1973 publicat în Buletinul Oficial din dec. 1973.
6. *M. Horowitz*, Modelul economic optim, Editura Academiei RSR, București, 1970.
7. *A. Carabulea*, Conceptul de joc matematic aplicat în conducerea sistemelor industriale AMC — nr. 21 (A + B), Editura Tehnică, București — 1976.
8. *A. Carabulea, R. Tenovici, C. Dumitriu*, Bilanțuri energetice reale și optime — București 1973 — 1976.

Synthetic Models of Actual and optimal Energy Balances

Mathematical models for the elaboration of actual energy balances are presented and the method of applying them on various types of plants more frequently in use in practice are indicated.

The algorithm of an optimal balance is built-up by taking into account the new mathematical relations which occur when optimization models are formalized on the ground of operational research.

The experience acquired with the application of such synthetic models for actual and optimal energy balances within production contracts has shown that the efficiency of energy saving in enterprises increases if the computation program is rigorously and systemically applied from the consumer to the source of supply.

ENERGETICĂ

C.Z.: 621.316.052

MODELE SIMPLIFICATE PENTRU STUDIUL STABILITĂȚII LA MICI PERTURBAȚII A SISTEMELOR ELECTRICE PRIN METODA MODALA*

MIRCEA EREMIA

Lucrarea prezintă definirea unor modele simplificate prin reducerea ordinului matricei coeficient a modelelor liniarizate și folosirea lor în studiul stabilității la mici perturbații a unui sistem electric.

Algoritmul și programul de calcul realizat pe baza metodei grupării variabilelor de stare a fost testat cu rezultate foarte bune pe un exemplu concret.

Introducere

Simplificarea schemelor de calcul, respectiv înlocuirea rețelelor în studiu cu modele simplificate, conduce la ușurarea rezolvării problemelor ce apar, încadrându-se în limitele realizării practice atât din punct de vedere al posibilității tehnice de calcul, cât și din punct de vedere a timpului disponibil pentru analizarea rezultatelor. În acest scop, mașina sau mașinile supuse observației, pot fi reprezentate mai detaliat; gradul de detaliere poate fi redus pe măsura îndepărtării de punctul supus observației.

Studiul stabilității la mici perturbații a sistemului electric presupune descrierea comportării dinamice a acestuia printr-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$\dot{X} = A \cdot X \quad (1)$$

unde

X reprezintă vectorul variabilelor de stare;

A — matricea coeficienților.

Datorită dimensiunilor mari ale matricei coeficient A , folosirea metodei modale în studiul stabilității la mici perturbații, necesită memorie și timp de calcul mari, fapt ce impune operarea cu modele reduse.

În particular, reducerea ordinului modelelor liniarizate, poate fi obținută prin simplificarea modelelor de ordin înalt sau prin identificarea echivalențelor de ordin redus din datele răspunsului în timp ale sistemului. În continuare se va analiza primul aspect.

* Manuscris predat redacției la data de 17 februarie 1977

Metoda clasică de reducere a ordinului modelului dinamic constă în eliminarea unor elemente dinamice, alese de către inginerul de sistem. Astfel, în cazul studiilor electromecanice, se neglijează elementele dinamice cu constante de timp mici. De exemplu, se neglijează adesea caracteristicile dinamice ale regulatorului de tensiune, mașina sincronă fiind reprezentată printr-o t.e.m. de mărime constantă în serie cu o reactanță. În alte practici se reprezintă mașinile sincrone apropiate printr-o mașină echivalentă, sau se neglijează înfășurările de amortizare, rezistența statorului etc. Cu toate că astfel de tehnici de reducere se aplică comod în studiul sistemelor electrice, ele conduc totuși la reprezentări mai puțin precise ale sistemului real, putând apare întrebări cu privire la efectele lor asupra rezultatelor.

În ultimii ani, în literatura de specialitate, au apărut metodele de reducere modală pentru formarea modelelor simplificate. Se pot deosebi două categorii de metode în reducerea modală.

În prima categorie pot fi cuprinse metodele lui Nicholson [1], Davison [2,3] și Marshall [4], care realizează modele reduse reținând modurile dominante ale sistemului original, iar în a doua categorie intră metoda lui Kuppurajulu — Elangovan [5]

Într-o lucrare recentă Van Ness [6] prezintă metoda topologică și aplicarea ei, în intenția de a obține un răspuns dinamic mai exact decât în cazul reducerii clasice, în acest scop, combinând trăsăturile acestuia cu cele ale metodelor modale de reducere.

În continuare, se prezintă metodele de reducere modală prin gruparea variabilelor de stare și prin gruparea valorilor proprii.

1. Metode modale de reducere

1.1. Metoda grupării variabilelor de stare

Aceasta metodă are la baza considerații fizice și constă în împărțirea variabilelor de stare ce descriu sistemul în două grupe, pe baza vitezei de răspuns a acestora :

— Grupul X_1 ce cuprinde variabilele de stare asociate cu constante de timp mari. Răspunsul acestora la o mică variație la intrare este lent, putându-se presupune că își păstrează valorile inițiale pe durata de la început a răspunsului dinamic, adică : $X_1 = X_1(0)$ și $\dot{X}_1 = 0$;

— Grupul X_2 ce cuprinde variabilele de stare asociate cu constante de timp mici. În perioada finală a răspunsului dinamic, oscilațiile puternic amortizate ale variabilelor cu constante de timp mici vor dispărea, adică $\dot{X}_2 = 0$.

Conform acestei regrupări sistemul de ecuații (1) poate fi scris sub forma :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Rezultă că pentru răspunsul în perioada inițială se poate folosi modelul redus :

$$[\dot{X}_2] = [A_{22}] [X_2] \quad (3)$$

Stabilitatea sistemului se poate aprecia din calculul valorilor proprii ale matricei A_{22} .

Pentru răspunsul în perioada finală rezultă :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Prin eliminarea vectorului X_2 se obține :

$$[\dot{X}_1] = [A_1^*] [X_1] \quad (5)$$

unde :

$$[A_1^*] = [A_{11}] - [A_{12}] [A_{22}]^{-1} [A_{21}] \quad (6)$$

Din calculul valorilor proprii ale matricei A_1^* , de ordin redus față de matricea A inițială, se poate examina comportarea sistemului în perioada finală a răspunsului dinamic.

În multe cazuri, cunoașterea structurii unui sistem realizat prin interconectarea mai multor blocuri sau subsisteme, permite o grupare corectă a variabilelor de stare, funcție de răspunsul în timp al acestora.

În alte situații, acest lucru este mai dificil de realizat. În vederea unei grupări mai exacte a variabilelor de stare, funcție de comportarea lor în timpul regimului dinamic, se propune o metodă inspirată din [7].

Mai întâi, gruparea variabilelor din sistemul (2) se realizează prin examinarea elementelor diagonale ale matricei A , astfel încât elementele diagonale ale submatricei A_{22} să fie mult mai mari decât elementele diagonale ale submatricei A_{11} .

Tratind sistemul de ecuații (2) ca o combinație de două sisteme de variabile X_1 și X_2 , printr-o transformare lineară, se pot alege noi seturi de variabile Z_1 și Z_2 , astfel încât :

$$X_1 = T_1 Z_1 \quad (7)$$

$$X_2 = T_2 Z_2$$

Înlocuind noile variabile în sistemul de ecuații (2) acesta devine :

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & A_{12}^* \\ A_{21}^* & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

unde s-au folosit notațiile :

$$\Lambda_1 = T_1^{-1} A_{11} T_1; \Lambda_2 = T_2^{-1} A_{22} T_2 \quad (9)$$

$$A_{12}^* = T_1^{-1} A_{12} T_2; A_{21}^* = T_2^{-1} A_{21} T_1$$

Dacă se presupune că prin gruparea inițială m dintre variabilele de stare au fost cuprinse în vectorul X_1 și restul de $(n - m)$ variabile au fost cuprinse în vectorul X_2 , în vederea verificării grupării variabilelor se examinează dacă sistemul (8) satisface următoarele condiții :

$$\frac{\|\lambda_{1j}\|}{\|\lambda_{2i}\|} \ll 1 \text{ pentru } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, (n - m) \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (10)$$

$$m \cdot \frac{\|\delta_{ji}\| \|\delta_{ij}\|}{\|\lambda_{2i}\|^2} \ll 1 \text{ pentru } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, (n - m) \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (11)$$

unde λ_{1j} , λ_{2i} sînt valorile proprii „ j ” respectiv „ i ”, din primul respectiv al doilea grup de variabile;

δ_{ji} , δ_{ij} — elementele matricei A_{12}^* respectiv ale matricei A_{21}^* , ce corespund la valoarea proprie „ j ” din primul grup de variabile, respectiv la valoarea proprie „ i ” din al doilea grup de variabile.

Dacă o valoare proprie particulară λ_{21} nu satisface condițiile (10) și (11), atunci variabila de stare corespunzătoare va fi grupată în X_1 . După această nouă regrupare, procedeul de verificare se repetă în (2), (7) — (11), pentru a putea constata dacă sînt îndeplinite condițiile (10) și (11). În felul acesta în cîteva cicluri de calcul variabilele de stare X pot fi regrupate corect în X_1 și X_2 , funcție de comportarea lor în timp.

1.2. Metoda grupării valorilor proprii

Tehnica grupării valorilor proprii constituie o dezvoltare a metodei lui Davison [7], care se bazează pe constatarea că se pot neglija valorile proprii ale sistemului original situate la distanță mare de axa imaginară; acestor valori proprii le corespund constante mici de timp. Ținînd seama de această constatare se împart valorile proprii ale sistemului original în două grupuri :

— Grupul valorilor proprii nedominante Λ_2 , care include valorile proprii îndepărtate de axa imaginară;

— Grupul valorilor proprii dominante Λ_1 , care include valorile proprii apropiate de axa imaginară.

În ceea ce privește raportul între cele două grupe, acesta este ales astfel încît părțile reale ale valorilor proprii din grupul nedominant Λ_2 să fie mai mari cu cel puțin un ordin de mărime decît cele din grupul dominant Λ_1 . Pentru raportul ales, dintre valorile proprii ale matricei A , se selectează un model de ordin redus în care se rețin primele l valori proprii dominante și vectorii proprii asociați.

Ecuția de stare a noului model redus va fi :

$$[\dot{X}] = [A^*][X^*] \quad (12)$$

în care X^* constituie vectorul variabilelor de stare reținute;

$$[A^*] = [U_l] [\Lambda_l] [U_l^{-1}]$$

Matricea U_l ($l \times l$) conține elementele primilor l vectori proprii asociați cu cele l valori proprii reținute. Matricea Λ_l este o matrice diagonală ce conține cele l valori proprii dominante.

Se menționează că acest model redus păstrează variabilele fizice dominante cu aceleași valori proprii ca și sistemul original neredus.

Se poate arăta că variabilele de stare corespunzătoare modurilor nereținute, rămân legate algebric de variabilele de stare ale modelului redus din vectorul X^* . În acest scop dacă se folosește o transformare lineară de forma $X = T \cdot Z$, și se partiționează vectorul X în variabile eliminate X^{elim} , respectiv variabile reținute X^* , atunci există ecuațiile :

$$[X^{\text{elim}}] = [T_e^*] [Z^*] \quad (13)$$

$$[X^*] = [T^*] [Z^*]$$

respectiv relația de legătură :

$$[X^{\text{elim}}] = [T_e^*] [T^*]^{-1} [X^*] \quad (14)$$

2. Algoritm și program de calcul

În vederea studiului stabilității sistemelor electrice pe modele simplificate prin metoda grupării variabilelor de stare, s-a întocmit un algoritm și program de calcul a cărui organigramă generală este prezentată în figura 1.

Programul de calcul, implementat pe calculatorul FELIX—256 din cadrul Centrului de calcul din I.P.B., cuprinde trei joburi înlanțuite MATRA — construcția matricei coeficient A ; STARED — formarea modelelor reduse A_{22} și A_1^* și calculul valorilor proprii cu subrutinele HSBG și ATEIG din biblioteca IBM; VARTIMP — variația în timp a mărimilor de stare, folosind subrutina R.K.A.M. Programul realizat din circa 1 500 instrucțiuni, utilizează overlay-uri în zona de date și fișiere pe suport extern pentru structurile de date comune celor trei joburi.

Modelul matematic, folosit pentru realizarea matricei coeficient A a sistemului electric, a fost prezentat detaliat în lucrări anterioare [8], [9].

În figura 2, se prezintă organigrama de calcul pentru reducerea ordinului matricei A prin metoda grupării valorilor proprii.

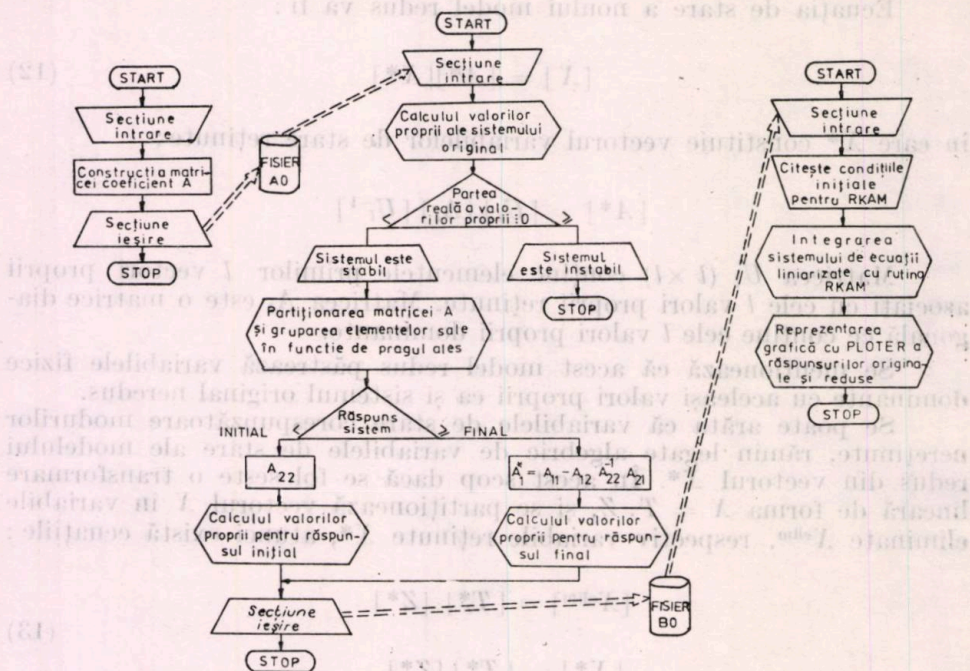


Fig. 1. Organigrama programelor STARED de calcul a stabilității sistemelor electrice pe modele simplificate

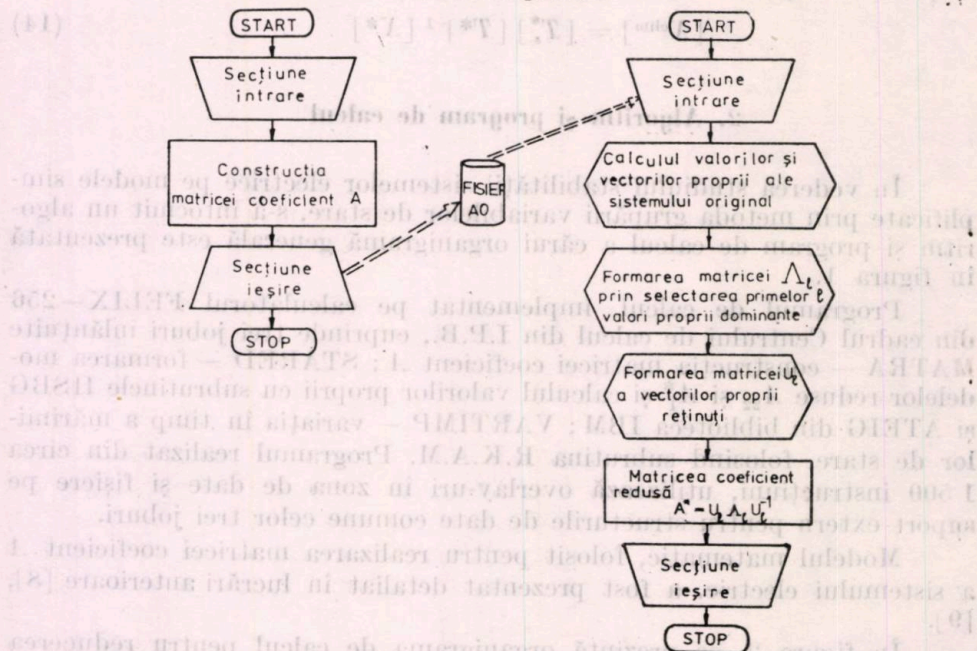


Fig. 2 Organigrama de calcul pentru reducerea ordinului matricei A, prin gruparea valorilor proprii

3. Rezultate

Pentru testarea programului de calcul STARED s-a folosit schema electrică din figura 3. Datele de calcul necesare aplicării metodei propuse, sînt redată în tabelele 1, 2, 3 și 4.

Matricea admitanțelor nodale redusă la nodurile cu generatoare:

$$Y_{11} = 1,293 - j 5,376 \text{ u.r.};$$

$$Y_{22} = 1,0417 - j 5,3748 \text{ u.r.}$$

$$Y_{12} = -0,515 + j 5,189 \text{ u.r.};$$

$$Y_{21} = -0,515 + j 5,189 \text{ u.r.}$$

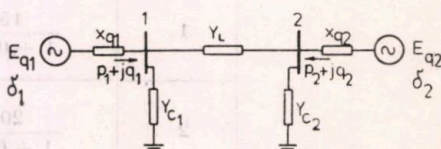


Fig. 3 Schema echivalentă a sistemului de studiat.

Tabela 1

Datele generatoarelor					Grupul echivalent	
Simbol	Semnificație				1	2
x_t	reactanță transformator bloc				0,22	0,17
r	rezistență înfășurare statorică				0,01	0,02
r_{fd}	rezistență înfășurare de excitație				0,0011	0,0012
x_{fd}	reactanță înfășurării de excitație				0,96	2,85
x_d	reactanță sincronă longitudinală				1,05	3,114
x_q	reactanță sincronă transversală				0,7	3,114
x_{ad}	reactanță de magnetizare după axa d				0,84	2,5
x_{aq}	reactanță de magnetizare după axa q				0,53	2,5
r_{kd}	rezistență înfășurării de amortizare din axa d				0,02	0,0126
r_{kq}	rezistență înfășurării de amortizare din axa q				0,01	0,0115
x_{kd}	reactanță înfășurării de amortizare din axa d				0,96	2,85
x_{kq}	reactanță înfășurării de amortizare din axa q				0,7	3,114
T_a	timpul de lansare [sec]				6,05	5,9
D	factorul de amortizare				0,9	0,9

Tabela 2

Datele de regim permanent

Nodul	U_*	P_*	Q_*	E_{q*}	δ_{grade}	I_{d*}	I_{q*}	V	V_{q*}
1	1,02	0,82	0,31	1,68	22,37	0,68	0,52	0,24	1,03
2	1.	0,5	0,06	1,96	51,7	0,45	0,22	0,80	0,63

Toate mărimile sînt calculate în unitățile relative raportate la $S_b = 1140 \text{ MVA}$ și $U_b = 400 \text{ kV}$.

Tabela 3

Funcțiile de transfer ale reguletoarelor

Grupul	Regulator automat de tensiune	Regulator automat de viteză
1	$\frac{15}{1 + 0,2 s}$	$\frac{1 + 3,77 s}{0,05 + 2 s}$
2	$\frac{20}{1 + 0,1 s}$	$\frac{1}{0,05 + 0,2 s}$

Matricea

$p\Delta\varphi_{fd_1}$	$p\Delta\varphi_{d_1}$	$p\Delta\varphi_{kd_1}$	$p\Delta\varphi_{q_1}$	$p\Delta\varphi_{kq_1}$	$p\Delta\varphi_{fd_2}$	$p\Delta\varphi_{d_2}$	$p\Delta\varphi_{kd_2}$
1,87	0,605	1,06	0	0	0	0	0
400,9	-859,2	400,9	559,3	-185,6	100,8	-215,7	100,8
19,28	11,02	-33,05	-0,00002	0	0	-0,00004	0
128,5	-589,4	128,5	-765,2	579,3	90,81	-194,3	90,81
-0,00001	0,00003	-0,00001	7,16	-9,46	0	0	0
0	0	0	0	0	-0,697	-0,36	0,397
379,6	-813,4	379,6	-215,7	163,4	138,5	-296,4	138,5
0	0	0	0	0	4,11	2,372	-7,13
-113,1	242,3	-113,1	-724,3	548,4	50,52	-422,1	50,52
0	0	0	0,00003	0	0	0	0
-42,82	91,76	-42,82	96,73	-73,24	-19,49	41,71	-19,49
-146,6	314	-146,6	296,6	-300,3	-88,03	188,4	-88,03
0	0	0	0	0	0	0	0
0,123	-0,351	0,123	0,685	0,433	0	0	0
0	0	0	0	0	0,082	-0,123	0,082
-0,233	0,662	-0,233	-1,29	0,817	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Se menționează că fiecare mașină sincronă prevăzută cu reguletoare automate de tensiune și viteză a fost reprezentată prin următoarele 9 variabile de stare: cele cinci fluxuri de inducție ale mașinii sincronice, tensiunea de excitație, unghiul intern, alunecarea vitezei de rotație și eulplul mecanic.

Pentru cazul studiat, alegându-se ca referință mașina G_1 , ordinul matricei coeficient devine 17, reducându-se cu o unitate.

Pentru sistemul electric ales s-a analizat stabilitatea la mici perturbații prin metoda modală, atât pe modelul original, cât și pe modele reduse (tabela 5).

Alegerea unui raport: PRAG = 0,16 între cel mai mare element diagonal din submatricea A_{11} și cel mai mic element diagonal din A_{22} , a condus la următoarea partiție a matricei A :

$$\begin{aligned} A_{11} (13,13); & \quad A_{12} (13,4). \\ A_{21} (4,13); & \quad A_{22} (4,4). \end{aligned}$$

Tabela 4

coeficient A

$p\Delta\varphi_{q_2}$	$p\Delta\varphi_{kq_2}$	$p\Delta e_{q_1}$	$p\Delta e_{q_2}$	$p\Delta\delta_2$	pa_1	pa_2	$p\Delta e_{m_1}$	$p\Delta e_{m_2}$
0	0	0,29	0	0	0	0	0	0
136,5	-109,5	0,0002	0	-104,9	134	-0,0005	0	0
0	0	-0,00001	0	0	0,00005	0	0	0
-151,5	121,6	-0,00001	-0,0002	42,24	-325,1	0,0002	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0,941	0	0	0	0	0
389,9	-60,97	0	-0,0001	110,7	-0,0008	254	0	0
0,0002	0	0	-0,0001	0	0	0	0	0
-208,2	167,1	-0,0001	0	-168,8	0,0009	-199,2	0	0
2,618	-3,262	0	0	-0,0003	0	-0,00006	0	0
14,17	-11,37	-4,99	-0,0002	0,117	-0,0006	-0,0003	0	0
42,13	-33,83	-0,0003	-9,999	11,35	0,0001	-0,0013	0	0
0	0	0	0	0	-314	314	0	0
0	0	0	0	0	0,148	0	0,165	0
0,173	-0,077	0	0	0	0	-0,152	0	0,169
0	0	0	0	0	-0,219	0	-0,336	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0,25

Se observă că pentru raportul ales s-au grupat numai patru din variabilele de stare din matricea A_{22} și anume: $\Delta\varphi_{q_1}$, $\Delta\varphi_{q_2}$, $\Delta\varphi_{q_3}$, $\Delta\varphi_{q_4}$, adică cele corespunzătoare înfășurărilor statorice.

Tabela 5

Valoarea proprie	Model redus			
	Model original	Prag = 0,16		Prag = 0,7
		Răspuns inițial	Răspuns final	Răspuns inițial Răspuns final
λ_1	$-1053 + j611,9$	$-1053 + j613$		$-1053 + j612$
λ_2	$-1053 - j611,9$	$-1053 - j613$		$-1053 - j612$
λ_3	$-15,97 + j362$	$-15,8 + j362$		$-15,9 + j362$
λ_4	$-15,97 - j362$	$-15,8 - j362$		$-15,9 - j362$
λ_5	$-30,62$		$-30,67$	$-29,3$
λ_6	$-10,51$		$-10,51$	-10
λ_7	$-2,516 + j5,51$		$-2,48 - j5,52$	$-5,66$
λ_8	$-2,516 - j5,51$		$-2,48 + j5,52$	$-6,14$
λ_9	$-2,075 + j2,847$		$-1,8 + j2,89$	$-3,68 + j4,53$
λ_{10}	$-2,075 - j2,847$		$-1,8 - j2,89$	$-3,68 - j4,53$
λ_{11}	$-4,999$		$-5,01$	$-0,75 + j3,13$
λ_{12}	$-3,441$		$-3,53$	$-0,75 - j3,13$
λ_{13}	$-2,026 + j1,452$		$-2,13 + j1,36$	$-1,91 + j0,82$
λ_{14}	$-2,026 - j1,452$		$-2,13 - j1,36$	$-1,91 - j0,82$
λ_{15}	$-0,112 + j1,315$		$-0,128 + j1,32$	$-0,15 + j1,31$
λ_{16}	$-0,112 - j1,315$		$-0,128 - j1,32$	$-0,15 - j1,31$
λ_{17}	$-0,0138$		$-0,01389$	$-0,01389$

Odată obținută matricea A_{22} , respectiv A_1^* , valorile proprii ale acestora vor determina comportarea sistemului în perioada inițială respectiv în perioada finală a răspunsului dinamic.

Ordinul matricei A_{22} se poate crește, alegându-se alte valori pentru mărimea pragului inițial, grupînd la un loc nu numai înfășurările statorice, dar și înfășurările de amortizare. Astfel, pentru un PRAG = 0,7 se constată că submatricele devin :

$$A_{11} (10, 10); \quad A_{12} (10, 7)$$

$$A_{21} (7, 10); \quad A_{22} (7, 7)$$

Din compararea valorilor proprii obținute pentru cele două modele reduse, respectiv pentru modelul original se constată că : valorile proprii ale primei partiționări conduc la rezultate foarte apropiate ; pentru cazul al doilea rezultatele răspunsului inițial sint foarte apropiate, în timp ce rezultatele răspunsului final, diferă puțin.

Concluzii

Lucrarea prezintă definirea unor modele simplificate — prin reducerea ordinului matricei coeficient a modelelor liniarizate — și folosirea lor în studiul stabilității la mici perturbații.

Algoritmul și programul de calcul descrise folosesc metoda grupării variabilelor de stare, în care acestea se împart în două grupe pe baza

vitezei de răspuns a acestora. Modelele obținute operînd cu matrici de ordin redus față de modelul inițial, permit studiul stabilității cu calcule de dimensiuni mai mici și în timpi de calcul mai reduși. Precizia modelului, foarte bună, este totuși funcție de gradul de detaliere impus. Metoda grupării variabilelor de stare este relativ simplă, nu necesită calculul exact al valorilor proprii dar ea presupune cunoașterea apriorică a comportării aproximative a variabilelor de stare.

Metoda grupării valorilor proprii este mult mai riguroasă decît prima, dar necesită determinarea valorilor și vectorilor proprii ale sistemului original și în plus necesită un calcul considerabil pentru rezolvarea subsistemelor rezultate.

Catedra de rețele electrice

Institutul politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej
București

BIBLIOGRAFIE

1. Nicholson, M. H., Proc. IEEE, vol. 111, Aug. 1964.
2. Davison, E. J., IEEE, Trans. Aut. Control, vol. AC-11, Jan. 1966.
3. Davison, E. J. IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-13 April, 1968.
4. Marshall, S. A., IEEE, Trans. Aut. Control vol. AC-11, dec. 1966.
5. Kuppurajulu, A., Elangovan, S. IEEE Trans. PAS-90, jan. 1971.
6. Van Ness, J. E., Improving Reduced Dynamic Models of Power Systems. PICA Conference Proceedings, 1975.
7. Milne, R. D., The analysis of weakly coupled dynamical systems. Int. J. Control, vol. 2, Aug. 1965.
8. Potolea, E., Eremia, M., Tudose, M., Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej” București, Tom. XXXVII, nr. 2, mai-august 1975.
9. Eremia, M., Potolea, E., Bul. ISPE, 1977.

Simplified Models for the Stability Study of Power Systems at Small Perturbations by Modal Method.

The paper presents the definition of some models simplified by reducing the order of the coefficient matrix of linear models; the use of such simplified models in the power system stability studies at small perturbations is also presented.

The algorithm and the computer program written on the basis of state variables grouping method has been tested with very good results for a real case as example.

CUPRINSUL SERIEI ELECTROTEHNICA PE ANUL 1977

MATEMATICĂ

- Gh. Mocică, C. Udriște. Asupra 3-structurilor Sasaki pe varietăți cu trei dimensiuni. Nr. 1 pag. 3—8
- V. Mihăilescu. Conexiunea asociată grupului cuaternionic. Nr. 1 pag. 9—16
- V. Prepelită. Numărul sistemelor liniare peste corpuri finite. Nr. 2 pag. 3—8
- T. S. Nikolova, D. D. Bainov. On a Boundary Problem for a First Order Differential Equation of Superneutral Type with a Parameter. Nr. 2 pag. 9—18
- D. Stanomir, O. Stănășilă. Towards a General Theory of Discrete Signals I Nr. 3 pag. 3—10
- D. Homanteconschi. Asupra determinării unor cimpuri potențiale plan-paralele în condiții de frontieră mixte. Nr. 4 pag. 3—10

FIZICA

- D. Angheliescu, V. Datcu. O modalitate de calcul a probabilității de formare a stelilor cu urme necorelate în emulsii nucleare. Nr. 1 pag. 17—22
- E. Sofron, Cornelia Moțoc, P. Sterian. Asupra unor dispozitive optoelectrice cu cristale lichide nematice: Proprietăți, caracteristici și aplicații. Nr. 1 pag. 23—30
- Luminița Daniello. Metode de stabilire a ecuației Boltzmann. Nr. 1 pag. 31—40
- I. M. Popescu. Cutremurele de pământ. Nr. 1 pag. 41—42.
- C. P. Cristescu, I. M. Popescu, A. M. Preda. Hollow Cathode He-Cd Laser Nr. 2 pag. 19—26
- Maria Honeciuc, Iuliana Cuculescu, Cornelia Moțoc, Eugenia Penția. Electrical and Optical Properties of SnO_2 thin Films Obtained by a Vapour Reaction Presented by Soft Ferrites. Nr. 2 pag. 27—32
- D. Iordache, Luminița Daniello, M. Stan, I. Belciu. On Certain Logical Correlations of the Magnetic Permeability Dispersion Presented by Soft Ferrites. Nr. 2 pag. 33—40.
- P. Suciu, R. Chișleag, I. Cucurezeanu. Asupra obținerii hărților termice ale unor dispozitive electronice prin metoda interferometriei holografice Nr. 3. pag. 11—16
- I. M. Popescu, G. A. Stanciu, G. M. Stoichița. Nou sistem de testare a dispozitivelor semiconductoare și a circuitelor integrate prin baleiaj cu laser Nr. 4 pag. 11—16
- D. Bogdan, Tr. Crețu, H. Fuia, G. Macarie, D. G. Popescu. Unele aspecte ale dezintegrării beta ^{186}Re ^{186}Os . Nr. 4 pag. 17—26

ELECTROTEHNICA

- M. Preda, N. Nicoară, Ioana Dorobanțu. Ecuațiile de stare ale circuitelor active cu elemente în exces. Nr. 1 pag. 43—50
- M. Iordache, Vl. Socaciu. A. Method of Computing the Derivative of Some Functions Describing Nonlinear Electric Phenomena. Nr. 1. pag. 51—58
- N. Galan. Cuplul electromagnetic la motorul cu histerezis. Nr. 2. pag. 41—46
- C. Ghiță. Metodă de proiectare a dubloarelor feromagnetice trifazate de frecvență. Nr. 2. pag. 47—54
- D. Stanciu. Metodă de proiectare a pompelor electromagnetice de curent continuu. Nr. 2 pag. 55—66
- C. Bălă, Matilda Tigler, M. Ionescu. Regimul staționar al mașinii sincrone trifazate conectate pe rețea proprie prin intermediul unui redresor comandat. Nr. 3 pag. 17—26
- M. Preda, Ioana Dorobanțu. Metodă topologică universală în coarbori neorientați pentru circuite cu surse comandate oarecare. Nr. 3 pag. 27—38
- N. Galan, I. Beștea. Aspecte ale studiului motorului asincron trifazat cu rotor masiv. Nr. 3 pag. 39—48
- Fl. Ionescu. Sinteza asupra posibilităților de măsurare ale curentului postarc. Nr. 3 pag. 49—58

ELECTRONICA

- Tatiana Rădulescu*. Sinteza funcțiilor de transfer avînd în vedere minimalizarea sensibilității. Nr. 1 pag. 59—66
- M. Săvescu, Ecaterina Vlădescu*. Calculul răspunsului circuitelor electrice la semnale cu modulație în impulsuri de fază. Nr. 2 pag. 67—78
- Sanda Dumitrescu, Gh. M. Ștefan*. Modelarea structurilor logice digitale ca sisteme cu stări finite. Nr. 3 pag. 59—68
- Ed. Nicolau*. Oscilații în sisteme cibernetice (cu reacție). Nr. 4 pag. 27—34

AUTOMATICA

- I. Dumitrașcu, D. Popescu*. Metoda căutării planelor principale pentru optimizarea sistemelor multivariabile. Nr. 1 pag. 67—68
- Maria Ana Necula, A. Nădejde, Ligia Maior*. Metoda numerică de calcul al valorilor unei funcții de timp dată prin transformata Z Nr. 1 pag. 79—86
- V. Cristea*. Algoritm de sincronizare a proceselor sistemului SISIF 1. Nr. 1 pag. 87—92
- I. Catană*. Metode de analiză a sistemului hidraulic pompă-motor rotativ. Nr. 1 pag. 93—102.
- M. Terlișco, G. Ionescu*. Identificarea experimentală a sistemului de reglare a tensiunii unui grup generator de mare putere. Nr. 2 pag. 79—90
- I. Russ*. Sensitivity Function Generation for Nonlinear Systems with Jump Discontinuities. Nr. 2 pag. 91—100.
- Doina Stănescu*. Performanțele sistemelor automate liniare invariante. Nr. 3 pag. 69—70.
- Ioana Mihai*. Algoritm de proiectare prin compensare a unui sistem liniar invariant în timp. Nr. 3 pag. 79—86.
- P. Stoica*. The Generalized Least Squares Method with Moving Average Model for Residuals. Nr. 3 pag. 87—96.
- N. Sprinceană, R. Dobrescu, Fl. Ionescu, C. Frankenfeld*. Contributions to Implementation of Numerical Adaptive Control Systems for Milling Machines. Nr. 4 pag. 35—46
- M. Terlișco, P. Stoica*. Identificarea funcției de transfer folosind semnale pseudoaleatoare binare (SPAB). Nr. 4 pag. 47—54
- I. Russ*. Synthesis of a Suboptimal Control Using the Sensitivity Functions Nr. 4 pag. 55—62

CALCULATOARE

- V. Cristea*. Verificarea unui algoritm de sincronizare a proceselor în sistemul SISIF. Nr. 3 pag. 97—104
- Eugenia Kalisz, P. Dîmo*. Macroprocesorul TRAC. Nr. 4 pag. 63—72
- M. Vărtosu, P. Al. Dan, A. Vîld Maior*. Asupra unor operații necesare în prelucrarea automată a informației conținute în imagini. Nr. 4 pag. 73—82

ENERGETICA

- N. Dănilă, C. Ionescu*. Analiza statistică a fiabilității grupurilor electrice de mare putere. Nr. 1 pag. 101—106.
- D. Gh. Ionescu*. Observații asupra metodei lui Rayleigh a analizei dimensionale și asupra relației integrale a stratului limită. Nr. 1 pag. 107—112.
- D. Cristescu, P. Postolache*. Protecția liniilor electrice aeriene împotriva trăsnetului. Modelul electrogeometric. Nr. 2 pag. 101—112
- D. Gh. Ionescu*. Observații asupra ecuației de stare a fluidelor și asupra relației lui Euler pentru turbomașini. Nr. 3 pag. 105—112
- A. Carabulea, R. Tenovici, C. Dumitriu*. Algoritm privind optimizarea bilanțurilor energetice în structura ingineriei sistemelor. Nr. 4 pag. 83—96
- M. Eremia*. Modele simplificate pentru studiul stabilității la mici perturbații a sistemelor electrice prin metoda modală. Nr. 4 pag. 97—107

INDEX ALFABETIC PE AUTORI

- Anghelescu D. 1, p. 17-22
 Bainov D. D. 2, p. 9-18
 Bălă C. 3, p. 17-26
 Belciu I. 2, p. 33-40
 Beștea I. 3, p. 39-48
 Bogdan D. 4, p. 39-48
 Carabulea A. 4, p. 83-96
 Catană I. 1, p. 93-102
 Chișleag R. 3, p. 11-16
 Crețu Tr. 4, p. 17-26
 Cristea V. 1, p. 87-92; 3, p. 97-104
 Cristescu C. P. 2, p. 19-26
 Cristescu D. 2, p. 101-112
 Cuculescu Iuliana, 2, p. 27-32
 Cucurezeanu I. 3, p. 11-16
 Dan P. Al. 4, p. 73-82
 Daniello Luminița, 1, p. 31-40; 2, p. 17-22
 Datcu V. 1, p. 17-22
 Dănilă N. 1, p. 101-106
 Dîmo P. 4, p. 63-72
 Dobrescu R. 4, p. 35-46
 Dorobanțu Ioana, 1, p. 43-50; 3, p. 27-38
 Dumitrașcu I. 1, p. 67-68
 Dumitrescu Sanda, 3, p. 59-68
 Dumitriu C. 4, p. 83-96
 Eremia M. 4, p. 97-107
 Frankenfeld C. 4, p. 35-46
Fuia H. 4, p. 17-26
 Galan N. 2, p. 41-46; 3, p. 39-48
 Ghiță C. 2, p. 47-54
 Homentcovschi D. 4, p. 3-10
 Honciuc Maria, 2, p. 27-32
 Ionescu C. 1, p. 101-106
 Ionescu D. Gh. 1, p. 107-112; 3, p. 105-112
 Ionescu Fl. 3, p. 49-58; 4, p. 35-46
 Ionescu G. 2, p. 79-90
 Ionescu M. 3, p. 17-26
 Iordache D. 2, p. 33-40
 Iordache M. 1, p. 51-58
 Kalisz Eugenia, 4, p. 63-72
 Macarie G. 4, p. 17-26
 Maior Ligia, 1, p. 79-86
 Mihăilescu V. 1, p. 9-16
 Mihu Ioana, 3, p. 79-86
 Mocică Gh. 1, p. 3-8
 Moțoc Cornelia, 1, p. 23-30; 2, p. 27-32
 Nădejde A. 1, p. 79-86
 Necula Maria Ana, 1, p. 79-86
 Nicoară N. 1, p. 43-50
 Nicolau Ed. 4, p. 27-34
 Nikolova T. S. 2, p. 9-18
 Penția Eugenia, 2, p. 27-32
 Popescu D. 1, p. 67-68
 Popescu D. G. 4, p. 17-26
 Popescu I. M. 1, p. 41-42; 2, p. 19-26; 4, p. 11-16
 Postolache P. 2, p. 101-112
 Preda A. M. 2, p. 19-26
 Preda M. 1, p. 43-50; 3, p. 27-38

- Prepelită V. 2, p. 3-8
 Rădulescu Tatiana, 1, p. 59-66
 Russ I. 2, p. 91-100; 4, p. 55-62
 Săvescu M. 2, p. 67-78
 Socaci V. 1, p. 51-58
 Soțron E. 1, p. 23-30
 Stan M. 2, p. 33-40
 Stanciu D. 2, p. 55-60
 Stanciu G. A. 4, p. 11-16
 Stanomir D. 3, p. 3-10
 Stănășilă O. 3, p. 3-10
 Stănescu Doina, 3, p. 69-70
 Ștefan Gh. M. 3, p. 59-68
 Șterian P. 1, p. 23-30
 Stoica P. 3, p. 87-96; 4, p. 47-54
 Stoichiță C. M. 4, p. 11-16
 Sprinceană N. 4, p. 35-46
 Suciu P. 3, p. 11-16
 Tertișco M. 2, p. 79-90; 4, p. 47-54
 Țenovici R. 4, p. 83-96
 Țigler Matilda 3, p. 17-26
 Udriște C. 1, p. 3-8
 Vărtosu M. 4, p. 73-82
 Vlădescu Ecaterina, 2, p. 67-78
 Vild Maior A. 4, p. 73-82

TEZELE DE DOCTORAT SUSȚINUTE ÎN ANUL 1977

- D. Niculescu*, Contribuții la studiul disponibilității grupurilor termoelectrice. (18 II.)
- Al. Ciureș*, Prelucrarea informației în sistemul vizual pentru recunoașterea profunzimii spațiale. (31 III.)
- N. Costache*, Contribuții la problema utilizării calculatoarelor electronice în conducerea sistemului economic socialist. (2 IV.)
- M. Drăgulescu*, Metodă și sistem pentru supravegherea automată a funcționării utilajelor. (7 IV.)
- V. A. Marinescu*, Regimuri tranzitorii în circuite neliniare cuplate magnetic (12 IV)
- M. Iordache*, Contribuții la modelarea proceselor tranzitorii în sistemele neliniare (27 IV)
- G. V. Manolescu*, Indici caracteristici ai arhitecturii și calității rețelelor și sistemelor electrotehnice (12 V)
- C. Lazarovici*, Contribuții la metodele de realizare a surselor de putere necesare încercărilor în regim deformant a aparatelor electrice de măsurat (19 V)
- D. Pavelescu*, Contribuții asupra procesului de limitare a curentului în aparatele de comutație de înaltă și joasă tensiune. (19 V)
- I. Diaconescu*, Răspunsul circuitelor electrice variabile în timp la semnale modulate (26 V)
- N. Vasilii*, Contribuții la hidrodinamica rotoarelor radial axiale ale turbomașinilor (3 VI)
- P. E. Sterian*, Contribuții la studiul fenomenelor de modulație laser, (8 VI)
- I. Costea*, Dispozitive cu avalanșe și timp de tranzit (11 VI)
- B. Guzun*, Influența sistemului de reglare a excitației asupra funcționării generatorului sincron în regim dinamic (16 VI)
- G. M. Eremia*, Contribuții la studiul stabilității sistemelor electrice de mici perturbații (15 VI)
- E. Sofron*, Contribuții privind studiul și realizarea de dispozitive optoelectrice cu materiale noi (cristale lichide nematice) (29 VII)
- El Karra Kamal*, Contribuții la telemecanizarea stațiilor electrice (30 VII)
- C. Ghiță*, Studiul metodelor de rezolvare a circuitelor magnetice neliniare cu aplicații la calculul unor amortizoare electromagnetice de energie (29 VIII)
- M. Th. Ionașcu*, Contribuții la studiul primelor electromagnetice de mare putere (19 IX)
- L. Oancea*, Contribuții la îmbunătățirea alimentării cu căldură prin termoficare a marilor complexe de sere legumicole (30 IX)
- M. Isbășescu*, Fascicule laser de scurtă durată (6 X)
- C. Marinov*, Contribuții la metodele de analiză ale circuitelor electrice neliniare. Timpul de comutație în circuite cu dispozitive semiconductoare. (6 X)
- A. Bielusich*, Contribuții la cercetarea efectului stereoscopic. Aplicațiile sale în cinematografie (13 X)
- R. S. Popina*, Limite de precizie a măsurătorilor utilizând conversia analog-digitală a datelor (3 XI)
- Gh. Samachișe*, Obținerea fenomenului de electroluminiscență în curent continuu în pulberi de sulfură de zinc în vederea obținerii de diode electroluminescente (5 XI)
- I. Răducanu*, Studiul fenomenelor tranzitorii care au loc la impuls de tensiune în transformatoare de putere (2 X II)



**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SERIA ELECTROTEHNICĂ**

apare trimestrial, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din București“ și Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rând activitatea științifică a corpului didactic din institut. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Correspondența privind articolele, schimburile de publicații și abonamentele se fac pe adresa institutului.

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
РАЗДЕЛ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

выходит четыре раза в год, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din București“, и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут публиковаться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SERIES ELECTROTECHNICS**

The Bulletin is issued quarterly, continuing the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din București“ and Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the folwing address.

**BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
SÉRIE ELECTROTECHNIQUE**

paraît tous les trois mois, continuant les anciens periodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées“, „Buletinul Politehnicei din București“ et Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București.

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnamants est :

Adresa : **INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ“ BUCUREȘTI
ROMÂNIA**
Splaiul Independenței nr. 313
Căsuța Poștală nr. 2336
(pentru Buletinul Institutului)
Seria Electrotehnică

